510.5
A673

Digitized by Google

510.5
A673

Digitized by Google

Digitized by Google

ARCHIV

der

MATHEMATIK und PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Sechster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1888.

Digitized by Google

162504

STANFORD LIBRARY

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichnis

des sechsten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
VII.	Zur Theorie der harmonischen Reihe. Von Heinrich Simon	I.	105
XII.	Fortsetzung	II.	220
XVII.	Bemerkung zu der Formel für das Differential einer Function mehrerer Variabeln. Von R. Hoppe	III.	351
XXII.	Zur Lehre der quadratischen Formen. Von Julius Vályi	IV.	445
	Integralrechnung.		
XVI.	Ueber die Entwickelung von $e^{-1:(1-x)}$ in eine Potenzenreihe nebst einigen Anwendungen derselben. Von Louis Saalschütz	III.	305
XXII.	Zur Function $\Gamma(x)$. Von W. Láska	IV.	448
	Geometrie der Ebene.		
V.	Construction der den Brennpunkten eines Kegelschnitts entsprechenden Punkte im collinearen System. Von Leopold Klug	I.	88
VII.	Ueber die Normalen der Kegelschnitte. Von Emil Oekinghaus	I.	112
VIII.	Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. (Schluss). Von P. H. Schoute	II.	113
XI.	Zur Theorie der Schliessungsprobleme. Von Emil Oekinghaus	II.	186

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XII.	Zur Rectification der Hyperbel. Von Emil Oekinghaus	II.	223
XIX.	Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissoide. Von Karl Zahradnik	IV.	392
XX.	Ueber einige Winkel- und Längenrelationen am Dreieck. Von Karl Zahradnik	IV.	415
XXII.	Neuer Punkt und Gerade in der Dreiecksebene. Von Johann Hermes	IV.	437

Geometrie des Raumes.

III.	Erweiterung zweier Sätze auf n Dimensionen. Von R. Hoppe	I.	69
IV.	Ueber Triederschnitte und Minimaltetraeder. Von O. Bermann	I.	76
XII.	Bemerkung dazu. Von O. Bermann	II.	219
VI.	Ueber mehrfach perspective Tetraeder. Von Leopold Klug	I.	93
X.	Principien der n dimensionalen Curventheorie. Von R. Hoppe	II.	168
XV.	Mittelwerte, die Krümmung ebener Curven und krummer Flächen betreffend. Von Emanuel Czuber	III.	294

Trigonometrie.

I.	Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks. Von W. Fuhrmann	I.	1
XII.	Berichtigende Notiz dazu. Von W. Fuhrmann	II.	218
XIV.	Determinanten bei wiederholter Halbirung des ganzen Winkels. Von Johann Hermes	III.	276

Mechanik.

IX.	Beitrag zur Lehre von der Bewegung eines festen Körpers in einer incompressibeln Flüssigkeit. Von Fritz Kötter	II.	157
XIII.	Potential einer elliptischen Walze (Fortsetzung). Von Ulrich Bigler	III.	225
XXII.	Momentaner Bewegungszustand eines in der Praxis viel angewandten Mechanismus. Von August Ramisch	IV.	442

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Optik, Akustik und Elasticität.

II.	Die Lissajous'schen Curven. Von H. Ekama .	I.	39

Astronomie.

XVIII.	Die intermediäre Bahn des Planeten (17) Thetis nach Herrn Gyldén's Theorie. Von Wellmann	IV.	353

Litterarische Berichte.

XXI. Boncompagni (Bull. XIX.) Eneström (Bibl. M. 1886 — f. Gesch. I.) Vogler (pr. Geom.) Börsch (geod. Coord.) Israel-Holtzwart (Astr.) Günther (Erdk. u. Math.) Konkoly (Himlsphot.) Hann u. Köppen (met. Zschr. III). Bertrand (Thermodyn.) Poske (Zschr. ph. Unt. I.) Teixeira (Jorn. VII.) Newcomb (Am. J. IX.) Kikuchi (J. Coll. sc. I.) Upsala (Nov. Act. XIII) Montsouris (Ann. 1887.)

XXII. Hengel (Alg.) Enholtz (Ar.) Bretschneider (Ar. Alg.) Seeger (Geom.) Finger (Mech.) Jansen (Phys.) Wildermann (Naturl.) Lautesehläger (Aufg.) Mertens (Rech.) Wittstein (4 st. Log.) Paulus (Mondph.) Brüssel (Bull. IX — XIII, — Ann. 1886 1887.) Toulouse (Ann. I.) Mittag-Leffler (A. M. X.)

XXIII. Teixeira (anal. inf.) Stegemann (Kiepert) (Diff. Int.) Mansion (anal. inf.) Sickenberger (Det.) Gauss (Simon) (G.'sche Rh.) Simony (alg. Op.) Darboux (géom.) Schmidle (Fl. 2. O.) Heger (Kegschn.). Hofmann (Riem. Fl.) Beyel Axon. Persp.) Simony (top. Tats.)

XXIV. Lagrange (Servus) (Mech.) Poinsot (Servus) (Stat.) Petroff (Wurzel) (Reih.) Toepler (Luftwid.) Auerbach (cl. Masch.) Glaser-De-Cew (Auerbach) (Constr. d. el. M.) Kareis (Zschr. Elektrot. IV.) Epstein (Geom.). Martus (astr. Geogr.) Gravé (hydr. Stud. I) Hagen (Wettertel.) Manojlovits (astr. Kal.) Hann u. Köppen (met. Zschr. IV.) Hamb. math. Ges. (Mitt. 5. 7. 8.) Canad. Inst. (Proc. IV.) Soc. M. de Fr. (Bull. XV.) Mansion u. Neuberg (Math. VII.) Bur. de Long. (Ann. 1888.)

Berichtigungen

im 4. Teile

Seite 434 Zeile 1 u. 3 v. ob. statt $\operatorname{tg}\beta+\frac{m^2}{n^2}$ setze $\operatorname{tg}\beta+\frac{m^2}{n^2}\operatorname{tg}^2\beta$

im 5. Teile

Seite 201 Zeile 15 u. 16 v. ob. der Satz: „Alle etc." ist zu streichen.

203	7	v. unt. statt wird u setze wird, da u
206	14	v. ob. „ $=a\{1+b+b^2+\ldots\}$ setze $\lim(1-b^n)x=\lim a\{1+b+b^2+\ldots b^{n-1}\}$
286	5	v. ob. statt oder: wo setze oder: 2) a wo
288	5	v. ob. „ der „ die Anzahl der
306	8	v. ob. „ $\lesseqgtr$ „ $\gtreqless$
309	5	v. ob. am 2ten, $u$ten Reihenterm fehlt der Factor x, resp. x^{u-1}
315	18	v. ob. statt a_5' setze a_5
	9	v. unt. „ a_2'' „ a_0''
317	2	v. ob. „ bedingen sich „ bedingt
	3	„ „ $\sigma<1$ und „ $\sigma>1$ dass
	4	„ „ $\tau>1$ und „ $\tau<1$ dass
318	7	„ „ a_{r-p_1} „ a'''_{r-p_1}
	8	„ „ a_{r-p_1} „ a'_{r-p_1}
	14	„ „ a_g' „ a_g
320	5	„ „ $p(z)$ „ $p\varphi(z)$
321	12	„ „ $r+3$ „ $r-3$
328	1	v. unt. „ $)^x$ „ $)^r$
329	3	v. ob. „ $f(x)^n f(c)^{n-1}$ „ $f^n(x)f^{n-1}(c)$

im 6. Teile

Seite 87	Zeile 4 v. ob.	n. folg. berichtigt Seite 219 Zeile 18 n. f.	
105	14 v. unt.	statt Abhandlung	setze Behandlung
106	3 v. ob.	„ c	„ $c =$
	13 „	„ $k-1$	„ $k=1$
	14 „	vor Gl. (6^a) schalte ein: deren zweite sich noch auf die Form bringen lässt:	
107	2 v. unt.	statt σ_{2pn}	setze $\sigma_{2pn}(z)$
108	1 v. ob.	„ $p-2$	„ $p-1$
	8 „	„ C	„ $C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$
	10 „	„ Σ_2	„ Σ_1
	15 „	„ Differentiation	setze Dissertation
109	3 „	„ $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	„ $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi$
	9 „	„ $2p-2$	„ $2p-1$
	8 v. unt.	„ $2m+4$	„ $2m+1$
	5 „	„ $2m$ (im Zähler)	„ 1
110	2 v. ob.	„ $\frac{2}{2\pi}$	„ $\frac{2\pi}{p}$
	2 v. unt.	„ $\frac{2p-1}{4}$	„ $\frac{2p-1}{4}\pi$
157	1 v. ob.	„ VIII	„ IX
306	2 „	vor zuvor	„ und
310	15 „	statt $\beta_2 = 2b_2$ und $-1 = -b_0$ setze $-\beta_2 = 1 = b_0$	
312	2 „	ist hinzuzufügen: Die Gl. (18) lehrt, dass für $\beta = 0$ (Anfang und Ende einer Gruppe) auch $\frac{\partial^2\beta}{\partial\xi^2} = 0$ ist, also $\frac{\partial\beta}{\partial\xi}$ sein Max. oder Min. erreicht.	
317	4 „	statt λ	setze λ^2
319	1 „	„ λ	„ 4
	7 v. unt.	„ $\sqrt{\lambda}$	„ λ

Digitized by Google

Seite 326	Zeile 5	v. unt.	statt	$\frac{8z+\pi^2}{8z}$	setze	$\frac{8z-\pi^2}{8z^2}$
328	8	„	„	0,1719	„	0,2719
347	1	v. ob.	„	0,0009	„	0,00009
349	8	„	„	$e^{\frac{1}{v^r}}$	„	$e^{-\frac{1}{v^r}}$

STANFORD LIBRARY

I.

Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks.

Von

W. Fuhrmann.

Vorbemerkung.

In neuester Zeit sind Mathematiker verschiedener Länder an Eigenschaften des Dreiecks gestossen, welche, obwol die Untersuchungen verschiedene Ausgangspunkte hatten, einen merkwürdigen Zusammenhang zeigten. Dieser Zusammenhang wurde durch einen merkwürdigen Punkt und einen merkwürdigen Winkel des Dreiecks hergestellt.

Während der Punkt die 3 Namen: der Grebe'sche Punkt, le point de Lemoine, the symmedian-point, erhalten hat, wird der Winkel wol allgemein nach dem Vorschlage der Miss C. A. Scott (Educational Times) als der Brocard'sche Winkel bezeichnet. Unzweifelhaft gebührt Brocard das Verdienst, die genauern Untersuchungen, die sich auf diesen Winkel beziehen, angeregt zu haben, doch ist der Winkel schon von van Swinden (Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden c. 1816) angeführt. Derselbe hat nicht nur die Relationen

$$\cot\vartheta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$$

und

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}$$

angegeben, sondern auch die Punkte, welche mit diesem Winkel in innigem Zusammenhange stehen und die als Brocard'sche Punkte

bezeichnet werden. Ebenso giebt Desboves in seinem Werke: Questions de trigonométrie rectiligne die Grundrelationen an. Die Untersuchungen dagegen über den Kreis, der durch diese Punkte und den vorher angegebenen Grebe'schen Punkt geht, rühren von Brocard her, weshalb dieser Kreis mit Recht als der Brocard'sche bezeichnet wird.

Nachdem Brocard schon 1880 in der Zeitschrift von J. C. V. Hoffmann für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht einige merkwürdige Eigenschaften dieses Kreises angegeben hatte, veröffentlichte er eine darauf bezügliche Abhandlung: Etude d'un nouveau cercle du plan du triangle (Association française pour l'avencement des sciences; Congrès d'Alger 1881). Andere Abhandlungen, die mehr oder weniger mit den Punkten dieses Kreises zusammenhangen, sind: Programmabhandlung von Kiehl in Bromberg: Zur Theorie der Transversalen. 1881. Programmabhandlung von Artzt in Recklinghausen: Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks etc. 1884. R. Tucker in London: the triplicate ratio-circle im Quarterly journal of mathematics. 1883. Denselben folgten andere von Brocard und R Tucker. Der letztere veröffentlichte dieselben in den proceedings of the London mathematical society, während Brocard seine Hauptabhandlung noch in der Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Rouen und eine andere im journal de mathématiques spéciales erschienen liess. Kleinere Sachen machte er noch in der genannten Zeitschrift von J. C. V. Hoffmann bekannt. In derselben Zeitschrift veröffentlichten noch mehrere andere Männer in Gestalt von Aufgaben geometrische Lehrsätze, welche sich an den Brocard'schen Kreis anschlossen. Es waren dies ausser den schon genannten Brocard, Artzt und Kiehl noch besonders Stoll in Bensheim, dann Böklen in Reutlingen, Dewulf, G. Tarry in Algier, Neuberg in Lüttich und der unterzeichnete Verfasser, wobei an der Lösung sich noch andere Männer (Stegemann in Prenzlau, Emmerich in Mühlheim a. R., Godt in Lübeck, Capelle in Oberhausen) beteiligten. Kleinere Sachen wurden noch in den nouvelles annales de mathématiques von Lemoine und Maurice d'Ocagne angegeben; dieselben bezogen sich besonders auf den Grebe'schen Punkt. Endlich ist noch eine Arbeit von Neuberg hervorzuheben, welche mir leider nicht zugänglich war. Nachdem derselbe in der belgischen Zeitschrift Mathesis mehrere Untersuchungen über diesen Gegenstand veröffentlicht hatte, schrieb er in einer Zeitschrift, welche von der königl. belgischen Akademih herausgegeben wird, eine Abhandlung: Mémoire sur le tétraèdre. Ich habe nur ersehen können, dass der Grebe'sche und die Brocard'schen Punkte hier eine grosse Rolle spielen.

Digitized by Google

Ohne behaupten zu wollen, dass alle Publicationen, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, genannt sind, dürften doch die wesentlichsten genannt sein, und diese Angaben dürften die Mittel angeben, um diejenigen Werke ausfindig zu machen, welche weitere Untersuchungen darüber enthalten, so dass ich hoffen könnte, dass die angegebene Uebersicht keine ganz überflüssige Arbeit ist.

Diese Untersuchungen bieten besonders der elementaren Mathematik interessante Resultate, so dass ich glaube, dass die Sammlung derselben auch in weiterem Kreise Interesse einflössen wird. Da die Ableitung der Resultate auf elementar trigonometrischem Wege die leichteste ist, so schien es mir am vorteilhaftesten, die Eigenschaften, die sich auf den Brocard'schen Winkel beziehen, zunächst einheitlich zusammenzustellen. Das Thema erhält dadurch eine angemessene Beschränkung und führt am leichtesten in die weiter gehenden Eigenschaften ein.

Der Uebersicht halber teile ich die Eigenschaften in 2 Teile. Der erste bezieht sich auf symmetrische Relationen zwischen den Winkeln des Dreiecks und dem Brocard'schen Winkel. Der 2te giebt Längen und Grössen des Dreiecks, die sich durch diesen Winkel ausdrücken lassen, sowie einige sich daran anschliessende Eigenschaften, also immer nur solche, welche mit dem Winkel in Verbindung stehen.

A. Relationen zwischen den Winkeln des Dreiecks und dem Brocard'schen Winkel.

Erklärung. Das Dreieck werde mit ABC (Fig. 1.) bezeichnet, die Winkel mit α, β, γ; die Seiten entsprechend mit a, b, c. Fällt man von einem Punkte P das Lot auf eine Seite a, so heisst der Fusspunkt P_a, analog ist die Bedeutung P_b, P_c. Der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises ist H, so dass die Mittelpunkte der Seiten H_a, H_b, H_c sind. Liegen mehrere Punkte auf dem Lote, so erhält der einfachste und bekannteste den Vorzug. Der Höhenschnittpunkt sei H', doch bezeichnen wir die Fusspunkte der Höhen mit A_a, B_b, C_c. Der Schwerpunkt sei G, und G' der Grebe'sche Punkt. Bildet eine Ecktransversale mit einer Seite einen Winkel φ, so bezeichnen wir die durch dieselbe Ecke gehende Transversale, welche mit der andern Seite den Winkel φ bildet, als Gegentransversale, so dass also diese Transversalen dieselbe Winkelhalbirungslinie als die Dreieckswinkel haben. Schneiden sich 3 Ecktransversalen in einem Punkte, so bekanntlich auch die Gegentransversale. Diese so von einander abhängigen Punkte nennen wir Gegenpunkte in Bezug auf das Dreieck. Dass H und H' solche Punkte

sind, ist bekannt, ebenso wol ist es auch von G und G' bekannt. Erklärt man den Grebe'schen Punkt auch als den Gegenpunkt des Schwerpunkts, so kann man daraus die Eigenschaft ableiten, dass die durch ihn gehenden Ecktransversalen durch die Pole der Gegenseiten in Bezug auf den umgeschriebenen Kreis gehen, und dass sie die Gegenseiten nach dem Verhältniss der Quadrate der anliegenden Seiten teilen. Der Inhalt des Dreiecks wird mit Δ bezeichnet.

1. Bestimmt man einen Winkel ϑ derartig, dass die Relation stattfindet:

$$\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)=\sin^3\vartheta$$

und trägt diesen Winkel fortlaufend in den Ecken an den Seiten nach innen an, so werden sich diese Geraden in einem Punkte schneiden. Solcher Punkte giebt es 2, da man an jeder Ecke den Winkel an 2 Seiten antragen kann. Diese Schnittpunkte der entsprechenden Transversalen werden die Brocard'schen Punkte genannt, sie sollen mit O und O' bezeichnet werden. Die Punkte sind offenbar Gegenpunkte, denn es ist:

$$OAB=OBC=OCA=O'AC=O'BA=O'CB=\vartheta.$$

2. Aus der Relation in 1. folgt leicht:

$$\cot\vartheta=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

Bew. Indem man die Sätze anwendet, welche ein Product von 2 Functionen Sinus oder Cosinus in eine Summe oder Differenz verwandeln, erhält man:

$$4\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)=\sin(2\alpha+\vartheta)+\sin(2\beta+\vartheta)$$
$$+\sin(2\gamma+\vartheta)-\sin 3\vartheta$$

Die Gleichung in 1. lautet also:

$$\sin(2\alpha+\vartheta)+\sin(2\beta+\vartheta)+\sin(2\gamma+\vartheta)-\sin 3\vartheta=4\sin^3\vartheta$$

Entwickelt man die einzelnen Glieder links und benutzt die Formel

$$\sin 3\vartheta=3\sin\vartheta-4\sin^3\vartheta$$

so folgt:

$$(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)\cos\vartheta+(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)\sin\vartheta-3\sin\vartheta=0$$

oder

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\vartheta-2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\sin\vartheta=0$$

also

$$\cot\vartheta = \frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma}$$

Es ist ferner:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

ist also

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^0$$

so folgt:

$$1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

also:

$$\frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$$

Ferner

$$\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{a^2+b^2+c^2}{8r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

3. Aus 2. folgt:

$$\cot\vartheta - \cot\alpha = \cot\beta + \cot\gamma$$

also

$$\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha\sin\vartheta} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

oder

$$\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin^3\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

ebenso

$$\frac{\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{\sin^2\beta}{\sin\gamma\sin\alpha} = \frac{\sin^3\beta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\frac{\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

Es ist also:

$$\sin(\alpha-\vartheta):\sin(\beta-\vartheta):\sin(\gamma-\vartheta) = \sin^3\alpha:\sin^3\beta:\sin^3\gamma$$

4. Erhebt man die Gleichnng:

$$\cot\vartheta = \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$$

in's Quadrat nud addirt 1, so findet man:

$$1+\cot^2\vartheta = \cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma+3$$

da

$$\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta = 1$$

ist; also auch:

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}$$

5. Auch durch die halben Winkel lässt sich $\cot\vartheta$ elegant ausdrücken. Es ist

$$4\cot\vartheta = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$$

Bew. 1. Es ist

$$2\cot\varphi = \cot\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

also

$$4(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) = \cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} + \left(\cot\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) + \left(\cot\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) + \left(\cot\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$$

Ferner

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

also

$$4(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) = \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\beta}{2}.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

Bew. 2.

$$4 + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) + (1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) + (1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1-\cos\gamma) + (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1+\cos\gamma)$$

Dividirt man durch $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, so erhält man die Formel

$$6.\quad \cot\vartheta = \begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^3\beta & \sin^3\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^3\beta & \sin^3\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Bew. Die erste Determinante kann dargestellt werden durch $\Sigma \sin^3\alpha\cos\beta - \sin^3\beta\cos\alpha$, die 2te durch $\Sigma\sin^3\alpha\sin\beta - \sin^3\beta\sin\alpha$, wo das Zeichen Σ bedeuten soll, dass die andern Glieder dadurch gebildet werden, indem β für α, γ für β, α für γ gesetzt und so fortgeschritten wird, bis man zum ersten Gliede zurückkehrt.

Es ist nun

Digitized by Google

$$\sin^3\alpha\cos\beta - \sin^3\beta\cos\alpha = \sin\alpha\cos\beta(1-\cos^2\alpha) - \sin\beta\cos\alpha(1-\cos^2\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta)$$
$$= \sin(\alpha-\beta)\{1-\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\}$$
$$= \sin(\alpha-\beta)(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

$$\sin^3\alpha\sin\beta - \sin^3\beta\sin\alpha = \sin\alpha\sin\beta(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)$$
$$= \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$= \sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

also
$$\frac{\sin^3\alpha\cos\beta - \sin^3\beta\cos\alpha}{\sin^3\alpha\sin\beta - \sin^3\beta\sin\alpha} = \frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \cot\vartheta$$

Da, wenn
$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}, \quad \text{auch} \quad \frac{x+y+z}{x_1+y_1+z_1} = \frac{x}{x_1}$$
ist, so folgt daraus der Satz.

7. Wir wollen einführen:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \varkappa^2,$$
$$\sin^2\beta\sin^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \lambda^2$$
$$\sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma = \mu$$

Dann folgt aus der Gleichung in 4.

$$\sin^2\vartheta = \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad \sin\vartheta = \frac{\mu}{\lambda}$$

so dass ϑ stets spitz ist. Also

$$\cos\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\varkappa^2}{2\mu} = \frac{\varkappa^2}{2\lambda}$$

und
$$\varkappa^2 = 2\lambda\cos\vartheta = 2\mu\cot\vartheta$$

Da auch
$$\cos^2\vartheta = \frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}$$

ist, so folgt noch
$$4\lambda^2 - 4\mu^2 = \varkappa^4$$

also
$$\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma = 2\lambda^2 - 4\mu^2 = 2(\lambda^2 - 2\mu^2)$$

8. Aus den Formeln in 7. folgt noch leicht

$$\sin 2\vartheta = \frac{\varkappa^2\mu}{\lambda^2}$$

$$\cos 2\vartheta = \frac{\lambda^2 - 2\mu^2}{\lambda^2}$$

also

$$\cot 2\vartheta = \frac{\lambda^2 - 2\mu^2}{\varkappa^2 \mu} = \frac{\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma}{2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}$$

9. $$\Sigma \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \vartheta)} = \frac{\mu}{\sin^2\vartheta}$$

Bew. $$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - 2\vartheta)} = \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha \sin\vartheta} = \frac{\mu}{\sin\vartheta} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

also

$$\Sigma \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \vartheta)} = \frac{\mu}{\sin\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} \right\} = \frac{\mu}{\sin^3\vartheta}$$

10. $$\Sigma \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha} = 2\cos\vartheta$$

Bew. $$\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha} = \cos\vartheta - \cot\alpha \sin\vartheta$$

also

$$\Sigma \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha} = 3\cos\vartheta - \cot\vartheta \sin\vartheta = 2\cos\vartheta$$

11. $$\Sigma \sin\alpha \sin(\alpha - \vartheta) = \frac{2\mu \cos 2\vartheta}{\sin\vartheta}$$

Bew. $$\sin\alpha \sin(\alpha - \vartheta) = \sin^2\alpha \cos\vartheta - \sin\alpha \cos\alpha \sin\vartheta$$

also

$$\begin{aligned} \Sigma \sin\alpha \sin(\alpha - \vartheta) &= \varkappa^2 \cos\vartheta - \frac{\sin\vartheta}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \\ &= \varkappa^2 \cos\vartheta - 2\mu \sin\vartheta \\ &= 2\mu \cot\vartheta \cos\vartheta - 2\mu \sin\vartheta \\ &= \frac{2\mu \cos 2\vartheta}{\sin\vartheta} \end{aligned}$$

12. $$\Sigma \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \vartheta)} = \frac{\lambda(1 + 4\cos^2\vartheta)}{\varkappa^2 - \sin^2\vartheta}$$

Bew. $$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\sin\alpha} &= \cos\vartheta + \cot\alpha \sin\vartheta = \frac{\varkappa^2}{2\lambda} + \frac{2\mu}{2\lambda} \cot\alpha \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma}{2\lambda} \\ &= \frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}{\lambda} \end{aligned}$$

da

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta \sin\gamma \cos\alpha \quad \text{ist.}$$

Somit

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\vartheta)} = \frac{\lambda}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$$

und

$$\Sigma\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\vartheta)} = \frac{\lambda(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+3\lambda^2)}{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)(\sin^2\gamma+\sin^2\alpha)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)}$$

$$= \frac{\lambda\{3\lambda^2+2(\lambda^2-2\mu^2)\}}{\varkappa^2\lambda^2-\mu^2}$$

$$= \frac{\lambda^2(3+2\cos 2\vartheta)}{\lambda^2(\varkappa^2-\sin^2\vartheta)} = \frac{\lambda(1+4\cos^2\vartheta)}{\varkappa^2-\sin^2\vartheta}$$

13. $\Sigma\frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} = 4\cos\vartheta$

14. $\Sigma\sin\alpha\sin(\alpha+\vartheta) = \frac{2\mu}{\sin\vartheta}$

Bew. $\sin\alpha\sin(\alpha+\vartheta) = \sin^2\alpha\cos\vartheta+\sin\alpha\cos\alpha\sin\vartheta$

also

$$\Sigma\sin\alpha\sin(\alpha+\vartheta) = \varkappa^2\cos\vartheta+2\mu\sin\vartheta$$

$$= 2\mu\cot\vartheta\cos\vartheta+2\mu\sin\vartheta = \frac{2\mu}{\sin\vartheta}$$

15. $\Sigma\frac{\cos(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} = \frac{1+2\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}$

Bew. $\frac{\cos(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} = \cot\alpha\cos\vartheta+\sin\vartheta$

also

$$\Sigma\frac{\cos(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} = \cot\vartheta\cos\vartheta+3\sin\vartheta = \frac{1+2\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}$$

16. $\Sigma\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} = \frac{2\cos 3\vartheta}{\sin 2\vartheta}$

Bew. $\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} = \cot\alpha\cos\vartheta-\sin\vartheta$

also

$$\Sigma\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} = \cot\vartheta\cos\vartheta-3\sin\vartheta = \frac{\cos^2\vartheta-3\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$= \frac{2\cos\vartheta(\cos^2\vartheta-3\sin^2\vartheta)}{\sin 2\vartheta}$$

Ebenso abzuleiten ist:

17. $\Sigma\sin\alpha\cos(\alpha-\vartheta) = 4\mu\cos\vartheta$

18. $\Sigma\sin\alpha\cos(\alpha+\vartheta) = 0$

19. $\Sigma\cos\alpha\cos(\alpha-\vartheta)=3\cos\vartheta-\frac{2\mu\cos2\vartheta}{\sin\vartheta}$

20. $\Sigma\cos\alpha\cos(\alpha+\vartheta)=3\cos\vartheta-\frac{2\mu}{\sin\vartheta}$

Ist h eine positive oder negative ganze Zahl, so folgt ebenso

21. $\Sigma\frac{\sin(\alpha+h\vartheta)}{\sin\alpha}=2\cos h\vartheta+\frac{\sin(h+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$

z. B.

$$\Sigma\frac{\sin(\alpha+2\vartheta)}{\sin\alpha}=2\cos2\vartheta+\frac{\sin3\vartheta}{\sin\vartheta}=1+4\cos2\vartheta$$

$$\Sigma\frac{\sin(\alpha-2\vartheta)}{\sin\alpha}=2\cos2\vartheta-1=\frac{\cos3\vartheta}{\cos\vartheta}$$

22. $\Sigma\frac{\cos(\alpha+h\vartheta)}{\sin\alpha}=\frac{\cos(h+1)\vartheta}{\sin\vartheta}-2\sin h\vartheta$

23. $\Sigma\frac{\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma}=1$

Bew. $\frac{\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma}$

$$=\cos^2\vartheta+\cot\beta\cot\gamma\sin^2\vartheta-\frac{\sin^2\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

also

$$\Sigma\frac{\sin(\beta-\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma}=3\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta-2\cot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta=1$$

24. $\Sigma\frac{\sin(\beta+\vartheta)\sin(\gamma+\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma}$

$$=3\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta+2\cot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta=1+4\cos^2\vartheta$$

25. $\Sigma\frac{\cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma}=3$

26. $\Sigma\frac{\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{\sin\beta\sin\gamma}=-\frac{\cos3\vartheta}{\cos\vartheta}$

Diese Beweise sind ganz analog den vorigen.

27. $\Sigma\cos\alpha\cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta)=3\cos\vartheta(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\vartheta+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\vartheta)$

Bew. $\cos\alpha\cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2\vartheta+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^2\vartheta+\cos\alpha\sin\alpha\cos\vartheta\sin\vartheta$

Es ist aber

$$\Sigma \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma = 1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \mu \cot\vartheta$$

also

$$\Sigma \cos\alpha \cos(\beta - \vartheta)\cos(\gamma - \vartheta) = 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2\vartheta + 3\mu\cos\vartheta\sin\vartheta$$

Es macht keine Schwierigkeiten, auf analoge Weise folgende Relationen zu beweisen.

28. $\Sigma \cos\alpha\cos(\beta + \vartheta)\cos(\gamma + \vartheta)$
$$= \cos\vartheta(3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\vartheta - \mu\sin\vartheta)$$

29. $$\Sigma \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta - \vartheta)\sin(\gamma - \vartheta)} = \frac{2\mu\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}$$

30. $$\Sigma \sin^2(\alpha - \vartheta) = 3\sin^2\vartheta + \frac{2\mu\cos 3\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\Sigma \cos^2(\alpha - \vartheta) = 3\cos^2\vartheta - \frac{2\mu\cos 3\vartheta}{\sin\vartheta}$$

31. $$\Sigma \sin^2(\alpha + \vartheta) = 3\sin^2\vartheta + 2\mu\cot\vartheta$$
$$\Sigma \cos^2(\alpha + \vartheta) = 3\cos^2\vartheta - 2\mu\cot\vartheta$$

32. $$\sin(\alpha + \vartheta)\sin(\beta + \vartheta)\sin(\gamma + \vartheta) = 2\mu\cos\vartheta - \sin^3\vartheta$$
$$= \sin\vartheta(\varkappa^2 - \sin^2\vartheta)$$

33. $$\cos(\alpha - \vartheta)\cos(\beta - \vartheta)\cos(\gamma - \vartheta) = \frac{\mu}{\sin\vartheta} - \cos^3\vartheta$$

34. $\cos(\alpha + \vartheta)\cos(\beta + \vartheta)\cos(\gamma + \vartheta)$
$$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^3\vartheta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^3\vartheta$$
$$= -\cos^3\vartheta + \frac{\mu}{\sin\vartheta}(\cos^4\vartheta - \sin^4\vartheta)$$
$$= + \frac{\mu\cos 2\vartheta}{\sin\vartheta} - \cos^3\vartheta$$

35. $$\Sigma \sin^3\alpha\sin(\alpha - \vartheta) = \frac{2\mu^2\cos 3\vartheta}{\sin^2\vartheta} + 3\mu\sin\vartheta$$

36. $$\Sigma \sin^3\alpha\sin(\alpha + \vartheta) = \frac{2\mu^2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} - 3\mu\sin\vartheta$$

Bew. $\sin^3\alpha\sin(\alpha - \vartheta) = \sin^4\alpha\cos\vartheta - \sin^3\alpha\cos\alpha\sin\vartheta$

also

$$\Sigma \sin^3\alpha\sin(\alpha - \vartheta) = \cos\vartheta(\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma)$$
$$- \sin\vartheta\,\Sigma\sin^3\alpha\cos\alpha$$

Es ist aber:

$$\sin^4\alpha+\sin^4\beta+\sin^4\gamma=2\mu\varkappa^2\cot 2\vartheta-4\mu^2\cot 2\vartheta\cot\vartheta;$$

$$-\sin^3\alpha\cos\alpha=\sin^3\alpha\cos(\beta+\gamma)=\sin^3\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin^3\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha$$

also

$$-\Sigma\sin^3\alpha\cos\alpha=\mu-2\mu\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\mu\varkappa^2$$
$$=3\mu-2\mu(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)-\mu\varkappa^2$$
$$=3\mu-2\mu\varkappa^2=3\mu-4\mu^2\cot\vartheta$$

Somit

$$\Sigma\sin^3\alpha\sin(\alpha-\vartheta)=4\mu^2(\cot 2\vartheta\cot\vartheta\cos\vartheta-\cos\vartheta)+3\mu\sin\vartheta$$
$$=\frac{4\mu^2\cos\vartheta}{\sin\vartheta\sin 2\vartheta}\{\cos 2\vartheta\cos\vartheta-\sin 2\vartheta\sin\vartheta\}+3\mu\sin\vartheta$$
$$=\frac{2\mu^2}{\sin^2\vartheta}\cos 3\vartheta+3\mu\sin\vartheta$$

Der folgende Satz bedarf znm Beweise nur einer kleinen Veränderung. Man erhält znnächst

$$\frac{4\mu^2\cos\vartheta}{\sin\vartheta\sin 2\vartheta}\{\cos 2\vartheta\cos\vartheta+\sin 2\vartheta\sin\vartheta\}-3\mu\sin\vartheta$$
$$=\frac{2\mu^2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}-3\mu\sin\vartheta$$

Leicht ergeben sich ferner noch folgende Relationen:

37. $$\Sigma\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\tfrac{1}{2}\Sigma\sin^2\alpha+\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,\Sigma\sin 2\alpha$$
$$=\mu\cot\vartheta+\sqrt{3}\mu=\frac{2\mu\cos\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

38. $$\Sigma\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\tfrac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{2\mu\sin\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

39. $$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\mu\sin\left(\vartheta+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\vartheta}-\tfrac{3}{8}\sqrt{3}$$

40. $$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{3}\right)=\tfrac{3}{8}\sqrt{3}-\frac{\mu\sin\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

41. $$\Sigma\sin\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\mu\sin\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

42. $$\Sigma \sin\alpha \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\mu \sin\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)}{\sin\vartheta}$$

43. $$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\mu\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\vartheta} - \frac{1}{8}$$

44. $$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\mu\cos\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right)}{\sin\vartheta} - \frac{1}{8}$$

45. Die Schwerlinien eines Dreiecks ABC seien t_a, t_b, t_c und die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten t_a, t_b, t_c sind, seien α_0, β_0, γ_0. Man findet dann:

$$a^2 = \tfrac{4}{9}(t_b^2 + t_c^2 + 2t_b t_c \cos\alpha_0)$$

es ist ferner:

$$4t_b t_c \sin\alpha_0 = 3bc\sin\alpha$$

also

$$9a^2 = 4(t_b^2 + t_c^2) + 6bc\cot\alpha_0 \sin\alpha$$

oder da

$$4t_b^2 + 4t_c^2 = 4a^2 + b^2 + c^2$$

und

$$bc\sin\alpha = 2\Delta$$

so ist

$$5a^2 = b^2 + c^2 + 12\Delta\cot\alpha_0$$

oder

$$6a^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 12\Delta\cot\alpha_0$$

Ferner

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$2a^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4\Delta\cot\alpha$$

$$= 4\Delta(\cot\vartheta - \cot\alpha)$$

also

$$6a^2 = 12\Delta(\cot\vartheta - \cot\alpha) = 4\Delta(\cot\vartheta + 3\cot\alpha_0)$$

und

$$3\cot\vartheta - 3\cot\alpha = \cot\vartheta + 3\cot\alpha_0$$

oder

$$2\cot\vartheta = 3(\cot\alpha + \cot\alpha_0)$$

ebenso

$$2\cot\vartheta = 3(\cot\beta + \cot\beta_0)$$

$$2\cot\vartheta = 3(\cot\gamma + \cot\gamma_0)$$

also

$$6\cot\vartheta = 3\cot\vartheta + 3(\cot\alpha_0 + \cot\beta_0 + \cot\gamma_0)$$

so dass auch

$$\cot\alpha_0 + \cot\beta_0 + \cot\gamma_0 = \cot\vartheta$$

Das Dreieck, dessen Seiten die Schwerlinien eines andern Dreiecks sind, hat mit diesem denselben Brocard'schen Winkel.

B. Bestimmung der Längen von Linien im Dreieck und damit zusammenhangende Eigenschaften des Dreiecks.

1. Aus Dreieck ABC folgt leicht

$$AO = \frac{c \sin(\beta - \vartheta)}{\sin\beta} = \frac{2r \sin\gamma \sin(\beta - \vartheta)}{\sin\beta}.$$

Mit Benutzung der Gleichungen in A. N. 3. findet man

$$AO = \frac{2r \sin\beta \sin\vartheta}{\sin\alpha}, \quad \text{ähnlich} \quad AO' = \frac{2r \sin\gamma \sin\vartheta}{\sin\alpha}$$

Ebenso

$$BO = \frac{2r \sin\gamma \sin\vartheta}{\sin\beta} \qquad BO' = \frac{2r \sin\alpha \sin\vartheta}{\sin\beta}$$

$$CO = \frac{2r \sin\alpha \sin\vartheta}{\sin\gamma} \qquad CO' = \frac{2r \sin\beta \sin\vartheta}{\sin\gamma}$$

Hieraus folgt noch:

$$BO . CO' = CO . AO' = AO . BO' = 4r^2 \sin^2\vartheta$$

$$AO . AO' = \frac{4r^2 \sin\beta \sin\gamma \sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha} = \frac{4r^2 \sin^3\vartheta}{\sin(\alpha - \vartheta)}$$

$$BO . BO' = \frac{4r^2 \sin^3\vartheta}{\sin(\beta - \vartheta)}$$

$$CO . CO' = \frac{4r^2 \sin^3\vartheta}{\sin(\gamma - \vartheta)}$$

$$AO . BO . CO = AO' . BO' . CO' = 8r^3 \sin^3\vartheta$$

$$AO . AO' \sin\alpha + BO . BO' \sin\beta + CO . CO' \sin\gamma = 4r^2\mu = 2\Delta$$

$$\frac{CO}{AO} = \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\vartheta}, \qquad \frac{BO'}{AO'} = \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin\vartheta},$$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{\sin(\beta - \vartheta)}{\sin\vartheta}, \qquad \frac{CO'}{BO'} = \frac{\sin(\beta - \vartheta)}{\sin\vartheta},$$

$$\frac{BO}{CO} = \frac{\sin(\gamma - \vartheta)}{\sin\vartheta}, \qquad \frac{AO'}{CO'} = \frac{\sin(\gamma - \vartheta)}{\sin\vartheta},$$

$$BO' . CO = 4r^2 \sin\vartheta \sin(\alpha - \vartheta),$$
$$CO' . AO = 4r^2 \sin\vartheta \sin(\beta - \vartheta),$$
$$AO' . BO = 4r^2 \sin\vartheta \sin(\gamma - \vartheta).$$

2. Aus dem Dreieck AOO' erhält man:

$$OO'^2 = \frac{4r^2 \sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha} (\sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 \sin\beta \sin\gamma \cos(\alpha - 2\vartheta))$$

setzt man

$$\cos(\alpha-2\vartheta) = \cos\alpha + 2\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)$$

so wird die Gleichung

$$OO'^2 = \frac{4r^2\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}(\sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - 4\sin\beta\sin\gamma\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta))$$

$$= \frac{4r^2\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}(\sin^2\alpha - 4\sin\beta\sin\gamma\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta))$$

$$= 4r^2\sin^2\vartheta\left(1 - \frac{4\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)\right)$$

$$= 4r^2\sin^2\vartheta(1-4\sin^2\vartheta)$$

3. Es mögen sich nun BO und CO' in A', CO und AO' in B', AO und BO' in C' schneiden, dann bezeichnet man $A'B'C'$ als das Brocard'sche Dreieck. Aus der Construction folgt:

$$\angle BOC = CO'A = 180^0 - \gamma, \quad COA = AO'B = 180^0 - \alpha$$
$$AOB = BO'C = 180^0 - \beta$$

Wir nehmen der präcisen Vorstellung halber ein spitzwinkliges Dreieck $\alpha > \beta > 60^0 > \gamma$ an).

Dann ist $B'OA' = B'O'A' = \gamma$, also liegen $A'B'OO'$ auf einem Kreise, von dem sich ebenso beweisen lässt, dass er durch C' geht.

Der durch $A'B'C'$ bestimmte Kreis, welcher als Brocard'scher bezeichnet wird, geht also durch die Punkte O und O'. Da die Winkel des Dreiecks α, β, γ sind, so ist es ABC ähnlich. Ferner weil HC' senkr. auf AB und HA' senkr. auf BC, $A'HC' = A'B'C' = \beta$, also geht derselbe Kreis auch durch H.

4. $HA'O = 90^0 - \vartheta$, ebenso $HB'O' = 90^0 - \vartheta$, da über HO und HO' gleiche Winkel im Kreise von Brocard gespannt sind, so ist $HO = HO'$. Auch ist $OHO' = 2\vartheta$.

Dies lässt sich auch durch directe Berechnung finden. Aus AHO findet man:

$$HO^2 = AO^2 + r^2 - 2r\,AO\cos(HAO)$$
$$\angle HAO = \alpha - \vartheta - 90^0 + \beta = 90^0 - \gamma - \vartheta$$

also

$$HO^2 = \frac{4r^2\sin^2\beta\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha} + r^2 - \frac{4r^2\sin\beta\sin\vartheta\sin(\gamma+\vartheta)}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{r^2}{\sin^2\alpha}\{4\sin^2\beta\sin^2\vartheta + \sin^2\alpha - 4\sin\beta\sin\alpha\sin\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$- 4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sin^2\vartheta\}$$

Setzt man nun:

$$\sin\alpha\cos\gamma = \sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma$$

so wird

$$HO^2 = \frac{r^2}{\sin^2\alpha}\{\sin^2\alpha - 4\sin\beta\sin\gamma\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)\}$$

$$= r^2(1-4\sin^2\vartheta)$$

Berechnet man HO' ebenso, so findet sich:

$$HO'^2 = r^2(1-4\sin^2\vartheta)$$

5. Die Ecktransversalen, welche die Gegenseiten nach dem Verhältniss der Quadrate der anstossenden Seiten teilen, sind zugleich Gegentransversalen der Schwerlinien und schneiden sich im Grebe'schen Punkte G'. Wir bezeichnen diese Ecktransversalen mit AG_α' BG_β', CG_γ'. Denkt man sich nun Dreieck $AG_\alpha'C$ durch BG_β' geschnitten und wendet den Satz des Menelaus an, so folgt:

$$G'G_\alpha' : AG_\alpha' = a^2 : (a^2+b^2+c^2)$$

also

$$AG' : AG_\alpha' = (b^2+c^2) : (a^2+b^2+c^2)$$

Daraus folgt:

$$ABG' : ABG_\alpha' = (b^2+c^2) : (a^2+b^2+c^2)$$

ferner

$$ABG_\alpha' : ABC = c^2 : (b^2+c^2)$$

also

$$ABG' : ABC = c^2 : (a^2+b^2+c^2)$$

und

$$ABG' = \frac{c^2\Delta}{a^2+b^2+c^2} = \frac{c^2}{4}\operatorname{tg}\vartheta$$

Ferner ist auch:

$$ABG' = \frac{c . G'G_c'}{2}$$

also

$$2c . G'G_c' = c^2\operatorname{tg}\vartheta$$

oder

$$G'G_c' = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\vartheta = r\sin\gamma\operatorname{tg}\vartheta$$

ebenso:

$$G'G_a' = r\sin\alpha\operatorname{tg}\vartheta,$$

$$G'G_b' = r\sin\beta\operatorname{tg}\vartheta$$

Es folgt aber aus $BA'H_c$ sofort:

$$A'H_c = r\sin\alpha\operatorname{tg}\vartheta,$$

ebenso

$$B'H_b = r\sin\beta\operatorname{tg}\vartheta$$

$$C'H_c = r\sin\gamma\operatorname{tg}\vartheta$$

Daraus folgt: Zieht man durch die Ecken A', B', C' des Brocard'schen Dreiecks die Parallelen zu den entsprechenden Seiten des ursprünglichen Dreiecks, so schneiden sich dieselben im Grebe'schen Punkte G'.

6. Nach Nr. 5. ist $\angle HA'G'$ ein rechter Winkel, also geht der über HG' als Durchmesser beschriebene Kreis durch A'; ebenso geht er durch B' und durch C', und dieser Kreis ist also der Brocard'sche, von dem wir jetzt 7 Punkte haben. Da HG' ein Durchmesser ist, und H von O und O' gleich weit entfernt ist, so auch G'. Ist dann S der Mittelpunkt von OO', so liegen also HSG' auf einer Geraden. Es ist ferner, da

$$\angle OHO' = 2\vartheta,$$

also

$$OHS = \vartheta \quad \text{ist,}$$

$$HS = HO\cos\vartheta = r\cos\vartheta\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}$$

$$G'O = HO\,\mathrm{tg}\,\vartheta = r\,\mathrm{tg}\,\vartheta\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}$$

$$G'S = G'O\sin\vartheta = r\,\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}$$

$$HG' = r\left(\cos\vartheta+\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\right)\sqrt{1-4\sin^2\vartheta} = \frac{r\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}{\cos\vartheta}$$

$$= r\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}^2\vartheta}$$

also erhält man für den Radius r_b des Brocard'schen Kreises

$$r_b = \frac{r}{2}\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}^2\vartheta}$$

7. Man fälle von A' die Lote auf die Seiten, nämlich $A'H_a$, $A'A_b'$, $A'A_c'$; dann ist:

$$A'H_a : A'A_b' = \sin\vartheta : \sin(\gamma-\vartheta),$$

ebenso

$$A'H_a : A'A_c' = \sin\vartheta : \sin(\beta-\vartheta)$$

also

$$A'A_b' : A'A_c = \sin(\gamma-\vartheta) : \sin(\beta-\vartheta) = \frac{1}{\sin(\beta-\vartheta)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\vartheta)}$$

$$= \frac{1}{\sin^3\beta} : \frac{1}{\sin^3\gamma},$$

Es teilt also AA' den Winkel α so, dass sich die Sinus der Teile umgekehrt wie die Kuben der anstossenden Seiten verhalten. Analog werden BB' und CC' die Winkel β und γ teilen, so dass sich AA', BB', CC' in einem Punkte D schneiden, dessen Entfernungen von

den Seiten sich umgekehrt wie die Kuben derselben verhalten. Wir schreiben dies Resultat in der Form:

$$DD_a : DD_b : DD_c = \frac{1}{\sin^3\alpha} : \frac{1}{\sin^3\beta} : \frac{1}{\sin^3\gamma}$$
$$= \frac{1}{\sin(\alpha-\vartheta)} : \frac{1}{\sin(\beta-\vartheta)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\vartheta)}$$

Hieraus lassen sich diese Längen leicht berechnen. Es ist nämlich

$$a\,DD_a + b\,DD_b + c\,DD_c = 2\varDelta$$

also:

$$2rX\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\vartheta)} + \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\vartheta)} + \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\vartheta)}\right) = 4r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

wo X noch ein unbestimmter Factor ist, es ist aber

$$\Sigma\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\vartheta)} = \frac{\mu}{\sin^3\vartheta}$$

also

$$\frac{X\mu}{\sin^3\vartheta} = 2r\mu$$

somit

$$X = 2r\sin^3\vartheta$$

also

$$DD_a = \frac{2r\sin^3\vartheta}{(\sin(\alpha-\vartheta)},\quad DD_b = \frac{2r\sin^3\vartheta}{\sin(\beta-\vartheta)},\quad DD_c = \frac{2r\sin^3\vartheta}{\sin(\gamma-\vartheta)}$$

8. Es schneide AD die Seite a in D_α, BD die Seite b in D_β, CD die Seite C in D_γ. Es ist dann

$$\text{Dreieck } ABD_a : AD_aC = BD_a : D_aC$$

ferner auch

$$ABD_a : AD_aC = c\sin(BAD) : b\sin(DAC)$$
$$= \frac{c}{c^3} : \frac{b}{b^3} = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{b^2}$$

also

$$BD_a : D_aC = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{b^2}$$

D_a teilt also BC nach dem umgekehrten Verhältniss der Quadrate der anstossenden Seiten, während G_a' dieselbe Seite nach dem Verhältniss der Quadrate teilt; daher ist

$$BG_a' = D_aC,\qquad G_a'C = BD_a$$

also

$$G_a'D_a = a - \frac{ac^2}{b^2+c^2} - \frac{ac^2}{b^2+c^2} = a\,\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} = a\,\frac{\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$$

Es verhält sich ferner:

$$G'A' : G_a'D_a = (b^2+c^2) : (a^2+b^2+c^2)$$

also

$$G'A' = \frac{a(b^2-c^2)}{b^2+c^2} \cdot \frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a(b^2-c^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2r\sin^2\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{r\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha\cos\vartheta}$$

Analog:

$$G'B' = \frac{r\sin(\beta-\vartheta)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\beta\cos\vartheta}$$

$$G'C' = \frac{r\sin(\gamma-\vartheta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma\sin\vartheta}$$

9. Berechnungen von $AD_a = \tau_a$, $BD_\beta = \tau_b$, $CD_\gamma = \tau_c$.

Da $D_aC = \frac{ac^2}{b^2+c^2}$ ist, so giebt das Dreieck AD_aC leicht:

$$\tau_a^2 = b^2 + \frac{a^2c^4}{(b^2+c^2)^2} - \frac{2abc^2\cos\gamma}{b^2+c^2}$$

$$= \frac{b^2(b^2+c^2)^2+a^2c^4-2abc^2(b^2+c^2)\cos\gamma}{(b^2+c^2)^2}$$

$$= \frac{b^6+2b^4c^2+b^2c^4+a^2c^4-2b^3ac^2\cos\gamma-2abc^4\cos\gamma}{(b^2+c^2)^2}$$

$$= \frac{b^6+2b^3c^2(b-a\cos\gamma)+c^4(b^2+a^2-2a\cos\gamma)}{(b^2+c^2)^2}$$

Es ist aber

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha,$$

$$b^2+a^2-2ab\cos\gamma = c^2$$

also erhalten wir:

$$\tau_a^2 = \frac{b^6+c^6+2b^3c^3\cos\alpha}{(b^2+c^2)^2}$$

$$= 4r^2\left\{\frac{\sin^6\beta+\sin^6\gamma+2\sin^3\beta\sin^3\gamma\cos\alpha}{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2}\right\}$$

Es ist ferner:

$$\sin^6\beta+\sin^6\gamma = (\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^3 - 3\sin^2\beta\sin^2\gamma(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$$

Nach Nr. 12. in A. ist

$$\sin^2\beta+\sin^2\gamma = \frac{\sin(\alpha+\vartheta)\lambda}{\sin\alpha} = \frac{\mu\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha\sin\vartheta}$$

also

Digitized by Google

$$\sin^6\beta + \sin^6\gamma = \frac{\sin^3\beta\sin^3\gamma\sin^3(\alpha+\vartheta)}{\sin^3\vartheta} - \frac{3\sin^3\beta\sin^3\gamma\sin\alpha+\vartheta)}{\sin\vartheta}$$

$$= \frac{\sin^3\beta\sin^3\gamma}{\sin^3\vartheta}\{\sin^3(\alpha+\vartheta) - 3\sin^2\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)\}$$

also

$$r_a^2 = \frac{4r^2\sin^3\beta\sin^3\alpha}{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2\sin^3\vartheta}\{\sin^3(\alpha+\vartheta) - 3\sin^2\vartheta\sin(\alpha+\vartheta) + 2\cos\alpha\sin^3\vartheta\}$$

$$= \frac{4r^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2(\alpha+\vartheta)\sin\vartheta}\{\sin^3(\alpha+\vartheta) - 3\sin^2\vartheta\sin(\alpha+\vartheta) + 2\cos\alpha\sin^3\vartheta\}$$

Es ist dann:

$$\sin^3(\alpha+\vartheta) - 3\sin^2\vartheta\sin(\alpha+\vartheta) + 2\cos\alpha\sin^3\vartheta = \sin(\alpha+\vartheta)\{\sin^2(\alpha+\vartheta) - \sin^2\vartheta\}$$
$$-2\sin^2\vartheta(\sin(\alpha+\vartheta) - \cos\alpha\sin\vartheta)$$

$$= \sin(\alpha+\vartheta)\sin\alpha\sin(\alpha+2\vartheta) - 2\sin^2\vartheta\sin\alpha\cos\vartheta$$

$$= \sin\alpha\{\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha+2\vartheta) - \sin\vartheta\sin 2\vartheta\}$$

$$= \sin^2\alpha\sin(\alpha+3\vartheta)$$

Dies giebt

$$r_a^2 = \frac{4r^2\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\vartheta\sin^2(\alpha+\vartheta)}\sin(\alpha+3\vartheta)$$

oder

$$\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\vartheta} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\vartheta)}$$

gesetzt,

$$r_a^2 = \frac{4r^2\sin^4\alpha\sin(\alpha+3\vartheta)}{\sin^2(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}$$

$$r_a = \frac{2r\sin^2\alpha\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}}{\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}$$

10. Um AD zu finden, betrachten wir Dreieck ACD_a, welches durch BD_β geschnitten wird. Wir finden

$$\frac{AD}{DD_a} = \frac{a^2b^2+a^2c^2}{b^2c^2}$$

also

$$\frac{AD}{AD_a} = \frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2} = \frac{\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{\lambda^2}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\sin(\alpha+\vartheta)\sin\beta\sin\gamma}{\lambda^2\sin\vartheta} = \frac{\sin^4\alpha\sin(\alpha+\vartheta)}{\lambda^2\sin(\alpha-\vartheta)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\vartheta)\sin\vartheta}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin^2\alpha}$$

also

ebenso

$$AD = 2r\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}$$

$$BD = 2r\sqrt{\sin(\beta+3\vartheta)\sin(\beta-\vartheta)}$$

$$CD = 2r\sqrt{\sin(\gamma+3\vartheta)\sin(\gamma-\vartheta)}$$

Wir merken endlich noch:

$$\frac{DD_a}{AD_a} = \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}$$

11. Indem wir die Flächeninhalte der Dreiecke ABD_a und $AA'D_a$ vergleichen, finden wir die Proportion:

$$AD_a : A'D_a = \frac{c\sin\beta}{BA'\sin\vartheta} = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{2\sin\alpha\sin\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)\operatorname{tg}\vartheta}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)}$$

also

$$\frac{AA'}{AD_a} = \frac{2\sin\alpha\cos\vartheta-\sin(\alpha-\vartheta)}{2\sin\alpha\cos\vartheta} = \frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{2\sin\alpha\cos\vartheta},$$

$$AA' = \frac{r\sin\alpha}{\cos\vartheta}\sqrt{\frac{\sin(\alpha+3\vartheta)}{\sin(\alpha-\vartheta)}} = \frac{r\sin\alpha\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}}{\cos\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}$$

und

$$\frac{AA'}{A'D_a} = \frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin(\alpha-\vartheta)}$$

Ferner ist

$$A'D = AD - AA' = r\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}\left\{2 - \frac{\sin\alpha}{\cos\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}\right\}$$

$$= \frac{r\sin(\alpha-2\vartheta)}{\cos\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}$$

12. Berechnung von DH.

Es ist $A'H = A'H_a - HH_a = r\sin\alpha\operatorname{tg}\vartheta - r\cos\alpha$

$$= -\frac{r\cos(\alpha+\vartheta)}{\cos\vartheta};$$

$$DH^2 = A'H^2 + A'D^2 - 2A'H\,.\,A'D\cos(A'H, A'D)$$

$$\cos(A'H, A'D) = \frac{AA_a}{AD_a} = \frac{2r\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}{2r\sin^2\alpha\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}}$$

$$= \frac{\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)}{\sqrt{\sin(\alpha+3\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)}}$$

also

$$DH^2 = \frac{r^2\cos^2(\alpha+\vartheta)}{\cos^2\vartheta} + \frac{r^2\sin^2(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+3\vartheta)}{\cos^2\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}$$
$$+ \frac{2r^2\cos(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-2\vartheta)\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)}{\cos^2\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}$$
$$= \frac{r^2}{\cos^2\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}\{\cos^2(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)+\sin^2(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+3\vartheta)$$
$$+2\cos(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha-2\vartheta)\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)\}$$

Nun ist

$$\sin^2(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+3\vartheta)+\sin(\alpha-2\vartheta)\sin\vartheta\sin(2\alpha+2\vartheta)$$
$$= \sin(\alpha-2\vartheta)\{\sin(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+3\vartheta)+\sin(2\alpha+2\vartheta)\sin\vartheta\}$$
$$= \sin(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha-\vartheta)\sin(\alpha+4\vartheta)$$

also

$$DH^2 = \frac{r^2}{\cos^2\vartheta}\{\cos^2(\alpha+\vartheta)+\sin(\alpha-2\vartheta)\sin(\alpha+4\vartheta)\}$$
$$= \frac{r^2}{2\cos^2\vartheta}\{1+\cos(2\alpha+2\vartheta)+\cos 6\vartheta-\cos(2\alpha+2\vartheta)\}$$
$$= \frac{r^2\cos^2 3\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$
$$DH = \frac{r\cos 3\vartheta}{\cos\vartheta} = r(1-4\sin^2\vartheta)$$

13. Es ist:

$$OO_a = BO\sin\vartheta = \frac{2r\sin\gamma\sin^2\vartheta}{\sin\beta},$$
$$O'O_a' = BO'\sin(\beta-\vartheta) = \frac{2r\sin\alpha\sin\vartheta\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\beta}$$

also

$$OO_a+O'O_a' = \frac{2r\sin\vartheta}{\sin\beta}\{\sin\gamma\sin\vartheta+\sin\alpha\sin\beta\cos\vartheta-\sin\alpha\cos\beta\sin\vartheta\}$$
$$= 2r\sin\vartheta\{\sin\alpha\cos\vartheta+\cos\alpha\sin\vartheta\}$$
$$= 2r\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)$$

somit erhalten wir für den Mittelpunkt S von OO':

$$SS_a = r\sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta),$$
$$SS_b = \sin\vartheta\sin(\beta+\vartheta),$$
$$SS_c = r\sin\vartheta\sin(\gamma+\vartheta)$$

$$SS_a : SS_b : SS_c = \sin(\alpha+\vartheta):\sin(\beta+\vartheta):\sin(\gamma+\vartheta)$$

Digitized by Google

14. Es ist

$$DD_a + 2SS_a = 2r\sin\vartheta\left\{\frac{\sin^2\vartheta}{\sin(\alpha-\vartheta)} + \sin(\alpha+\vartheta)\right\}$$
$$= \frac{2r\sin\vartheta\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\vartheta)} = 2r\sin\beta\sin\gamma = AA_a$$

Teilt man nun SD nach dem Verhältniss $1:2$ und fällt vom Teilpunkte das Lot auf a, so findet man für dasselbe

$$\frac{DD_a+2SS_a}{3} = \frac{2}{3}r\sin\beta\sin\gamma = \frac{AA_a}{3}$$

Ebenso

$$\frac{DD_b+2SS_b}{3} = \frac{BB_b}{3}$$

$$\frac{DD_c+2SS_c}{3} = \frac{CC_c}{3}$$

Dieser Punkt hat also von den Seiten dieselben Abstände als der Schwerpunkt G des Dreiecks. Somit ist der Schwerpunkt des Dreiecks auch der des Dreiecks DOO'.

15. Fällt man von C das Lot auf $A'B'$ und von A auf $B'C'$, so müssen diese Lote den Winkel β einschliessen, woraus leicht folgt, dass sie sich auf dem umschriebenen Kreise schneiden müssen. Auch folgt leicht, indem man von A auf $B'C'$ und von B auf $C'A'$ Lote fällt, dass sie sich ebenfalls auf dem Kreise schneiden müssen, und da der Punkt durch ein Lot und den Kreis bestimmt ist, so müssen also die Lote von A auf $B'C'$, von B auf $C'A'$, von C auf $A'B'$ sich in einem Punkte N des umgeschriebenen Kreises schneiden. Auch folgt leicht

$$\text{Wkl. } (AN_1,\ AB) = (A'H,\ A'B') = \omega$$

und hieraus, dass N in dem umgeschriebenen Kreise in Bezug auf die Ecken von ABC dieselbe Lage hat, als H im Brocard'schen Kreise in Bezug auf die Ecken des Brocard'schen Dreiecks $A'B'C'$ Daher ist

$$BN'\ B'H = 2:\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}$$

$$BN = \frac{2B'H}{\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}} = -\frac{2r\cos(\beta+\vartheta)}{\cos\vartheta\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\vartheta}} = -\frac{2r\cos(\beta+\vartheta)}{\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}$$

Dann ist:

$$NN_a = BN\sin(BN,BC) = BN\sin(\alpha+\omega)$$

Weil aber

$$(A'C',\ A'H) = \alpha+\omega$$

ist, so ist

$$HC' = 2r_b \sin(\alpha + \omega) = r\sqrt{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\vartheta}\,\sin(\alpha + \omega)$$

also

$$NN_a = \frac{BN.HC'}{r\sqrt{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\vartheta}} = -\frac{2r\cos(\beta + \vartheta)}{\sqrt{1 - 4\sin\vartheta}} \frac{r\cos(\gamma + \vartheta)}{r\sqrt{1 - 4\sin^2\vartheta}}$$

$$= -\frac{2r\cos(\beta + \vartheta)\cos(\gamma + \vartheta)}{1 - 4\sin^2\vartheta}$$

Verlängert man nun DH bis zum umgeschriebenen Kreise, so mag der Schnittpunkt mit dem Kreise mit P vorläufig bezeichnet werden. Da nach dem vorigen:

$$DH : HP = \cos 3\vartheta : \cos\vartheta$$

ist, so findet man:

$$PP_a = \frac{r\cos\alpha(\cos\vartheta + \cos 3\vartheta) - \dfrac{2r\sin^3\vartheta\cos\vartheta}{\sin(\alpha - \vartheta)}}{\cos 3\vartheta}$$

setzt man hier

$$\sin^3\vartheta = \sin(\alpha - \vartheta)\sin(\beta - \vartheta)\sin(\gamma - \vartheta),$$
$$\cos\vartheta + \cos 3\vartheta = 2\cos\vartheta\cos 2\vartheta$$

so wird

$$PP_a = \frac{2r\cos\vartheta}{\cos 3\vartheta}\{\cos\alpha\cos 2\vartheta - \sin(\beta - \vartheta)\sin(\gamma - \vartheta)\}$$

$$= -\frac{2r\cos\vartheta}{\cos 3\vartheta}\cos(\beta + \vartheta)\cos(\gamma + \vartheta)$$

$$= -\frac{2r\cos(\beta + \vartheta)\cos(\gamma + \vartheta)}{1 - 4\sin^2\vartheta} = NN_a$$

Daraus folgt, dass P der Punkt N ist. Es liegen also die Punkte DHN in einer Geraden.

Vom Punkte N bemerken wir noch Folgendes: Es ist

$$NN_a = -\frac{2r\cos(\beta + \vartheta)\cos(\gamma + \vartheta)}{1 - 4\sin^2\vartheta},$$

$$AN = -\frac{2r\cos(\alpha + \vartheta)}{\sqrt{1 - 4\sin^2\vartheta}}$$

also

$$AN.N_a = \frac{4r^2\cos(\alpha + \vartheta)\cos(\beta + \vartheta)(\cos(\gamma + \vartheta)}{\sqrt{1 - 4\sin^2\vartheta}^3}$$

so dass

$$'AN.NN_a = BN.NN_b = CN.NN_c \text{ ist.}$$

Bem. Bei unserer Annahme liegt A in dem Bogen, der zur Seite AC gehört. Man findet im allgemeinen:

$$NN_a : NN_b : NN_c = \frac{1}{\cos(\alpha+\vartheta)} : \frac{1}{\cos(\beta+\vartheta)} : \frac{1}{\cos(\gamma+\vartheta)}$$

so dass N in dem Bogen liegen wird, für welchen das Zeichen betreffenden Cosinus abweichend ist; denn offenbar muss ein Cosinus ein anders Zeichen als die andern haben. Es folgt dies aus

$$\Sigma \sin\alpha \cos(\alpha+\vartheta) = 0$$

16 Sowol HH' als SD wird durch G nach dem Verhältniss $1:2$ geteilt, also ist $SH \parallel DH'$, ausserdem

$$DH' = 2SH$$

Nun ist

$$SH = HO\cos\vartheta = HK\cos^2\vartheta$$

also

$$SH = r\cos^2\vartheta\sqrt{1-3\text{tg}^2\vartheta} = \cos\vartheta\sqrt{1-4\sin^2\vartheta},$$

$$DH' = 2r\cos\vartheta\sqrt{1-\sin^2\vartheta} = 2r\sqrt{\cos\vartheta\cos3\vartheta}$$

17. Sind 4 Ecktransversalen harmonisch. so müssen auch die Gegentransversalen harmonisch sein. Man denke sich nun den Spiegelpunkt A_s' von A' in Bezug auf a bestimmt, ziehe $A_s'C'$ und $A_s'B$ und betrachte $A_s'BC'$. Dasselbe ist dem Dreieck ABC ähnlich, weil es im Winkel β und dem Verhältniss der einschliessenden Seiten übereinstimmt. Da nun

$$BC' = \frac{c}{2\cos\vartheta}$$

ist, so also

$$A_s'C' = \frac{b}{2\cos\vartheta} = AB'$$

Ebenso ist

$$A_s'B' = AC'$$

also $AB'A_s'C'$ ein Parallelogramm, daher geht AA_s' durch den Mittelpunkt H_a' von $B'C'$.

Es ist ferner $AC'B' \backsim AOO'$ in umgekehrter Lage; in AOO' ist nun AS die Schwerlinie, also ist die Schwerlinie AH_a' in $AB'C'$ die Gegentransversale von AS in Dreieck AOO', und da AO und AO' in ABC Gegentransversalen sind, so ist die Linie AH_a' oder

AA_s' die Gegentransversale von AS in ABC. Bestimmt man nun B_s', C_s' analog wie A_s', so ergiebt sich, dass AA_s', BB_s', CC_s' sich in einem Punkte S' schneiden, welcher der Gegenpunkt von S ist.

Es sind nun AA', AH_a, AA_s', AH' 4 harmonische Strahlen, oder, was dasselbe sagt, AD, AG, AS', AH', also auch die Gegentransversalen derselben; nennen wir nun D' den Gegenpunkt von D, so sind also AD', AG', AS, AH 4 harmonische Strahlen. Von diesen liegen H, S, G' auf einer Geraden, also geht AD' durch den 4ten harmonischen Punkt von H, S, G'. Da wir für Ecktransversalen aus B und C dasselbe folgern können, so ist also der Gegenpunkt von D der 4te harmonische von HSG', conjugirt zu S. Da ferne OO' senkrecht zu HG' ist, so ist D' der Pol von OO' in Bezug auf den Brocard'schen Kreis.

18. ABC und $A'B'C'$ haben denselben Schwerpunkt. Wir beweisen dies leicht, wenn wir uns erinnern, dass 2 Dreiecke den selben Schwerpunkt haben, falls sie nur eine Schwerlinie mit Anfangs- und Endpunkt gemein haben.

Nun haben ABC und $AA'A_s'$ die Schwerlinie AH_a gemeinsam; $BA'A_s'$ und $A'B'C'$ haben aber die Schwerlinie $A'H_a'$ gemein, also hat ABC mit $AA'A_s'$ und dieses mit $A'B'C'$ denselben Schwerpunkt.

19. Es ist:

$$HS : SG' = HD' : G'D',$$
$$G'S = G'O \sin\vartheta = 2r_b \sin^2\vartheta$$
$$HS = HO \cos\vartheta = 2r_b \cos^2\vartheta$$

Setzt man nun $G'D' = x$, so heisst die Proportion:

$$\cos^2\vartheta : \sin^2\vartheta = 2r_b + x : x$$

also

$$x = \frac{2r_b \sin^2\vartheta}{\cos 2\vartheta}, \quad 2\tau_b + x = \frac{2r_b \cos^2\vartheta}{\cos 2\vartheta},$$

$$HD' = \frac{r\cos\vartheta}{\cos 2\vartheta}\sqrt{1 - 4\sin^2\vartheta}$$

Da nun:

$$DH' = 2r\cos\vartheta\sqrt{1 - 4\sin^2\vartheta}$$

so ist

$$DH' : HD' = 2\cos 2\vartheta : 1$$

Ferner:

$$NH : ND == 1 : \frac{\cos\vartheta + \cos 3\vartheta}{\cos\vartheta} = 1 : 2\cos 2\vartheta$$

also

$$NH : ND = HD' : DH'$$

Da die letzten Linien parallel sind, und NHD in einer Geraden liegen, so auch $ND'H'$.

20. Da D' Gegenpunkt von D ist, so folgt:

$$DD_a' : D'D_b' : D'D_c = \sin(\alpha - \vartheta) : \sin(\beta - \vartheta) : \sin(\gamma - \vartheta)$$

oder

$$D'D_a' = x\sin(\alpha - \vartheta),$$
$$D'D_b' = x\sin(\beta - \vartheta),$$
$$D'D_c' = x\sin(\gamma - \vartheta)$$

Ausserdem:

$$aD'D_a' + bB'D_b' + cD'D_c' = 2\varDelta$$

oder

$$xr\{\sin\alpha\sin(\alpha-\vartheta)+\sin\beta\sin(\beta-\vartheta)+\sin\gamma\sin(\gamma-\vartheta)\} = \varDelta = 2r^2\mu$$

oder nach A. N. 11.

$$x\,\frac{2\mu\cos2\vartheta}{\sin\vartheta} = 2r\mu$$

$$x = \frac{r\sin\vartheta}{\cos2\vartheta}$$

also:

$$D'D_a' = \frac{r\sin\vartheta\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos 2\vartheta}$$

$$D'D_b' = \frac{r\sin\vartheta\sin(\beta-\vartheta)}{\cos2\vartheta}$$

$$D'D_c' = \frac{r\sin\vartheta\sin(\gamma-\vartheta)}{\cos2\vartheta}$$

21. Man lege nun durch G' die Parallelen zu den Seiten, welche dieselben dann in $L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ treffen mögen. Um den Index festzustellen, halten wir die cyklische Reihenfolge der Seiten $abca$ ... fest; diejenige Seite, welche nach dieser Reihenfolge voran geht, erhält den Index 1. Es schneidet also die Parallele zu c die Seite a in L_1 und b in M_2, die Parallele zu a schneidet b in M_1 und c in N_2, die Parallele zu b schneidet c in N_1 und a in L_2.

Die Symmediane AG_a' wird durch die andere in G' so geschnitten, dass

$$G_a'G' : G_a'A = a^2 : (a^2+b^2+c^2)$$

ist, ebenso

$$G_\beta'G' : G_\beta'B = b^2 : (a^2+b^2+c^2),$$
$$G_\gamma'G' : G_\gamma'C = c^2 : (a^2+b^2+c^2)$$

Darans folgt:

$$BL_1 = \frac{ac^2}{a^2+b^2+c^2}, \quad CL_2 = \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2}, \quad L_1L_2 = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$BL_2 = \frac{a(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$BN_2 = \frac{a^2c}{a^2+b^2+c^2}, \quad AN_1 = \frac{b^2c}{a^2+b^2+c^2}, \quad N_1N_2 = \frac{c^3}{a^2+b^2+c^2},$$

$$BN_1 = \frac{c(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} \quad \text{etc.}$$

Es folgt darans:

$$BL_1 : BN_2 = c : a$$

ebenso:

$$BN_1 : BL_2 = c : a$$

also sind BL_1N_2 und BN_1L_2 ähnlich unter sich und dem Dreieck ABC. Durch L_1N_2, N_1L_2 lässt sich also ein Kreis legen, für welchen L_1N_2 und L_2N_1 antiparallel sind, daher

$$(L_1B, L_1N_2) = \alpha, \quad (N_2B, N_2L_1) = \gamma$$

Da

$$\frac{BL_1}{BA} = \frac{ac}{a^2+b^2+c^2}$$

so ist also

$$\frac{L_1N_2}{BA} = \frac{ab}{a^2+b^2+c^2}$$

oder

$$L_1N_2 = \frac{abc}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = r\operatorname{tg}\vartheta$$

Es ist also auch

$$M_1L_2 = N_1M_2 = r\operatorname{tg}\vartheta$$

Die Entfernungen der so bestimmten Punkte auf je 2 anstossenden Seiten sind gleich, wobei der Index 1 dem letzten Buchstaben nach der cyklischen Reihenfolge gehört.

Die Stücke auf den Seiten selbst verhalten sich wie die Kuben der Seiten. Es ist

$$L_1L_2 = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2} = 2r \cdot \frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos\vartheta},$$

$$M_1M_2 = \frac{b^3}{a^2+b^2+c^2} = 2r\frac{\sin^3\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\beta-\vartheta)}{\cos\vartheta},$$

$$N_1 N_2 = \frac{c^3}{a^2+b^2+c_2} = 2r\frac{\sin^3\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma} = \frac{r\sin(\gamma-\vartheta)}{\cos\vartheta}$$

22. $L_1 L_2 N_1 N_2$ liegen auf einem Kreise; da nun $L_1 M_2 \parallel AB$ und $L_1 M_2 = N_1 M_2$ ist, so liegen auch $L_1 N_2 N_1 M_2$ auf einem Kreise, der durch $L_1 N_2 N_1$ schon bestimmt ist. Derselbe Kreis muss auch durch $N_2 N_1 M_1 M_1$ gehen, so dass die 6 Punkte $L_1 L_2 M_1 M_2 N_1 N_2$ auf einem und demselben Kreise liegen, welcher von R. Tucker der triplicate-ratio-circle genannt wird (vielleicht mit Kreis der 3ten Potenz zu übersetzen). Er heisst jetzt der erste Kreis von Lemoine.

Daraus folgt noch sofort:

$$L_1 N_1 = M_2 N_2, \quad N_1 M_1 = N_2 L_2, \quad M_1 L_1 = L_2 M_2$$

dass also die Dreiecke $L_1 M_1 N_1$ und $L_2 M_2 N_2$ einander congruent sind. Es ist dabei

$$\text{Wkl. } N_1 M_1 L_1 = N_1 M_2 L_1 = M_2 N_1 A = \gamma$$

aus analogen Schlüssen folgt, dass die andern Winkel des Dreiecks $L_1 M_1 N_1$ β und α sind, so dass die Dreiecke dem Dreieck ABC ähnlich sind.

Es mögen sich ferner

$L_1 M_1$ und $L_2 N_2$ in A_4,
$M_1 N_1$ „ $L_2 M_2$ in B_4,
$N_1 L_1$ „ $M_2 N_2$ in C_4

schneiden, dann folgt aus dem, was oben von $L_1 L_2 M_1 M_2 N_1 N_2$ gesagt ist, dass die Dreiecke $A_4 L_1 L_2$, $B_4 M_1 M_2$, $C_4 N_1 N_2$ gleichschenklig sind, und dass die Winkel an den Grundlinien immer dieselben sein müssen, da sie als Peripheriewinkel auf denselben Bogen stehen, z. B.

$$\text{Wkl. } L_2 L_1 M_1 = L_2 M_2 M_1$$

23. $L_1 M_2$ geht durch G', also auch durch C'. Nun ist

$$G'C' = \frac{c(a^2-b^2)}{a^2+b^2+c^2} \quad G'L' = BN_2 = \frac{a^2c}{a^2+b^2+c^2}$$

also

$$L_1 C' = \frac{b^2 c}{a^2+b^2+c^2} = AN_1$$

Da ferner $AN_1 \parallel LC_1$ ist, so dass $AN_1\ L_1 C'$ ein Parallelogramm ist, da AC' mit AB den Winkel ϑ bildet, auch $L_2 N_1$ mit $N_1 B$; die gleichschenkligen Dreiecke $A_4 L_1 L_2$, $B_4 M_1 M_2$, $C_4 N_1 N_2$ haben also an der Grundlinie den Winkel ϑ.

24. Fällt man das Lot $G'G_a'$ auf a, so ergieht sich für die Länge $L_1 G_a'$ offenbar:

$$L_1 G_a' = G' L_1 \cos\beta = \frac{a^2 c \cos\beta}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Ferner

$$CL_2 = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

also

$$H_a L_2 = \frac{a}{2} - \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a(a^2+c^2-b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2 c \cos\beta}{a^2+b^2+c^2} = L_1 G_a'$$

Es ist also der Mittelpunkt von $L_1 L_2$ auch der von $H_a G_a'$. Errichtet man im Mittelpunkt von $L_1 L_2$ das Lot, so geht dasselbe durch den Mittelpunkt des Kreises der 3ten Potenz, während das im Mittelpnnkte von $H_a G_a'$ errichtete Lot durch den Mittelpunkt des Brocard'scheu Kreises geht. Da diese Schlussfolge für alle Seiten gilt, so folgt, dass die beiden Kreise denselben Mittelpunkt haben.

Dieser Mittelpunkt sei Z, der Radius des Kreises der 3ten Potenz ist ZL_1. Es ist nnn:

$$ZZ_a = \tfrac{1}{2}\{r \sin\alpha \operatorname{tg}\vartheta + r\cos\alpha\}$$

$$= \frac{r\cos(\alpha - \vartheta)}{2\cos\vartheta},$$

$$\frac{L_1 L_2}{2} = \frac{r\sin(\alpha - \vartheta)}{2\cos\vartheta}$$

also, wenn r_t der Radius des Kreises der 3ten Potenz ist,

$$r_t^2 = \frac{r^2\{\cos^2(\alpha-\vartheta) + \sin^2(\alpha-\vartheta)\}}{4\cos^2\vartheta} = \frac{r^2}{4\cos^2\vartheta}$$

oder

$$r_t = \frac{r}{2\cos\vartheta}$$

25. Betrachten wir noch die Dreiecke $L_1 M_1 N_1$ und $L_2 M_2 N_2$ näher: $L_2 M_2 N_2$ congr. $L_1 M_1 N_1$ ähnl. ABC. Die Seiten der ersten Dreiecke bilden mit den entsprechenden des andern Winkel $= \vartheta$. es ist ferner

$$\text{Wkl. } N_2 M_2 G' = M_2 N_2 A = \vartheta$$

ebenso

$$L_2 N_2 G' = N_2 L_2 B = \vartheta$$

also G' der erste Brocard'sche Punkt des Dreiecks $M_2 N_2 L_2$. Da ferner Z der Mittelpunkt des dem Dreieck $M_2 N_2 L_2$ umschriebenen Kreises ist, so liegt Z auf dem Brocard'schen Kreise dieses Dreiecks, und dreht man ZG' um 2ϑ, so ist die dadurch bestimmte Lage von G' der 2te Brocard'sche Punkt, es ist nun

$$G'ZO' = 2\vartheta$$

also O' der 2te Brocard'sche Punkt dieses Dreiecks.

Im Dreieck $N_1 L_1 M_1$ sind ebenso O und G' die beiden Brocard'schen Punkte.

Es sei endlich noch bemerkt, dass $BO \parallel L_1 M_1$, $CO \parallel M_1 N_1$, $AO \parallel N_1 L_1$, so dass die Seiten des Dreiecks $L_1 M_1 N_1$ den Ecktransversalen durch O, dagegen die Seiten des Dreiecks $L_2 M_2 N_2$ den Ecktransversalen durch O' parallel sind.

26. Berechnung von NH'.

Es treffe das Lot von N auf die Höhe AA_a dieselbe in X, dann ist

$$\overline{NH'}^2 = NX^2 + H'X^2 = NA^2 - AX^2 + H'X^2$$
$$= NA^2 - (AX - H'X)(AX + H'X) = NA^2 - AH'.(AX + H'X);$$

$$AX = AA_a - NN_a = 2r\sin\beta\sin\gamma + \frac{2r\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta},$$

$$H'X = H'A_a - NN_a = 2r\cos\beta\cos\gamma + \frac{2r\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta},$$

$$AH' = 2r\cos\alpha,$$

$$AN = -\frac{2r\cos(\alpha+\vartheta)}{\sqrt{1-4\sin^2\vartheta}}$$

Es ist also:

$$NH'^2 = \frac{4r^2\cos^2(\alpha+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta} - 4r^2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma) - \frac{8r^2\cos\alpha\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)}{1-4\sin^2\vartheta}$$
$$= \frac{4r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{\cos^2(\alpha+\vartheta) - \cos\alpha\cos(\beta-\gamma)(1-4\sin^2\vartheta)$$
$$-2\cos\alpha\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)\}$$

$$\cos^2(\alpha+\vartheta) = \cos^2\alpha\cos^2\vartheta + \sin^2\alpha\sin^2\vartheta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$2\cos\alpha\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta) = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2\vartheta - 2\cos\alpha\sin\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$+2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^2\vartheta$$

also

$$\overline{NH'}^2 = \frac{4r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$$
$$+\sin^2\vartheta(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 4\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)\}$$
$$= \frac{4r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + (1+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\sin^2\vartheta\}$$

$$= \frac{2r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+(1+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)(1-\cos2\vartheta)\}$$

$$= \frac{2r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{1-(1+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\cos2\vartheta\}$$

$$= \frac{r^2}{\cos3\vartheta}\{(1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\cos\vartheta-(1+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\cos3\vartheta\}$$

27. Es lässt sich nun aus dem Dreieck $NH'H$ der Winkel φ berechnen, den die Euler'sche Linie HH' mit der Linie HN bildet. Setzt man

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = g$$

so ist

$$\overline{HH'}^2 = r^2(1-8g)$$

also

$$\frac{2r^2}{1-4\sin^2\vartheta}\{1-(1+8g)\cos2\vartheta\} = r^2(1-8g)+r^2-2r^2\sqrt{1-8g}\,.\cos\varphi$$

Hieraus folgt nach einigen Umformungen:

$$\cos\varphi = \frac{1-6\sin^2\vartheta+4g}{(1-4\sin^2\vartheta)\sqrt{1-8g}}.$$

Ebenso leicht der Winkel ψ, den DN und DH' bilden.

Man findet aus Dreieck DHH'

$$\cos\psi = \frac{1-\cos2\vartheta+2\cos4\vartheta+4g}{2\cos\vartheta\sqrt{1-4\sin^2\vartheta^3}}.$$

28. Es war gefunden:

$$L_1N_2 = N_1M_2 = M_1L_2 = r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$$

Diese Längen können angesehen werden als Diagonalen von Parallelogrammen $BN_2G'L_1$, N_1AM_2G', M_1CL_2G'. Zieht man also durch den gemeinschaftlichen Eckpunkt G' die Parallelen zu den Linien, so sind die Stücke dann innerhalb der betreffenden Dreieckswinkel β, α, γ doppelt so gross, also unter sich gleich, nämlich $= 2r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$. Beschreibt man also mit $r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ als Radius den Kreis, so werden je 2 Seiten immer unter dem Durchmesser geschnitten. Nennen wir die Schnittpunkte entsprechend L_3, L_4 auf a, M_3, M_4 auf b, N_3, N_4 auf c, so ist also z. B. L_3N_4 ein Durchmesser, ebenso M_3L_4, N_3M_4. Daraus ergiebt sich, dass die Seiten des Dreiecks $L_3M_3N_3$, sowie die von $L_4M_4N_4$ senkrecht zu den Seiten von ABC stehen. Diese Dreiecke sind also zu ABC ähnlich, und da sie demselben Kreise einbeschrieben sind, so sind sie einander congruent.

Da der Radius $r\,\mathrm{tg}\vartheta$ ist, so ist $\mathrm{tg}\vartheta$ das Verhältniss der Seiten dieses Dreiecks zu den Seiten des ursprünglichen Dreiecks.

Bem. Dies Resultat konnte direct aus den Eigenschaften des Grebe'schen Punktes G' abgeleitet werden, wenn man noch bemerkt, dass die resp. Durchmesser M_3N_4, N_3L_4, L_3M_4 den Seiten des Höhenfusspunktdreiecks parallel sind.

29. Man lege fortlaufend an den Ecken eines Dreiecks Gerade an, welche mit einer anstossenden Seite den Winkel φ bilden; es soll untersucht werden, wie sich das neu entstandene Dreieck $A_1B_1C_1$ zum alten ABC verhält.

Es soll sein

$$(AB,\ A_1B_1) = (BC,\ B_1C_1) = (CA,\ C_1A_1) = \varphi \quad \text{(Fig. 2).}$$

Zunächst ist leicht einzusehen, dass die Winkel des neuen Dreiecks denen des alten gleich sind, die Dreiecke sind also einander ähnlich. Es ist ferner

$$A_1A = \frac{b\sin\varphi}{\sin\alpha},\quad AB_1 = \frac{c\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta}$$

also

$$A_1B_1 = \frac{b\sin\beta\sin\varphi + c\sin\alpha\sin(\beta+\varphi)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{2r\{\sin^2\beta\sin\varphi + \sin\alpha\sin\gamma\sin\beta\cos\varphi + \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta\sin\varphi\}}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{c}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\varphi + (1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\sin\varphi)$$

$$= c(\cos\varphi + \sin\varphi\cot\vartheta) = \frac{c\sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta}$$

Analog

$$B_1C_1 = \frac{a\sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta},\quad C_1A_1 = \frac{b\sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta}$$

Das Aehnlichkeitsverhältniss ist also $\dfrac{\sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta}$.

Ist $\varphi = \vartheta$, so ist dies Verhältniss

$$\frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta} = 2\cos\vartheta$$

übereinstimmend mit dem Resultat in *B. N.* 24.

Setzt man ferner $\varphi = 90^0$, so ist $\cot\vartheta$ das Aehnlichkeitsverhältniss.

Ist $\varphi = -\vartheta$, so ist das nene Dreieck 0, die 3 Linien schneiden sich sich in einem Pnnkte, wie bekannt. Ist noch

$$\varphi = -\frac{\vartheta}{2}$$

so giebt dies:

$$\frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sin\vartheta} = \frac{1}{2\cos\frac{\vartheta}{2}}$$

Zeichnet man endlich 2 Dreiecke, von denen das eine das bestimmte $A_1 B_1 C_1$ ist, während dio Seiten eines 2ten $A_2 B_2 C_2$ zn den Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ senkrecht stehen, so ist

$$A_1 B_1 C_1 = ABC \cdot \frac{\sin^2(\varphi + \vartheta)}{\sin^2\vartheta},$$

$$A_2 B_2 C_2 = ABC \cdot \frac{\cos^2(\varphi + \vartheta)}{\sin^2\vartheta}$$

also

$$A_1B_1C_1 + A_2B_2C_2 = \frac{ABC}{\sin^2\vartheta}$$

30. Man fälle von G' die Lote anf die Seiten, also $G'G_a'$, $G'G_b'$, $G'G_c'$, wodnrch man das Dreieck $G_a'G_b'G_c'$ erhält. Das Dreieck zerfällt in die 3 Teile $G'G_b'G_c'$, $G'G_c'G'_a$, $G'G_a'G_b'$. Da

$$G_a' G' = r \sin\alpha \operatorname{tg}\vartheta$$

ist etc., so ist

$$G'G_b'G_c' = \frac{r^2}{2} \operatorname{tg}^2\vartheta \sin\beta \sin\gamma \sin\alpha$$

denn der Winkel an G' ergänzt α zn 2 Rechten; also

$$G'G_b'G_c' = G'G_c'G_a' = G'G_a'G_b' = \tfrac{1}{4}\triangle \operatorname{tg}^2\vartheta$$

nnd

$$G_a'G_b'G_c' = \tfrac{3}{4}\triangle \operatorname{tg}^2\vartheta$$

Da dnrch $G'G_a'$, $G'G_b'$, $G'G_c'$ das ganze Dreieck in 3 gleiche Teile geteilt wird, so ist G' der Schwerpunkt von $G_a'G_b'G_c'$.

Man hat also auch nmgekehrt: Errichtet man in den Endpnnkten der Schwerlinien eines Dreiecks die Lote zu denselben, so ist in dem nen entstandenen Dreieck der Schwerpunkt des ersten Dreiecks der Grebe'sche Pnnkt des andern. Das Verhältniss der Flächeninhalte ist $\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\vartheta$. Anch folgt leicht, dass die Seiten des Dreiecks $G_a'G_b'G_c'$ den Schwerlinien des Dreiecks ABC proportional sind.

Fällt man vom Schwerpunkte G die Lote GG_a, GG_b, GG_c auf die Seiten, so erhält man ein Dreieck, dessen Inhalt

$$\triangle_g = \tfrac{2}{9}\triangle \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \,.\, \cot\vartheta$$

ist. Die Seiten desselben sind proportional den Producten ans Seite und zugehöriger Schwerlinie des ursprünglichen Dreiecks.

31. Zieht man ferner die Transversalen AG_α', BG_β', CG_γ' durch G', so bestimmen die Punkte $G_\alpha' G_\beta' G_\gamma'$ ein neues Dreieck, dessen Inhalt sich leicht bestimmen lässt.

Da G_α' die Seite a nach dem Verhältniss $c^2 : b^2$ teilt, so findet man leicht, indem man die Dreiecke $AG_\beta'G_\gamma'$, $BG_\gamma'G_\alpha'$, $CG_\alpha'G_\beta'$ vom ganzen Dreieck abzieht, für das gesnchte Dreieck

$$\Delta_{g_1} = \frac{\triangle\{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2) - b^2c^2(b^2+c^2) - c^2a^2(c^2+a^2) - a^2b^2(c^2+b^2)\}}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{2\Delta \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{(\sin^2\beta + \sin^2\gamma)(\sin^2\gamma + \sin^2\alpha)(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}$$

$$= \frac{2\Delta \sin^3\vartheta}{\sin(\alpha+\vartheta)\sin(\beta+\vartheta)\sin(\gamma+\vartheta)}$$

Denselben Inhalt giebt das Dreieck $D_\alpha D_\beta D_\gamma$, welches durch die Ecktransversalen nach dem Punkte D erhalten wird, wie daraus leicht folgt, dass

$$BG_\alpha' = D_\alpha C$$

etc. ist.

32. Construirt man über den Seiten eines Dreiecks (Fig. 2.) ABC die gleichseitigen Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1, so sind die Längen AA_1, BB_1, CC_1 einander gleich.

Man erhält:

$$AA_1^2 = CA_1^2 + CA^2 - 2CA \,.\, CA_1 \cos(60^0 + \gamma)$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^0 + \gamma)$$
$$= a^2 + b^2 - ab\cos\gamma + ab\sin\gamma\sqrt{3}$$

nun ist

$$a^2 + b^2 - ab\cos\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

$$ab\sin\gamma = 2\Delta$$

also

$$AA_1^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\Delta\sqrt{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta)$$

Ebenso also

Digitized by Google

$$BB_1^2 = CC_1^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta)$$

Construirt man die gleichseitigen Dreiecke BCA_2, CAB_2, ABC_2, welche mit dem Dreieck in demselben Flächenteile liegen, so findet man ebenso

$$\overline{AA_2}^2 = BB_2^2 = CC_2^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta)$$

also

$$AA_1 . AA_2 = BB_1 . BB_2 = CC_1 . CC_2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (1-3\operatorname{tg}^2\vartheta)$$

33. Diese Geraden AA_1, BB_1, CC_1 schneiden sich in einem Punkte P, was bekannt und leicht zu beweisen ist. Die Winkel am Punkte P sind alle einander gleich und betragen also 120^0. Bekanntlich hat ferner Punkt P die Eigenschaft, dass $PA+PB+PC$ ein Minimum ist, wenn kein Winkel grösser als 120^0 ist.

Construirt man ferner durch A, B, C die Lote zu den Linien AP, BP, CP, so schliessen dieselben ein gleichseitiges Dreieck ein, welches zugleich das grösste ist, welches um ABC construirt werden kann.

Um dies zu beweisen, schicken wir folgenden Satz voran, der leicht zu beweisen ist. Von allen Secanten, welche man durch den Schnittpunkt zweier Kreise legen kann, giebt diejenige die grösste Sehnensumme, welche parallel der Centrale ist. Nun schneiden sich die Kreise durch ABC_1 und ACB_1 in A und P, also ist AP die Chordale jener Kreise, die Centrale ist also zu AP senkrecht, und die Secante durch A senkrecht zu AP giebt die grösste Summe der Sehnen, d. h. die grösste Seite eines gleichseitigen Dreiecks um ABC.

Wir setzen nun:

$$AA_1^2 = \frac{a^2+b^2+c^2)}{2}(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta) = \lambda^2$$

dann ist

$$AP : b = \sin(AB_1P) : \sin 60^0$$

ferner folgt aus dem Dreieck ABB_1

$$\sin(AB_1P) : \sin(60^0+\alpha) = c : \lambda$$

also

$$AP = \frac{b.\sin(AB_1P)}{\sin 60^0} = \frac{b \,.\, c\sin(60^0+\alpha)}{\lambda \,.\, \sin 60^0} = \frac{abc\sin(60^0+\alpha)}{a\lambda \,.\, \sin 60^0}$$

$$= \frac{4r\triangle\sin(60^0+\alpha)}{2r.\lambda \,.\, \sin\alpha\sin 60^0} = \frac{2\varDelta\sin(60^0+\alpha)}{\lambda\sin\alpha\sin 60^0}$$

Ebenso

$$BP = \frac{2\Delta \sin(60^0+\beta)}{\lambda \sin\beta \sin 60^0}$$

$$CP = \frac{2\Delta \sin(60^0+\gamma)}{\lambda \sin\gamma \sin 60^0}$$

Bezeichnet man nun das grösste umgeschriebene gleichseitige Dreieck mit $A_m B_m C_m$, so ist zunächst PB_m ein Durchmesser des Kreises um ACB_1 oder ACB_m. Derselbe ist also

$$\frac{b}{\sin 60^0}$$

Dann ist

$$\overline{AB_m}^2 = \frac{b^2}{\sin^2 60^0} - AP^2$$

wir können aber setzen

$$b^2 = AP^2 + CP^2 + AP.CP$$

also

$$\begin{aligned}\overline{AB_m}^2 &= \tfrac{4}{3}(AP^2+CP^2+AP.CP) - AP^2\\ &= \tfrac{1}{3}(AP^2+4AP.CP+4CP^2)\\ &= \tfrac{1}{3}(AP+2CP)^2\end{aligned}$$

also

$$AB_m = \sqrt{\tfrac{1}{3}}(AP+2CP)$$

ebenso

$$AC_m = \sqrt{\tfrac{1}{3}}(AP+2BP)$$

also

$$B_m C_m = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}(AP+BP+CP) = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\lambda$$

wo $B_m C_m$ die Seite des umgeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist. Es verhält sich AA_1 zur Seite des gesuchten Dreiecks, wie Höhe und Seite im gleichseitigen Dreieck.

Der Inhalt des Dreiecks ist also

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2}{\sqrt{3}} &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\vartheta)\\ &= 2\Delta\left(1+\frac{\cot\vartheta}{\sqrt{3}}\right) = 2\Delta(1+\cot\vartheta\cot 60^0)\\ &= \frac{2\Delta\cos(60^0-\vartheta)}{\sin\vartheta.\sin 60^0}\end{aligned}$$

Bemerkung. Da für $AP = x$, $BP = y$, $CP = z$ die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}y^2+z^2+yz &= a^2\\ z^2+x^2+zx &= b^2\\ x^2+y^2+xy &= c^2\end{aligned}$$

so sind diese Gleichungen hierdurch aufgelöst, da

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2r}, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2r}$$

gesetzt werden kann, r aber aus der Gleichung bestimmt wird

$$r = \frac{abc}{4\varDelta}$$

34. Ist ein Dreieck zwischen 2 ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken beschrieben, so dass es dem einen umgeschrieben, dem andern eingeschrieben ist, so ist es die mittlere Proportionale zwischen beiden. Ist daher ein Dreieck von bestimmter Gestalt das grösste, welches um ein anderes beschrieben werden kann, so ist das, welches jenem ähnlich und ähnlich gelegen und dem Dreieck eingeschrieben ist, das kleinste von jener Gestalt. Das kleinste gleichseitige Dreieck also, welches einem Dreieck eingeschrieben werden kann, muss Seiten haben, welche ebenfalls zu AA_1, BB_1, CC_1 senkrecht stehen. Da $\frac{2\varDelta\cos(60^0-\vartheta)}{\sin\vartheta\sin 60^0}$ der Inhalt des grössten umgeschriebenen ist, so muss $\frac{\varDelta\,.\sin\vartheta\,.\sin 60^0}{2\cos(60^0-\vartheta)}$ der Inhalt des kleinsten eingeschriebenen Dreiecks sein und die Seite desselben

$$\sqrt{\frac{\varDelta\sin\vartheta}{\cos(60^0-\vartheta)}}$$

Bemerkung. Das kleinste gleichseitige Dreieck sei $A_0B_0C_0$. Dann müssen sich die Kreise um AB_0C_0, BC_0A_0, CA_0B_0 in einem Punkte P' schneiden. Da $A_0B_0C_0$ das kleinste Dreieck mit den Winkeln 60^0 ist, so ist ABC das grösste um $A_0B_0C_0$ mit den Winkeln α, β, γ, daher sind die Seiten den Centralen der genannten Kreise parallel, also sind die Seiten resp. senkrecht zu $P'A_0$, $P'B_0$, $P'C_0$. Verbindet man also P' mit A, B, C, so gehen diese Linien durch die betreffenden Mittelpunkte jener Kreise. Da nun die Höhen und die Durchmesser der umgeschriebenen Kreise an den Ecken eines Dreiecks Gegentransversalen sind, so folgt also, dass die hier bestimmten Punkte P und P' Gegenpunkte des Dreiecks ABC sind.

II.

Die Lissajous'schen Curven.

Von

Herrn Dr **H. Ekama**
in Amersfoort.

Lissajous [1]) hat schon, als er diese Curven beschrieb, etwas über die analytischen Eigenschaften publicirt, jedoch sehr unvollständig. Es scheint, dass nach ihm über diese Sache wenig oder nichts herausgegeben ist, bis 1884 an der Universität zu Göttingen eine Dissertation von A. Himstedt erschien, betitelt „Ueber Lissajous'sche Curven". In dieser wird noch genannt eine Dissertation von Wilhelm Braun, betitelt: „Die Singularitäten der Lissajous'schen Stimmgabelcurven." Nach Himstedt's Andeutung ist es mir nicht gelungen, diese Dissertation in einer Bibliothek zu finden, und ich weiss nicht, wie Braun die Lissajous'schen Curven behandelt hat.

Himstedt betrachtet gleich wie Lissajous nur den Fall, wo die beiden Schwingungsrichtungen senkrecht zu einander stehen; ich habe versucht diese Curven so allgemein wie möglich zu behandeln bei der Annahme, dass die Schwingungsrichtungen einen Winkel ω mit einander machen, so dass wir $\omega = 90^0$ oder $\omega = 0$ setzend die Lissajous'schen oder die Himstedt'schen Formeln bekommen.

Die Amplituden der beiden Bewegungen seien a und b und nehmen wir an, dass in der Zeit, in welcher die eine Bewegung n Schwingungen, die andere m Schwingungen macht, indem diese Zeit so klein genommen wird, dass n und m ganze Zahlen sind, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

---

1) Ann. de Chimie et de Physique III ème Série LI. p. 47.

Die beiden Schwingnngsrichtungen sollen die Coordinatenachsen sein, dann haben wir ein schiefwinkliges Coordinatensystem, bei welchem der Winkel zwischen den Achsen ω ist.

Den Angenblick, von welchem wir die Zeit rechnen, können wir willkürlich wählen; nehmen wir an, dass in diesem Augenblicke der Pnnkt sich anf der Y Achse befindet, so werden nach einiger Zeit t die Coordinaten des Pnnktes sein:

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{nnd} \quad y_1 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{p}{\lambda'}\right) \tag{1}$$

In dieser Formel ist p der Weg, welchen der Pnnkt in der Richtung der Y Achse schon beim Anfang der Zeitrechnnng zurückgelegt hat, also ist p Phasendifferenz der beiden Bewegnngen. Weiter ist T die Schwingnngszeit nnd λ die Wellenlänge der Bewegung der X Achse entlang nnd T' nnd λ' die entsprechenden Grössen der Y Achse entlang. Dnrch Elimination der t finden wir die Gleichnng der Curve, doch erst werden wir die Formeln vereinfachen. Wir wissen, dass $nT = mT'$ und $n\lambda = m\lambda'$ ist.

Wir wissen, dass $nT = mT'$ und $n\lambda = m\lambda'$ ist, also

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{nnd} \quad y_1 = b \sin 2\pi \frac{m}{n}\left(\frac{t}{T} + \frac{p}{\lambda}\right)$$

Sei

$$\pi \frac{t}{T} = n\Theta \quad \text{nnd} \quad 2\pi \frac{m}{n} \frac{p}{\lambda} = \psi$$

so wird

$$x_1 = a \sin 2n\Theta \quad \text{nnd} \quad y_1 = b \sin (2m\Theta + \psi) \tag{2}$$

Ans diesen Formeln mnss Θ eliminirt werden; dies gibt:

$$\Theta = \frac{1}{2n} \operatorname{arc\,sin} \frac{x_1}{a}$$

also

$$y_1 = b \sin \left\{ \frac{m}{n} \operatorname{arc\,sin} \frac{x_1}{a} + \psi \right\} \tag{3}$$

Diese Formel ist die allgemeine Gleichnng der Lissajons'schen Cnrven in dem oben gegebenen Coordinatensysteme. Vorläufig werden wir jedoch die Formeln (2) gebranchen.

Die Curve wird durch den Coordinatenanfangspnnkt gehen, für $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, also für $2n\Theta = k\pi$ nnd $2m\Theta + \psi = l\pi$.

Durch Elimination der Θ finden wir

$$\frac{m}{n} k\pi + \psi = l\pi$$

Es war

$$\psi = 2\pi \frac{m}{n} \frac{p}{\lambda}$$

also ist

$$p = \frac{nl}{2m} \lambda - \frac{k}{2} \lambda$$

k und l' sind ganze Zahlen; l kann alle Werte von m bis 1 haben und k alle Werte von n bis 1. Wenn l grösser als m ist, so ist die Phasendifferenz einige Wellenlängen und irgend ein Bruch solcher, so dass wir dieselbe Curve finden, als wenn die Phasendifferenz jenem Bruche gleich wäre. k würde auch n Werte haben können, allein aus der Formel geht hervor, dass wir nur verschiedene Phasendifferenzen für $k = 0$ und $k = 1$ finden werden. Also gibt es $2m$ Phasendifferenzen, bei welchen die Curve durch den Coordinatenanfangspunkt geht.

Der Zähler kann alle Zahlen von 1 bis $2m$ sein, also muss sein

$$p = \frac{A}{2m} \lambda$$

oder weil $\lambda = \frac{m}{n} \lambda'$,

$$p = \frac{B}{2n} \lambda'$$

worin B alle Werte von 1 bis $2n$ hat. Die Curve wird also immer bei einer Phasendifferenz gleich 0 oder gleich $\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$ durch den Coordinatenanfangspunkt gehen.

Aus den Formeln (2) folgt, dass x_1 nie grösser sein wird als a und nie kleiner als $-a$; ebenfalls dass y_1 nicht grösser als b und nicht kleiner als $-b$ sein wird. Die ganze Curve wird also in einem Parallelogramme, dessen Seiten $2a$ und $2b$ sind, und dessen Winkel ω ist, eingeschlossen sein. Wir werden jetzt untersuchen, wann die Curve durch die Ecken dieses Parallelogramms geht. Nennen wir die Ecke, wo $x_1 = a$ und $y_1 = b$ ist, P; wo $x_1 = -a$ und $y_1 = b$ ist, Q; wo $x_1 = -a$ und $y_1 = -b$ ist, R, und wo $x_1 = +a$ und $y_1 = -b$ ist, S.

Soll die Curve durch P gehen, so muss sein:

$$\frac{t}{T} = \frac{4k+1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{mt}{nT} + \frac{mp}{n\lambda} = \frac{4l+1}{4}$$

k und l sind wieder ganze Zahlen.

---

1) Oefter werden k und l in dieser Weise gebraucht werden, jedoch besteht zwischen den verschiedenen k's und l's keine Beziehung.

$$\therefore \frac{mp}{n\lambda} = \frac{m}{n}\,\frac{4k+1}{4} - \frac{4l+1}{4}$$

oder

$$p = \left\{\frac{4k+1}{4} - \frac{n}{m}\,\frac{4l+1}{4}\right\}\lambda = \left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+1}{4} - \frac{4l+1}{4}\right\}\lambda'$$

n kann sein

$$= \left\{\begin{array}{l} 4r+1 \\ 4r+2 \\ 4r+3 \\ 4r \end{array}\right. \quad \text{und} \quad m = \left\{\begin{array}{l} 4s+1 \\ 4s+2 \\ 4s+3 \\ 4s \end{array}\right.$$

r und s sind ganze positive Zahlen.

Diese verschiedenen Werte in obiger Gleichung substituirt geben die Phasendifferenzen, bei welchen die Curve durch P geht. In einer Tabelle zusammengesetzt:

	$m = 4s+1.$	$m = 4s+2$	$m = 4s+3$	$m = 4s$
$n = 4r+1$	0	$\frac{1}{4}\lambda'$	$\frac{1}{2}\lambda'$ oder $\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{3}{4}\lambda$
$n = 4r+2$	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg [1])	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg
$n = 4r+3$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{1}{4}\lambda'$	0	$\frac{3}{4}\lambda'$
$u = 4r$	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg

In dieser Tabelle sind gleich wie in den folgenden nur dio wichtigsten Phasondifferenzen aufgonommon.

Die Curve wird durch Q gehen für

$$\frac{t}{T} = \frac{4k+3}{4} \quad \text{und} \quad \frac{mt}{nT} + \frac{mp}{n\lambda} = \frac{4l+1}{4}$$

also

$$p = \left\{\frac{4k+3}{4} - \frac{n}{m}\,\frac{4l+1}{4}\right\}\lambda = \left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+3}{4} - \frac{4l+1}{4}\right\}\lambda'$$

Die Werte von n und m substituirt, gibt

	$m = 4s+1$	$m = 4s+2$	$m = 4s+3$	$m = 4s$
$n = 4r+1$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{1}{4}\lambda'$	0	$\frac{3}{4}\lambda'$
$n = 4r+2$	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt wog	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg
$n = 4r+3$	0	$\frac{1}{4}\lambda'$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{3}{4}\lambda'$
$n = 4r$	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg

1) Weil n und m einen gemeinschaftlichen Factor haben.

Soll die Curve durch R gehen, so muss sein

$$\frac{t}{T} = \frac{4k+3}{4} \quad \text{und} \quad \frac{mt}{nT} + \frac{mp}{n\lambda} = \frac{4l+3}{4}$$

also

$$p = \left\{ \frac{4k+3}{4} - \frac{n}{m}\,\frac{4l+3}{4} \right\} \lambda = \left\{ \frac{m}{n}\,\frac{4k+3}{4} - \frac{4l+3}{4} \right\} \lambda'$$

Durch Substitution der Werte von n und m finden wir:

	$m = 4s+1$	$m = 4s+2$	$m = 4c+3$	$m = 4s$
$n = 4r+1$	0	$\frac{5}{4}\lambda'$	$\frac{1}{2}\lambda'$ oder $\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{4}\lambda'$
$n = 4r+2$	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg
$n = 4r+3$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{3}{4}\lambda'$	0	$\frac{1}{4}\lambda''$
$n = 4r$	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{3}{4}\lambda$	fällt weg

Die Curve wird durch S gehen, wenn

$$\frac{t}{T} = \frac{4k+1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{mt}{nT} + \frac{mp}{n\lambda} = \frac{4l+3}{4}$$

$$\therefore p = \left\{ \frac{4k+1}{4} - \frac{n}{m}\,\frac{4l+3}{4} \right\} \lambda = \left\{ \frac{m}{n}\,\frac{4k+1}{4} - \frac{4l+3}{4} \right\} \lambda$$

Durch Substitution bekommen wir:

	$m = 4s+1$	$m = 4s+2$	$m = 4s+3$	$m = 4s$
$n = 4r+1$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{5}{4}\lambda'$	0	$\frac{1}{4}\lambda'$
$n = 4r+2$	$\frac{5}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{7}{4}\lambda'$	fällt weg
$n = 4r+3$	0	$\frac{3}{4}\lambda'$	$\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$	$\frac{1}{4}\lambda'$
$n = 4r$	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg	$\frac{1}{4}\lambda$	fällt weg

Die Curve wird durch P und Q gehen für

$n = 4r+1$ und $m = 4s+2$
$n = 4r+3$ „ $m = 4s+2$ } bei $\frac{1}{4}\lambda'$ Phasendifferenz

$n = 4r+1$ „ $m = 4s$
$n = 4r+3$ „ $m = 4s$ } bei $\frac{3}{4}\lambda'$ Phasendifferenz.

Sie geht durch R und S, wenn die Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda'$ grösser ist.

Im allgemeinen geht die Curve nur durch P und Q oder durch R und S, wenn n ungerade und m gerade ist.

Soll die Curve durch P und R gehen, so muss sein

$n = 4r+1$	und	$m = 4s+1$	die Phasendifferenz	$= 0$
$n = 4r+3$	„	$m = 4s+1$	„ „	$= \frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$
$n = 4r+1$	„	$m = 4s+3$	„ „	$= \frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$
$n = 4r+3$	„	$m = 4s+3$	„ „	$= 0$

Soll die Curve durch Q und S gehen, so müssen die Phasendifferenzen in derselben Folge sein: $\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$; 0; 0 und $\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$. Dass die Curve durch die gegenüberliegenden Ecken des Parallelogramms geht, ist nur möglich, wenn n und m beide ungerade sind.

Endlich wird die Curve durch P und S gehen für

$$\left.\begin{array}{lll} n = 4r+2 & \text{und} & m = 4s+1 \\ n = 4r & „ & m = 4s+1 \end{array}\right\} \text{Phasendifferenz} = \tfrac{3}{4}\lambda$$

$$\left.\begin{array}{lll} n = 4r+2 & „ & m = 4s+3 \\ n = 4r & „ & m = 4s+3 \end{array}\right\} \text{Phasendifferenz} = \tfrac{1}{4}\lambda$$

Die Curve wird durch Q und R gehen, wenn die Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda$ grösser ist. Dieses ist nur möglich für n gerade und m ungerade.

Um die Schnittpunkte der Curve mit der Y_1 Achse zu finden, muss $y_1 = 0$ sein, also

$$2n\Theta = k\pi$$

worin k alle ganze Zahlen von 1 bis $2n$ sein kann, wir finden also $2n$ Schnittpunkte mit der Y_1 Achse. Die Werte der y_1 für diese sind

$$y_1 = b \sin\left(\frac{m}{n} k\pi + \psi\right)$$

Bei den Schnittpunkten mit der X Achse muss $y_1 = 0$ sein, also

$$2m\Theta + \psi = l\pi$$

worin l alle ganzen Zahlen von 1 bis $2m$ sein kann, also $2m$ Schnittpunkte mit der X_1 Achse:

$$\Theta = \frac{l\pi}{2m} - \frac{\psi}{2m}$$

$$\therefore x_1 = a \sin\frac{n}{m}\{l\pi - \psi\}$$

Oft fallen einige dieser Schnittpunkte zusammen. Geht die Curve durch 2 Ecken des Parallelogramms, so ist die Zahl der Schnittpunkte mit der X_1 Achse m und mit der Y_1 Achse n, von diesen können auch wieder einige zusammen fallen.

Digitized by Google

Nun werden wir bestimmen, wenn x_1 den Wert $+a$ hat; dazu muss

$$2n\Theta = \frac{4k+1}{4}\pi$$

sein, worin k alle Werte von 1 bis n haben kann, also berührt die Curve diese Seite des Parallelogramms n mal. Für diese Punkte ist:

$$y_1 = b\sin\left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+1}{4}\pi + \psi\right\}$$

x_1 wird gleich $-a$ für

$$2n\Theta = \frac{4k+3}{4}\pi$$

und so ist

$$y_1 = b\sin\left\{\frac{m}{n}\,\frac{4k+3}{4}\pi + \psi\right\}$$

Soll $y_1 = b$ sein, so muss

$$2m\Theta + \psi = \frac{4l+1}{4}\pi$$

sein.

$$\Theta = \frac{4l+1}{8m}\pi - \frac{\psi}{2m}$$

$$\therefore\; x_1 = a\sin\frac{n}{m}\left\{\frac{4l+1}{4}\pi - \psi\right\}$$

für $y_1 = -b$ ist

$$2m\Theta + \psi = \frac{4l+3}{4}\pi$$

und also

$$x_1 = a\sin\frac{n}{m}\left\{\frac{4l+3}{4}\pi - \psi\right\}$$

l kann alle Werte von 1 bis m haben, also berührt die Curve jede der Seiten des Parallelogramms, welche gleich $2a$ sind, m mal.

Bei verschiedenen Phasendifferenzen werden wir jedoch dieselbe Curve finden. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden, das heisst, die Richtung, in welcher die Curve durchlaufen wird, bleibt dieselbe, oder die Curve ändert ihre Form zwar nicht, wird aber in einer Richtung entgegengesetzt jener im ersten Falle durchlaufen.

Wir haben gefunden:

$$x_1 = a\sin 2\pi\frac{t}{T} \quad \text{und} \quad y_1 = b\sin 2\pi\left(\frac{t}{T'} + \frac{p}{x'}\right)$$

Sei $p = \frac{\lambda'}{c} = \frac{\lambda}{d}$

Nach einigen ganzen Schwingungszeiten T wird x_1 wieder dasselbe sein, also genügt x_1 der Gleichung

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t + fT}{T}$$

in welcher f eine ganze Zahl ist.

So ist in einem Zeitpunkte $t + fT$

$$y_1 = b \sin 2\pi \left(\frac{t + fT}{T'} + \frac{1/c\, \lambda'}{\lambda'} \right)$$

oder

$$y_1 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{f\lambda}{\lambda'} + 1/c \frac{\lambda'}{\lambda'} \right)$$

$$= b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{\left(\frac{m}{n} f + 1/c\right) \lambda'}{\lambda'} \right)$$

Also ist die allgemeine Formel für die Phasendifferenzen, bei welchen die Curve dieselbe ist, und in derselben Richtung durchlaufen wird, $\left(1/c + \frac{m}{n} f\right)\lambda'$, in welcher $n \geqq f \geqq 1$ ist, dieses ist in Wellenlängen der anderen Bewegung ausgedrückt $\left(1/d + \frac{n}{m} g\right)\lambda$, in welcher g eine ganze Zahl von 1 bis m ist.

Ist die ursprüngliche Phasendifferenz $= 0$, so wird diese Formel $\frac{n}{m} g\lambda$, was übereinstimmt mit der vorher gefundenen Bedingung, dass die Curve durch den Coordinatenanfangspunkt gehen soll, wenn in dieser $k = 0$ ist.

Wird die Curve in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so hat man:

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = a \sin 2\pi \frac{\frac{2f+1}{2} T - t}{T}$$

und

$$y_1 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{p}{\lambda'} \right) = b \sin 2\pi \left(\frac{\frac{2g+1}{2} T' - t}{T'} - \frac{p}{\lambda'} \right)$$

Substituiren wir in y_1 für t den Wert $\frac{2f+1}{2} T - t$; so hat man

Digitized by Google

$$y_1 = b \sin 2\pi \left\{ \frac{\frac{2g+1}{2} T' - \frac{2f+1}{2} T_1 + t}{T'} - \frac{1/c \, \lambda'}{\lambda'} \right\}$$

oder

$$y_1 = b \sin 2\pi \left\{ \frac{t}{T'} + \frac{\left(\frac{2g+1}{2} - \frac{2f+1}{2} \frac{m}{n} - 1/c \right) \lambda'}{\lambda'} \right\}$$

und also ist die erforderte Phasendifferenz gleich

$$\frac{n(2g+1) - (2f+1)m - \frac{2n}{c}}{2n} \lambda'$$

in welcher g und f wieder ganze Zahlen sind.

In Wellenlängen der anderen Bewegung ausgedrückt findet man die Phasendifferenz gleich

$$\frac{m(2f+1) - (2g+1)n - \frac{2m}{d}}{2m} \lambda$$

Diese Formel wird für $1/d = 0$

$$\frac{m(2f+1) - n(2g+1)}{2m} \lambda$$

oder

$$\left\{ f - \frac{n + 2gn - m}{2m} \right\} \lambda$$

und weil f keinen Einfluss hat,

$$\left\{ \tfrac{1}{2} - \frac{2g+1}{2} \frac{n}{m} \right\} \lambda \quad \text{oder} \quad \left\{ \frac{2g+1}{2} \frac{n}{m} - \tfrac{1}{2} \right\} \lambda$$

g kann m Werte haben, also finden wir hier auch m Phasendifferenzen; diese kommen überein mit den früher gefundenen, wenn $k = 1$ ist.

Die Formel (3) gibt die Curve in einem schiefwinkligen Coordinatensysteme, wir werden sie jetzt auf ein rechtwinkeliges, von welchem die X Achse mit jener des ursprünglichen Systems zusammen fällt, und also die Y Achse auf dieser senkrecht steht, übertragen.

Nun ist

$$x = x_1 + y_1 \cos \omega \quad \text{und} \quad y = y_1 \sin \omega$$

$$\therefore x = x_1 + y \operatorname{cotg} \omega$$

aber

$$x_1 = a \sin 2n\Theta \quad \text{und} \quad y_1 = b \sin (2m\Theta + \psi)$$

$$\therefore \quad y = b \sin \omega \sin (2m\Theta + \psi)$$

und also

$$\Theta = \frac{1}{2m}\left(\arcsin \frac{y}{b \sin \omega} - \psi\right)$$

$$x = a \sin \frac{n}{m}\left\{\arcsin \frac{y}{b \sin \omega} - \psi\right\} + y \operatorname{cotg} \omega \qquad (4)$$

Diese ist die allgemeine Formel der Lissajons'schen Cnrven in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme. Nennen wir den Winkel, welchen die Tangente in einem Pnnkte der Cnrve mit der XAchse macht, τ, so ist:

(5)

$$\operatorname{cotg} \tau = \frac{dx}{dy} = \frac{na}{m} \cos \frac{n}{m}\left(\arcsin \frac{y}{b \sin \omega} - \psi\right) \frac{1}{\sqrt{(b^2 \sin^2 \omega - y^2)}} + \operatorname{cotg} \omega$$

Wir werden diese Formel gebrauchen, nm die Richtung der Tangente für den Coordinatenanfangspunkt, wenn die Cnrve dnrch diesen Pnnkt geht, zn bestimmen. Dann mnss, wie wir gefnnden haben, $p = 0$ oder $= \frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}\lambda'$ sein, also $\psi = 0$ oder $= -\frac{m}{n}\pi$. Diese sind die wichtigsten Phasendifferenzen, die übrigen hierzn geforderten Phasendifferenzen kann man nach den oben gegebenen Formeln finden. In dem Coordinatenanfangspnnkt ist $x = 0$ nnd $y = 0$. Substituiren wir dieses in der Formel (5), so finden wir τ, allein auf diese Weise können wir nicht über das Zeichen der 2ten Seite nrteilen, dafür bringen wir die Gleichung in die Form:

$$\operatorname{cotg} \tau - \operatorname{cotg} \omega = \frac{na}{mb} \frac{\cos \frac{n}{m}\left(\arcsin \frac{y}{b \sin \omega} - \psi\right)}{\cos \arcsin \frac{y}{b \sin \omega}}$$

Ist $y = 0$, so kann $\arcsin \frac{y}{b \sin \omega} = 0$ oder $= m\pi$ sein; also für $\psi = 0$ finden wir im ersten Falle

$$\operatorname{cotg} \tau - \operatorname{cotg} \omega = \frac{na}{mb \sin \omega}$$

im zweiten Falle

$$\operatorname{cotg} \tau' - \operatorname{cotg} \omega = \frac{na}{mb \sin \omega} \frac{\cos n\pi}{\cos m\pi}$$

Ist n oder m gerade nnd das andere nngerade, so wird die letzte Formel

$$\operatorname{cotg} \tau' - \operatorname{cotg} \omega = -\frac{na}{mb \sin \omega}$$

die beiden Tangenten machen einen Winkel.

Sind n und m beide ungerade, so wird diese Formel:

$$\cotg \tau' - \cotg \omega = \frac{na}{mb \sin \omega}$$

die beiden Tangenten fallen zusammen.

Ist $\psi = -\frac{m}{n}\pi$, so ist im ersten Falle

$$\cotg \tau - \cotg \omega = -\frac{na}{mb \sin \omega}$$

im zweiten Falle

$$\cotg \tau' - \cotg \omega = \frac{na}{mb \sin \omega} \frac{\cos (n+1)\pi}{\cos m\pi}$$

Ist n gerade und m ungerade oder umgekehrt, so wird die letzte Gleichung

$$\cotg \tau' - \cotg \omega = \frac{na}{mb \sin \omega}$$

Diese Tangenten machen einen Winkel, aber sie fallen mit den zuerst gefundenen zusammen.

Sind n und m beide ungerade, so ist:

$$\cotg \tau' - \cotg \omega = -\frac{na}{mb \sin \omega}$$

die beiden Tangenten fallen wieder zusammen, allein sie machen einen Winkel mit denjenigen, welche wir für $\psi = 0$ fanden.

Bestimmen wir den Winkel $\varDelta$, welchen die Tangenten mit einander machen.

$$\tg \varDelta = \tg (\tau - \tau') = \frac{\frac{na}{mb \sin \omega} - \cotg \omega + \frac{na}{mb \sin \omega} + \cotg \omega}{\frac{n^2 a^2}{m^2 b^2 \sin^2 \omega} - \cotg^2 \omega - 1}$$

$$= \sin \omega \frac{\frac{2\,mb}{na}}{1 - \frac{m^2 b^2}{n^2 a^2}}$$

$$\therefore \quad \tg \varDelta = \sin \omega \tg \left\{ 2 \operatorname{arc} \tg \frac{mb}{na} \right\}$$

$2 \operatorname{arc} \tg \frac{mb}{na}$ ist der Winkel, welchen die Tangenten machen, wenn $\omega = 90^0$ ist. Verschiedene Teile der Curve werden einander schneiden; auf folgende Weise können wir diese Doppelpunkte finden.

In einem Doppelpunkte muss $x_1 = a\sin 2n\Theta = a\sin 2n\Theta'$ und $y_1 = b\sin(2m\Theta + \psi) = b\sin(2m\Theta' + \psi)$.

Dem genügen:

$$2n\Theta = 2n\Theta' + 2q\pi \qquad \text{und} \qquad 2m\Theta + \psi = 2m\Theta' + \psi + 2q\pi$$

$$2n\Theta = (2p-1)\pi - 2n\Theta' \qquad\qquad 2m\Theta + \psi = (2p-1)\pi - 2m\Theta' - \psi$$

oder:

$$\Theta - \Theta' = \frac{q}{n}\pi \; . \; . \; . \; . \; (\alpha) \qquad \Theta - \Theta' = \frac{q}{m}\pi \; . \; . \; . \; . \; (\gamma)$$

$$\Theta + \Theta' = \frac{2p-1}{2n}\pi \; . \; . \; (\beta) \qquad \Theta + \Theta' = \frac{2p-1}{2m}\pi - \frac{\psi}{m} \; (\delta)$$

Aus (α) und (δ) findet man aus (β) und (δ)

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{2p-1}{4m}\pi - \frac{\psi}{2m} + \frac{q}{2n}\pi \\ \Theta' &= \frac{2p-1}{4m}\pi - \frac{\psi}{2m} - \frac{q}{2n}\pi \end{aligned}\right\} \text{I} \qquad \left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{2p-1}{4n}\pi + \frac{q}{2m}\pi \\ \Theta' &= \frac{2p-1}{4n}\pi - \frac{q}{2m}\pi \end{aligned}\right\} \text{II}$$

Himstedt [1]) hat die Zahl der Doppelpunkte der Lissajous'schen Curven bestimmt und er fand, dass diese Zahl im allgemeinen $2mn - (m+n)$ ist, aber in dem speciellen Falle, dass die Curve durch die Ecken des Parallelogramms geht, ist die Zahl nur $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$.

Die Formel (5) können wir auch schreiben

$$\operatorname{cotg}\tau - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\cos 2n\Theta}{\cos(2m\Theta + \psi)}$$

Setzen wir in diese Formel die Werte, welche Θ und Θ' in einem Doppelpunkte haben, so finden wir für I:

$$\operatorname{cotg}\tau_d - \operatorname{cotg}\omega = \frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\cos\left\{\left(\frac{2p-1}{2}\pi - \psi\right)\frac{n}{m} + q\pi\right\}}{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\pi - \psi + \frac{m}{n}q\pi + \psi\right\}}$$

$$= -\frac{na}{mb\sin\omega}\,\frac{\cos q\pi \cos\frac{n}{m}\left(\frac{2p-1}{2}\pi - \psi\right)}{\sin\frac{2p-1}{2}\pi\sin\frac{m}{n}q\pi}$$

---

1) Diss. pag. 19.

$$\operatorname{cotg} \tau_d' - \operatorname{cotg} \omega = \frac{na}{mb \sin \omega} \frac{\cos\left\{\frac{n}{m}\left(\frac{2p-1}{2}\pi - \psi\right) - q\pi\right\}}{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\pi - \psi - \frac{m}{n} q + \psi\right\}}$$

$$= \frac{na}{mb \sin \omega} \frac{\cos q\pi \cos \frac{n}{m}\left(\frac{2p-1}{2}\pi - \psi\right)}{\sin \frac{2p-1}{2}\pi \sin \frac{m}{n} q\pi}$$

für II:

$$\operatorname{cotg} \tau_d - \operatorname{cotg} \omega = \frac{na}{mb \sin \omega} \frac{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\pi + \frac{n}{m} q\pi\right\}}{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\frac{m}{n}\pi + q\pi + \psi\right\}}$$

$$= -\frac{na}{mb \sin \omega} \frac{\sin \frac{2p-1}{2}\pi \sin \frac{n}{m} q\pi}{\cos\left(\frac{2p-1}{2}\frac{m}{n}\pi + \psi\right) \cos q\pi}$$

$$\operatorname{cotg} \tau_d' - \operatorname{cotg} \omega = \frac{na}{mb \sin \omega} \frac{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\pi - \frac{n}{m} q\pi\right\}}{\cos\left\{\frac{2p-1}{2}\frac{m}{n}\pi - q\pi + \psi\right\}}$$

$$= \frac{na}{mb \sin \omega} \frac{\sin \frac{2p-1}{2} \sin \frac{n}{m} q\pi}{\cos\left(\frac{m}{n}\frac{2p-1}{2}\pi + \psi\right) \cos q\pi}$$

Also ist immer

$$\operatorname{cotg} \tau_d + \operatorname{cotg} \tau_d' = 2 \operatorname{cotg} \omega \tag{x}$$

Wenn man in einem Doppelpunkte die beiden Tangenten zieht, so ist die Summe der Cotangenten der Winkel, welche sie mit einer der Achsen machen, gleich zweimal Cotangens des Coordinatenwinkels.

Ist $\omega = 90^0$, so wird diese Formel

$$\operatorname{tg} \tau_d + \operatorname{tg} \tau_d' = 0$$

welche mit der von Himstedt gefundenen Formel übereinstimmt. Weiter folgt hieraus, dass die Linie, welche den Doppelpunkt verbindet mit der Mitte der Achsen-Strecke, die zwischen den beiden Tangenten liegt, der anderen Coordinatenachse parallel ist.

Sei A der Doppelpunkt, in welchem AC und AB die Tangenten seien. Nehmen wir $CD = BD$ und sei Wkl. $ADB = \xi$, so ist, weil Wkl. $CAB = \tau_d' - \tau_d$ ist, in $\triangle\, ADB$

$$\tfrac{1}{2}\, CB : AB = \sin(\tau_d' - \xi) : \sin \xi$$

oder

$$CB : AB = 2(\sin\tau_d' \operatorname{cotg}\xi - \cos\tau_d') : 1$$

In $\triangle\ ABC$ ist

$$CB : AB = \sin(\tau_d' - \tau_d) : \sin\tau_d$$

$$= \sin\tau_d' \operatorname{cotg}\tau_d - \cos\tau_d' : 1$$

$$\therefore\quad 2\sin\tau_d' \operatorname{cotg}\xi - 2\cos\tau_d' = \sin\tau_d' \operatorname{cotg}\tau_d - \cos\tau_d'$$

$$2\operatorname{cotg}\xi = \operatorname{cotg}\tau_d + \operatorname{cotg}\tau_d'$$

also nach (x)

$$\xi = \omega$$

was zu beweisen war. Auf dieselbe Weise wie vorher für den Winkel, den die beiden Tangenten durch den Coordinatenanfangspunkt gezogen mit einander machen, kann man jetzt im allgemeinen für jeden Doppelpunkt beweisen, dass der Tangens des Winkels, welchen die beiden Tangenten in diesem Punkte an die beiden Teile der Curve gezogen mit einander machen, dem Tangens des Winkels zwischen den Tangenten, wenn das Coordinatensystem rechtwinklig war, mit dem Sinus des Coordinatenwinkels multiplicirt, gleich ist.

Um die Wendepunkte zu bestimmen, müssen wir (5) nochmals differentiiren, so finden wir:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{na}{m} \times$$

$$\frac{-\frac{n}{m}\sqrt{b^2\sin^2\omega - y^2}\,\sin\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right) + y\cos\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right)}{\sqrt{b^2\sin^2\omega - y^2}}$$

Für einen Wendepunkt muss $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ sein, also

$$n \operatorname{tg}\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega} - \psi\right) = \frac{my}{\sqrt{b^2\sin^2\omega - y^2}} \qquad (6)$$

oder

$$n \operatorname{tg}\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y_1}{b} - \psi\right) = \frac{my_1}{\sqrt{b^2 - y_1^2}}$$

Aendert sich der Wert des ω, so wird der Wendepunkt einen Kreis mit dem Radius y_1 beschreiben. (Fig. 2 und 3.)

Führen wir in Gl. (6) die Θ wieder ein, so wird sie:

$$n \operatorname{tg} 2n\Theta = m \operatorname{tg}(2m\Theta + \psi) \qquad (7)$$

Durch Bestimmnng von Θ aus dieser Gleichnng finden wir die Zeitpnnkte, in welchen der Pnnkt durch einen Wendepnnkt geht. Diese Zeiten sind nnabhängig von ω.

Dieser Gleichnng werden nnendlich viele Werte der Θ genügen, nnter welchen jedoch nnr eine bestimmte Zahl verschiedene vorkommen, die Zahl der verschiedenen reellen Werte der Θ mnss man bestimmen, nm die Zahl der Wendepnnkte zn wissen. Wenn wir die Formel (7) in Potenzen des Sinns der Θ entwickeln nnd die irrationalen Fnnctionen durch Qnadrirnng fortschaffen, so bekommen wir eine algebraische Gleichung höherer Ordnnng in Bezng anf $\sin\Theta$. Die Zahl reeller Wnrzeln zwischen $+1$ nnd -1 giebt die Zahl der Wendepnnkte. Anf diese Weise werden wir es jedoch schwer finden, nnd durch die Qnadrirnng führen wir Werte für Θ ein, welche nicht der Formel (7) genügen.

Die Cnrve hat an jeder Seite der Y_1 Achse n mal ihre grösste Entfernung und an jeder Seite der X_1 Achse m mal. Geht die Cnrve von einem Pnnkte, wo sie ihre grösste Entfernnng von der Y_1 Achse hat, nach einem solchen Pnnkte in Bezng anf die X_1 Achse oder umgekehrt, so hat die Cnrve keinen Wendepnnkt; dies ist zwar der Fall, wenn der Teil der Cnrve zwei Pnnkte, welche die grösste Entfernnng von derselben Achse haben, verbindet. Nun sol n grösser als m, so wird die Curve $2(n-m)$ Teile, welche Pnnkte mit der grössten Entfernnng von der Y_1 Achse verbinden, haben; demznfolge hat die Cnrve $2(n-m)$ Wendepnnkte. Die Formel (7) hat dann anch $2(n-m)$ reelle Wurzeln für $\sin\Theta$. Geht die Curve dnrch zwei Ecken des Parallelogrammes, so fallen die Wendepnnkte, mit Ausnahme derjenigen, welche gerade in den Ecken liegen, je zwei nnd zwei zusammen, nnd verschwinden also $\frac{2(n-m)-2}{2}$ Pnnkte, dann hat die Curve in diesem speciellen Falle nur $n-m+1$ Wendepnnkte.

Ans (4) und (5) folgt durch Dividirung:

$$\frac{x-y\operatorname{cotg}\omega}{\operatorname{cotg}\tau-\operatorname{cotg}\omega}=\frac{m}{n}\operatorname{tg}\frac{n}{m}\left(\arcsin\frac{y}{b\sin\omega}-\psi\right)\sqrt{b^2\sin^2\omega-y^2}$$

nnd wenn wir (6) gebranchen:

$$\frac{x-y\operatorname{cotg}\omega}{\operatorname{cotg}\tau-\operatorname{cotg}\omega}=\frac{m^2}{n^2}y \quad \text{oder} \quad \frac{x/y-\operatorname{cotg}\omega}{\operatorname{cotg}\tau-\operatorname{cotg}\omega}=\frac{m^2}{n^2}$$

Bringen wir die Curve auf Polarcoordinaten, so ist

$$x=r\cos\varphi \quad \text{nnd} \quad y=r\sin\varphi$$

und

$$\frac{\cotg \varphi - \cotg \omega}{\cotg \tau - \cotg \omega} = \frac{m^2}{n^2}$$

oder

$$\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{m^2}{n^2} \frac{\sin(\omega - \tau)}{\sin \tau} \tag{8}$$

Diese Formel lehrt nns die Beziehnng, welche in einem Wendepnnkte zwischen dem Winkel, welchen die Tangente mit der X Achse macht, nnd der Anomalie besteht.

Geht die Curve durch den Coordinatenanfangspnnkt, so ist dieser Pnnkt auch ein Wendepnnkt, jedoch dieser Punkt genügt nicht der Formel (8); der Grnnd dafür wird später gegeben.

Wir werden jetzt die Geschwindigkeit nnd die Beschleunigung in jedem Pnnkte der Curve bestimmen. In dem schiefwinkligen Coordinatensysteme war

$$x_1 = a \sin 2n\Theta \quad \text{nnd} \quad y_1 = b \sin(2m\Theta + \psi)$$

wo

$$\Theta = \frac{\pi}{n} \frac{t}{T}$$

ist, also

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\pi}{nT}$$

$$v_{x_1} = \frac{dx_1}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{2\pi a}{T} \cos 2n\Theta$$

nnd

$$v_{y_1} = \frac{dy_1}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{2m\, b\pi}{nT} \cos(2m\Theta + \psi)$$

die Geschwindigkeit ist

$$V = \sqrt{\{v_{x_1}{}^2 + v_{y_1}{}^2 + 2 v_{x_1} v_{y_1} \cos \omega\}}$$

Sei die Richtung der Geschwindigkeit in Bezug auf die X Achse P, so ist:

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = \frac{\sin(\omega - \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{na \cos 2n\Theta}{mb \cos(2m\Theta + \psi)} = \frac{\sin(\omega - \tau)}{\sin \omega}$$

Die Componenten der Beschlennigung sind:

$$p_{x_1} = \frac{dv_{x_1}}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin 2n\Theta = -\frac{4\pi^2}{T^2} x_1$$

nnd

$$p_{y_1} = \frac{dv_{y_1}}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{4\pi^2\, b\, m^2}{n^2 T^2} \sin(2m\Theta + \psi) = -\frac{4\pi^2}{T'^2} y_1$$

nnd also die Beschlennigung:

$$P = 4\pi^2 \sqrt{\left\{ \frac{x_1^2}{T^4} + \frac{y_1^2}{T'^4} + 2\,\frac{x_1}{T^2}\,\frac{y_1}{T'^2}\cos\omega \right\}}$$

Sei die Richtnng der Beschlennignng znr X Achse δ, so ist:

$$\frac{p_{x_1}}{p_{y_1}} = \frac{\sin(\omega - \delta)}{\sin\delta} = \frac{n^2 a \sin 2n\Theta}{m^2 b \sin(2m\Theta + \psi)} = \frac{n^2 x_1}{m^2 y_1}$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\,\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\varphi}$$

Diese Formel gibt die Beziehnng zwischen der Anomalie nnd der Richtnng der Beschlennigung.

Sollen die Richtungen der Geschwindigkeit nnd der Beschlennigung zusammen fallen, also in einem Wendepnnkte, so mnss sein

$$\frac{na\cos 2n\Theta}{mb\cos(2m\;\Theta + \psi)} = \frac{n^2 a \sin 2n\Theta}{m^2 b \sin(2m\Theta + \psi)}$$

oder

$$m\,\mathrm{tg}(2m\Theta + \psi) = n\,\mathrm{tg}\,2n\Theta$$

Diese Formel ist der Formel (7) ähnlich.

Ist die Phasendifferenz so gewählt, dass die Cnrve dnrch den Coordinatenanfangspnnkt geht, so ist in diesem Pnnkte p_{x_1} nnd $p_{y_1} = 0$, folglich ist die Beschleunignng in diesem Punkte anch 0. In allen übrigen Pnnkten ist die Beschleunigung grösser als 0. Die Geschwindigkeit ist in den Ecken des Parallelogramms 0.

In einem Doppelpunkte ist:

$$\frac{\sin(\omega - \delta)}{\sin\delta} = \frac{n^2 x_1}{m^2 y_1} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\omega - \delta')}{\sin\delta'} = \frac{n^2 x_1'}{m^2 y_1'}$$

aber

$$x_1 = x_1' \quad \text{und} \quad y_1 = y_1' \quad \text{also anch} \quad \delta = \delta'$$

was uns lehrt, dass in einem Doppelpunkte die Beschleunignngen in den beiden Teilen dieselbe Richtnng haben.

Jetzt werden wir den geometrischen Ort der Wendepnnkte aller Curven bestimmen, welche bei bestimmten n nnd m vorkommen.

Die Curve, welche diesen geometrischen Ort gibt, werde ich die Curve der Wendepnnkte nennen.

Aus (7) folgt durch Snbstitution der Werte (2)

$$my_1\sqrt{a^2 - x_1^2} = n\,x_1\sqrt{b^2 - y_1^2}$$

oder

$$(n^2 - m^2)\,x_1^2 y_1^2 = n^2 x_1^2 b^2 - m^2 y_1^2 a^2 \tag{9}$$

Diese Formel enthält nicht die ψ, also ist diese Gleichung jene

Digitized by Google

der gesuchten Curve in dem schiefwinkligen Coordinatensysteme. Die Curve ist vom 4ten Grade und symmetrisch zu den Achsen. Sie geht durch den Coordinatenanfangspunkt und durch die Ecken des Parallelogrammes. Fig. 2 und 3.

Bringen wir die Curve auf Polarcoordinaten, so ist

$$x_1 = \frac{r\sin(\omega - \varphi')}{\sin\omega} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{r\sin\varphi'}{\sin\omega}$$

$$r^2 = \frac{\sin^2\omega}{n^2 - m^2}\{n^2 b^2 \operatorname{cosec}^2\varphi' - m^2 a^2 \operatorname{cosec}^2(\omega - \varphi')\}$$

Soll r reell sein, so muss sein:

$$n^2 b^2 \operatorname{cosec}^2\varphi' > m^2 a^2 \operatorname{cosec}^2(\omega - \varphi')$$

oder

$$nb\sin(\omega - \varphi') > ma\sin\varphi'$$

$$\therefore \operatorname{tg}\varphi' < \frac{nb\sin\omega}{nb\cos\omega + ma}$$

Die Anomalie ist bei dieser Curve unstetig.

Für

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{nb\sin\omega}{nb\cos\omega + ma}$$

ist $r = 0$, also geht die Curve durch den Coordinatenanfangspunkt.

Sei der Winkel, welchen eine Tangente dieser Curve mit der X Achse macht, τ_1, so ist

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{\frac{dr}{d\varphi'}\operatorname{tg}\varphi' + r}{\frac{dr}{d\varphi'} - r\operatorname{tg}\varphi'} = \frac{r\frac{dr}{d\varphi'}\operatorname{tg}\varphi' + r^2}{r\frac{dr}{d\varphi'} - r^2\operatorname{tg}\varphi'}$$

$$r\frac{dr}{d\varphi'} = -\frac{\sin^2\omega}{n^2 - m^2}\{n^2b^2\cos\varphi'\operatorname{cosec}^3\varphi' + m^2a^2\cos(\omega - \varphi')\operatorname{cosec}^3(\omega - \varphi')\}$$

Durch Substitution dieses Wertes und des Wertes von r^2 in die Formel für $\operatorname{tg}\tau_1$ findet man

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{m^2a^2\sin^2\varphi\,\{\operatorname{cotg}(\omega - \varphi')\operatorname{tg}\varphi' + 1\}}{n^2b^2\sin^2(\omega - \varphi')\{\operatorname{cotg}\varphi' + \operatorname{tg}\varphi'\} + m^2a^2\sin^2\varphi'\{\operatorname{cotg}(\omega - \varphi') - \operatorname{tg}\varphi'\}}$$

$$\therefore \operatorname{cotg}\tau_1 - \operatorname{cotg}\omega = \frac{n^2 b^2}{m^2 a^2}\,\frac{\sin^3(\omega - \varphi')}{\sin^3\varphi'\sin\omega} \qquad (10)$$

Nach (8) ist

$$\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{m^2}{n^2}\,\frac{\sin(\omega-\tau)}{\sin\tau}$$

also weil in einem Wendepunkte $\varphi=\varphi'$ ist

$$\frac{\sin(\omega-\tau_1)}{\sin\tau_1}=\frac{m^4 b^2}{n^4 a^2}\,\frac{\sin^2(\omega-\tau)}{\sin^2\tau} \tag{11}$$

Diese Formel gibt uns die Beziehung zwischen den Winkeln, welche die Tangenten in einem Wendepunkte an die Curve und an die Curve der Wendepunkte gezogen, machen.

Formel (8) gilt nicht im Coordinatenanfangspunkt; hier ist

$$\operatorname{cotg}\varphi=\frac{x}{y}=\frac{x_1+y_1\cos\omega}{y_1\sin\omega}=\frac{x_1}{y_1\sin\omega}+\operatorname{cotg}\omega$$

$$\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{cotg}\omega=\frac{x_1}{y_1\sin\omega}=\frac{a\sin 2n\theta}{b\sin\omega\,\sin 2m\theta}$$

Für $\theta=0$ wird die rechte Seite $=0/0$, durch Differentiation findet man

$$\frac{2na\cos 2n\theta}{2mb\sin\omega\cos 2m\theta}$$

also für $\theta=0$ ist

$$\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{na}{mb}$$

Nach (5) ist für $\theta=0$

$$\frac{\sin(\omega-\tau)}{\sin\tau}=\frac{na}{mb}$$

$\therefore$ im Coordinatenanfangspunkt ist $\varphi=\tau$.

Bei der Curve der Wendepunkte haben wir für $r=0$ gefunden

$$\frac{\sin(\omega-\varphi')}{\sin\varphi'}=\frac{ma}{nb}$$

und nach (10) ist

$$\frac{\sin(\omega-\tau_1)}{\sin\tau_1}=\frac{ma}{nb}$$

also

$$\tau_1=\varphi'$$

Weiter folgt aus diesen Formeln

$$\frac{\sin(\omega - \tau_1)}{\sin \tau_1} = \frac{m^4 b^2}{n^4 a^2} \frac{\sin^3(\omega - \tau)}{\sin^3 \tau}$$

Formel (11) gilt also in der Tat im Coordinatenanfangspunkt.

Für $x_1 = a$ und $y_1 = b$ oder $y = b \sin \omega$ ist

$$a : b = \sin(\omega - \varphi') : \sin \varphi'$$

also

$$\frac{\sin(\omega - \tau_1)}{\sin \tau_1} = \frac{n^2 b^2}{m^2 a^2} \frac{a^3}{b^3} = \frac{n^2 a}{m^2 b}$$

Aus (5) folgt

$$\operatorname{cotg} \tau - \operatorname{cotg} \omega = {}^0/_0$$

Die Differentiation der rechten Seite gibt:

$$\frac{\dfrac{n}{mb \sin \omega} \sin \dfrac{n}{m}\left(bg \sin \dfrac{y}{b \sin \omega} - \psi\right) \dfrac{1}{\sqrt{b^2 \sin^2 \omega - y^2}}}{\dfrac{y}{\sqrt{b^2 \sin^2 \omega - y^2}}}$$

und dieses wird für $y = b \sin \omega$ gleich $\frac{n}{m b \sin \omega}$

also

$$\frac{\sin(\tau - \omega)}{\sin \tau} = \frac{n^2 a}{m^2 b}$$

folglich haben wir in der Ecke des Parallelogramms $\tau = \tau_1$: dass die Formel in der rechten Seite ${}^0/_0$ wird, ist nur möglich, wenn die Werte $x_1 = \pm a$ und $y_1 = \pm b$ der Formel (3) genügen.

Die Formel (9) gibt nur den Ort eines Wendepunktes, wenn $a > x_1 > -a$ und $b > y_1 > -b$ ist. Die Curve dehnt sich jedoch weiter aus. Sie wird eine Asymptote haben, wenn x_1 bei einem bestimmten Werte der y_1 oder umgekehrt, unendlich gross ist.

Sei n, wie wir angenommen haben, grösser als m.

Aus (9) folgt

$$x_1 = \frac{m y_1 a}{\sqrt{\{b^2 n^2 - (n^2 - m^2) y_1^2\}}} = \frac{m y a}{\sqrt{\{b^2 n^2 \sin^2 \omega - (n^2 - m^2) y^2\}}}$$

also ist $x_1 = \infty$ für

$$y = \pm \frac{bn}{\sqrt{n^2 - m^2}} \sin \omega$$

Für eine Asymptote muss r unendlich gross werden bei einem bestimmten Werte von φ', dieses wird der Fall bei $\varphi' = 0$ (denn bei $\varphi' = \omega$ wird r imaginär), also ist:

$$\operatorname{cotg} \tau_1 - \operatorname{cotg} \omega = \infty \quad \text{und also} \quad \tau_1 = 0$$

Die Asymptoten sind der X Achse parallel und die Gleichung der Asymptoten wird also sein

$$y = \pm \frac{bn}{\sqrt{n^2 - m^2}} \sin \omega$$

In Fig. (3) sind die Linien OO' und PP' die Asymptoten; hier ist $n = 5$ und $m = 3$, also $y = \pm \, ^5/_4 \, b \sin \omega$.

Um den Krümmungsradius jedes Punktes der Curve zu finden, haben wir die Formel

$$\varrho = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{dy}{\partial t}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}} = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\Theta}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{dy}{d\Theta}\frac{d^2x}{d\Theta^2} - \frac{dx}{d\Theta}\frac{d^2y}{d\Theta^2}}$$

Nun ist:

$$y = b \sin \omega \sin(2m\Theta + \psi) \quad \text{und} \quad x = a \sin 2n\Theta + b \cos \omega \sin(2m\Theta + \psi)$$

$$\frac{dy}{d\Theta} = 2mb \sin\omega \cos(2n\Theta + \psi) = 2m\sqrt{b^2 \sin^2\omega - y^2} = 2m \sin\omega \sqrt{b^2 - y^2}$$

$$\frac{d^2y}{d\Theta^2} = -4m^2 b \sin\omega \sin(2m\Theta + \psi) = -4m^2 y = -4m^2 y_1 \sin\omega$$

$$\frac{dx}{d\Theta} = 2na \cos 2n\Theta + 2mb \cos\omega \cos(2m\Theta + \psi)$$

$$= 2n\sqrt{a^2 - (x - y \operatorname{cotg}\omega)^2} + 2m \operatorname{cotg}\omega \sqrt{b^2 \sin^2\omega - y^2}$$

$$= 2n\sqrt{a^2 - x_1^2} + 2m \cos\omega \sqrt{b^2 - y_1^2}$$

$$\frac{d^2x}{d\Theta^2} = -4n^2 a \sin 2n\Theta - 4mb \cos\omega \sin(2m\Theta + \psi)$$

$$= -4n^2(x - y \operatorname{cotg}\omega) - 4m^2 y \operatorname{cotg}\omega$$

$$= -4n^2 x_1 - 4m^2 y_1 \operatorname{cotg}\omega$$

weil

$$x - y \operatorname{cotg}\omega$$

und

$$\frac{\sin(\omega - \tau_1)}{\sin \tau_1} = \frac{m^4 b^2}{n^4 a^2} \frac{\sin^3(\omega - \tau)}{\sin^3 \tau}$$

Formel (11) gilt also in der Tat im Coordinatenanfangspunkt.

Für $x_1 = a$ und $y_1 = b$ oder $y = b \sin \omega$ ist

$$a : b = \sin(\omega - \varphi') : \sin \varphi'$$

also

$$\frac{\sin(\omega - \tau_1)}{\sin \tau_1} = \frac{n^2 b^2}{m^2 a^2} \frac{a^3}{b^3} = \frac{n^2 a}{m^2 b}$$

Aus (5) folgt

$$\operatorname{cotg} \tau - \operatorname{cotg} \omega = {}^0/_0$$

Die Differentiation der rechten Seite gibt:

$$\frac{\frac{n}{m b \sin \omega} \sin \frac{n}{m}\left(b y \sin \frac{y}{b \sin \omega} - \psi\right) \frac{1}{\sqrt{b^2 \sin^2 \omega - y^2}}}{\frac{y}{\sqrt{b^2 \sin^2 \omega - y^2}}}$$

und dieses wird für $y = b \sin \omega$ gleich $\frac{n}{m b \sin \omega}$

also

$$\frac{\sin(\tau - \omega)}{\sin \tau} = \frac{n^2 a}{m^2 b}$$

folglich haben wir in der Ecke des Parallelogramms $\tau = \tau_1$: dass di
Formel in der rechten Seite ${}^0/_0$ wird, ist nur möglich, wenn die W
$x_1 = \pm a$ und $y_1 = \pm b$ der Formel (3) genügen.

Die Formel (9) gibt nur den Ort eines Wendepunktes,
$a > x_1 > -a$ und $b > y_1 > -b$ ist. Die Curve dehnt sich jed
weiter aus. Sie wird eine Asymptote haben, wenn x_1 bei einem
stimmten Werte der y_1 oder umgekehrt, unendlich gross ist.

Sei n, wie wir angenommen haben, grösser als m.

Aus (9) folgt

$$x_1 = \frac{m y_1 a}{\sqrt{\{b^2 n^2 - (n^2 - m^2) y_1^2\}}} = \frac{m y a}{\sqrt{\{b^2 n^2 \sin^2 \omega - (n^2 - m^2) y^2\}}}$$

also ist $x_1 = \infty$ für

$$y = \pm \frac{b n}{\sqrt{n^2 - m^2}} \sin \omega$$

Digitized by Google

Für eine [illegible]
bestimmten W[illegible]
$\varphi' = \infty$ wird r [illegible]

Die Asym[illegible]
der Asymptoten [illegible]

In Fig. [illegible]
ist $n = 5$ und [illegible]

Um den [illegible]
haben wir die [illegible]

$$\varrho = [illegible]$$

Nun [illegible]

$y = b \sin$ [illegible]

$\frac{dy}{d\Theta} =$ [illegible]

$\frac{d^2y}{d\Theta^2} =$ [illegible]

$\frac{dx}{d\Theta} =$ [illegible]

$\frac{d^2x}{d\Theta^2} =$ [illegible] Zeichen nicht
[illegible] Beschleuni-
[illegible] ssen das ent-

weil

und

$$\therefore \varrho = \frac{1}{mn \sin \omega} \frac{\{n^2(a^2-x_1^2)+2mn\cos\omega\sqrt{(a^2-x_1^2)(b^2-y_1^2)}+m^2(b^2-y_1^2)\}^{3/2}}{my_1\sqrt{a^2-x_1^2}-nx_1\sqrt{b^2-y_1^2}}$$

Für $\omega = 90^0$ geht diese Formel über in

$$\varrho = \frac{1}{mn} \frac{\{n^2(a^2-x_1^2)+m^2(b^2-y_1^2)\}^{3/2}}{my_1\sqrt{a^2-x_1^2}-nx_1\sqrt{b^2-y_1^2}}$$

Für $\omega = 0$ sind alle Krümmungsradien unendlich gross. In den Wendepunkten muss ϱ unendlich gross sein; dieses ist auch der Fall, denn nach (5) ist dann

$$my_1\sqrt{a^2-x_1^2} = nx_1\sqrt{b^2-y_1^2}$$

Für Punkte in den Seiten des Parallelogramms ist $x_1 = \pm a$, also

$$\varrho = \frac{1}{mn\sin\omega} \frac{\{m^2(b^2-y_1^2)\}^{3/2}}{na\sqrt{b^2-y_1^2}} = \frac{m^2}{n^2\sin\omega}\frac{b^2-y_1^2}{a}$$

und für

$$y_1 = \pm b \quad \text{ist} \quad \varrho = \frac{n^2}{m^2\sin\omega}\frac{a^2-x_1^2}{b}$$

Wir haben gefunden: dass in einem Wendepunkte

$$\frac{n\sin 2n\Theta}{m\sin(2m\Theta+\psi)} = \frac{\cos 2n\Theta}{\cos(2m\Theta+\psi)}$$

ist, unabhängig vom Werte des ω.

Sehen wir was dieses bedeutet, wenn $\omega = 0$ ist. Der Punkt bewegt sich dann längs einer geraden Linie, und es kann dann nicht von einem Wendepunkte die Rede sein. Das Verhältniss der Geschwindigkeiten jeder der beiden Bewegungen ist in jedem Punkte:

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = \frac{na\cos 2n\Theta}{mb\cos(2m\Theta+\psi)}$$

und das Verhältniss der Beschleunigungen:

$$\frac{p_{x_1}}{p_{y_1}} = \frac{n^2 a\sin 2n\Theta}{m^2 b\sin(2m\Theta+\psi)}$$

Stellen wir in die erste Formel den Wert, den Θ haben muss für einen Punkt, der übereinstimmen wird mit einem Wendepunkte, so ist:

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = \frac{n^2 a\sin 2n\Theta}{m^2 b\sin(2m\Theta+\psi)} = \frac{p_{x_1}}{p_{y_1}}$$

Der Wendepunkt wird im Falle, dass $\omega = 0$ ist, ein Punkt, wo das Verhältniss der Geschwindigkeiten dem Verhältnisse der Be-

schleunigungen der beiden Bewegungen gleich ist. Wir werden auch im allgemeinen $2(n-m)$ solche Punkte finden. In Fig. 2 sind diese Punkte durch B_0 angegeben; die oscillirende Bewegung findet längs der X Achse statt.

Die Curve der Wendepunkte schneidet die Curve in mehreren Punkten und zwar in $4n$ Punkten, denn $2n$ Teile der Curve liegen zwischen den Seiten des Parallelogrammes, welche der Y_1 Achse parallel sind, und jeder Teil schneidet die Curve in 2 Punkten. $2(n+m)$ von diesen Punkten sind Wendepunkte, da bleiben also noch $2(n-m)$ Schnittpunkte übrig, und im speciellen Falle, dass die Curve durch zwei Ecken des Parallelogrammes geht, gibt es nur $n+m-1$ Schnittpunkte. Dass wir diese Punkte auch finden, hat seinen Grund darin, dass wir die Formel

$$my_1\sqrt{a^2-x_1^2} = nx_1\sqrt{b^2-y_1^2}$$

quadrirt haben. Zieht man aus der Formel (9) die Wurzel, so bekommt man nach Einführung der Θ:

$$m\,\mathrm{tg}(2m\Theta+\psi) = \pm\, n\,\mathrm{tg}\,2n\Theta$$

das positive Zeichen giebt die Wendepunkte, das negative die übrigen Schnittpunkte.

Für $\psi = 0$ genügt $\Theta = 0$ in beiden Beziehungen; die Curve geht dann durch den Coordinatenanfangspunkt, folglich genügt dieser Punkt der Bedingung eines Wendepunktes und der eines Schnittpunktes.

Wir finden für das negative Zeichen:

$$\frac{\cos m\Theta}{\cos(2m\Theta+\psi)} = -\frac{n\sin 2n\Theta}{m\sin(2m\Theta+\psi)}$$

Nach Multiplicirung mit $\frac{na}{mb}$, finden wir durch Substitution:

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = -\frac{p_{x_1}}{p_{y_1}}$$

In den Schnittpunkten sind also auch, wenn man das Zeichen nicht achtet, das Verhältniss der Geschwindigkeiten und das der Beschleunigungen einander gleich, jedoch hat eine dieser 4 Grössen das entgegengesetzte Zeichen der 3 anderen.

Nun ist

$$\frac{v_{x_1}}{v_{y_1}} = \frac{\sin(\omega-\gamma)}{\sin\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{p_{x_1}}{p_{y_1}} = \frac{\sin(\omega-\delta)}{\sin\delta}$$

also

$$\frac{\sin(\omega-\gamma)}{\sin\gamma} = -\frac{\sin(\omega-\delta)}{\sin\delta}$$

dies giebt

$$\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\delta = 2\operatorname{cotg}\omega$$

Diese Formel lehrt nns die Beziehnng, welche in einem Schnittpnnkte der beiden Curven, der kein Wendepnnkt ist, zwischen den Richtungen der Geschwindigkeit nnd der Beschlennigung bestehen mnss.

Für $\omega = 90^0$ wird

$$\gamma = 180^0 - \delta$$

Die Lissajous'schen Curven und die goniometrischen Functionen vielfacher Bogen.

Wir haben gefunden, dass die Coordinaten eines Punktes einer Lissajous'schen Curve sind:

$$x = a\sin 2n\Theta \quad \text{nnd} \quad y = b\sin(2m\Theta + \psi)$$

Setzen wir $2\Theta = \eta$, so wird

$$x = a\sin n\eta \quad \text{nnd} \quad y = b\sin(m\eta + \psi)$$

Ans diesen Gleichungen mnss η eliminirt werden, nm die Gleichnng der Curve zn finden.

m nnd n sind ganze Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so dass wir also folgende Fälle nnterscheiden können:

I	n gerade	m ungerade
II	n nngerade	m nngerade
III	n nngerade	m gerade

Sei die Phasendifferenz gleich 0, so ist

$$x = a\sin n\eta \quad \text{nnd} \quad y = b\sin m\eta$$

Nun ist

$$\sin m(n\eta) = \sin n(m\eta) \tag{1}$$

Ist es möglich $\sin m(n\eta)$ in eine Reihe von Potenzen von $\sin n\eta$ nnd $\sin n(m\eta)$ in eine Reihe von Potenzen von $\sin m\eta$ zn entwickeln, so haben wir die gewünschte Gleichung der Curve gefnnden. Nnn ist jedoch die Entwickelung des Sinus eines vielfachen Bogens in Potenzen des Sinns des einfachen Bogens nur möglich, wenn das Vielfach nngerade ist.[1])

1) Schlömilch. Alg. Analysis pag. 189.

Nur im IIten Falle wird die Entwickelung möglich sein, und wir bekommen:

$$\sum_{1}^{\frac{m+1}{2}} (-1)^{p-1} \frac{m}{1}\frac{(m^2-1^2)}{2}\frac{(m^2-3^2)}{3}\cdots\frac{\{m^2-(2p-3)^2\}}{2p-1} \sin^{2p-1} n\eta$$

$$= \sum_{1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{q-1} \frac{n}{1}\frac{(n^2-1^2)}{2}\frac{(n^2-3^2)}{3}\cdots\frac{\{n^2-(2q-3)^2\}}{2q-1} \sin^{2q-1} m\eta$$

$$\sum_{1}^{\frac{m+1}{2}} (-1)^{p-1} \frac{m}{1}\frac{(m^2-1^2)}{2}\frac{(m^2-3^2)}{3}\cdots\frac{\{m^2-(2p-3)^2\}}{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{a^{2p-1}}$$

$$= \sum_{1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{q-1} \frac{n}{1}\frac{(n^2-1^2)}{2}\frac{(n^2-3^2)}{3}\cdots\frac{\{n^2-(2q-3)^2\}}{2q-1} \frac{y^{2q-1}}{b^{2q-1}} \qquad (2)$$

Die Curve ist für x vom $m$ten Grade und für y vom $n$ten Grade.

In den beiden andern Fällen ist eine der Seiten der Formel (1) unentwickelbar. Erhebt man die Formel (1) in's Quadrat, so bekommen wir:

$$\sin^2 m(n\eta) = \sin^2 n(m\eta)$$

Wir müssen nun untersuchen, welche die Reihe sei, welche wir bekommen, so wir die 2te Potenz eines Sinus eines vielfachen Bogens entwickeln in eine Reihe von Potenzen des Sinus des einfachen Bogens.

$$\sin n\xi = n \sin\xi \cos^{n-1}\xi - \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3}\sin^3\xi\cos^{n-3}\xi$$

$$+ \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3}\frac{(n-3)}{4}\frac{(n-4)}{5}\sin^5\xi\cos^{n-5}\xi$$

$$- \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3}\frac{(n-3)}{4}\frac{(n-4)}{5}\frac{(n-5)}{6}\frac{(n-6)}{7}\sin^7\xi\cos^{n-7}\xi \text{ etc.}$$

also

$$\sin^2 n\xi = n^2\sin^2\xi\cos^{2n-2}\xi - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{1\,.\,3}\sin^4\xi\cos^{2n-4}\xi$$

$$+ \frac{n^2}{1}\frac{(n-1)^2}{2^2}\frac{(n-2)^2}{3^2}\sin^6\xi\cos^{2n-6}\xi$$

$$- \frac{n^2}{1}\frac{(n-1)}{3}\frac{(n-2)}{4}\frac{(n-3)n-4)}{5\quad 6}\frac{n-5)(n-6)}{7}\sin^8\xi\cos^{2n-8}\xi\ldots$$

$$+\frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\quad 3\quad 4\quad 5}\sin^6\xi\cos^{2n-6}\xi$$

$$-\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)(n-4)}{1\quad 2\quad 3^2\quad 4\quad 5}\sin^8\xi\cos^{2n-8}\xi\ldots$$

Setzen wir $1-\sin^2\xi$ für $\cos^2\xi$, so können wir die Potenzen nach dem Binomium Newton's entwickeln, und weil in der Formel nur ganze positive Potenzen vorkommen, werden wir endliche Reihen finden.

$$\sin^2 n\xi = n^2\sin^2\xi - \frac{n^2(n^2-1^2)}{1\,.\,3}\sin^4\xi + 2\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1\quad 3^2\quad 5}\sin^6\xi$$

$$-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1\quad 3^2\quad 5\quad 7}\sin^8\xi\ldots$$

$$\sin^2 n\xi = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{1}n^2\sin^2\xi - \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\frac{n^2(n^2-1^2)}{1\quad 3^2}\sin^4\xi\right.$$

$$+\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1\quad 3^2\quad 5^2}\sin^6\xi$$

$$-\frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad 7^2}\sin^8\xi\ldots$$

(3)

$$\therefore\ \sin^2 n\xi = \frac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots(2p-1)^2}\sin^{2p}\xi$$

Sei
$$\xi = \frac{\pi}{2}-u$$

$$\sin^2 n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots(2p-1)^2}\sin^{2p}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

Ist n gerade, so ist:

$$\sin^2 nu = \frac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2p-1)^2}\cos^{2p}u$$

Für n ungerade ist

$$\cos^2 nu = \frac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2p-1)^2}\cos^{2p}u$$

oder

$$\sin^2 nu = 1-\frac{1}{2}\sum_1^n(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2p-1)^2}\cos^{2p}u$$

Wenden wir (3) anf die Gleichnng

$$\sin^2 m(n\eta) = \sin^2 n(m\eta)$$

an, so bekommen wir:

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^m (-)^{p-1} C_p^{2p} \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1 \quad 3^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad (2p-1)^2} \sin^{2p} n\eta$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_1^n (-1)^{q-1} C_q^{2q} \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1 \quad 3^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad (2q-1)^2} \sin^{2q} m\eta$$

oder

$$\sum_1^m (-1)^{p-1} C_p^{2p} \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1 \quad 3^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad (2p-1)^2} \frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$

$$= \sum_1^n (-1)^{q-1} C_q^{2q} \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1 \quad 3^2 \quad 5^2 \quad \ldots \quad (2q-1)^2} \frac{y^{2q}}{b^{2q}} \qquad (6)$$

Die Curve ist also für x vom $2m$ten Grade und für y vom $2n$ten Grade. In der Formel kommen nnr gerade Potenzen der y und der x vor, deswegen wird die Cnrve symmetrisch in Bezug anf beide Achsen sein.

Wir werden jetzt die speciellen Fälle nntersuchen, dass $\psi = 90^0$, 180^0 oder 270^0 ist, was übereinstimmt mit einer Phasendifferenz gleich $\frac{1}{4}\lambda'$; $\frac{1}{2}\lambda'$ und $\frac{3}{4}\lambda'$.

Ist $\psi = 90^0$, so werden die Gleichuugen, welche die Stelle des Pnnktes geben:

$$x = a\sin n\eta \quad \text{und} \quad y = b\sin(m\eta + \tfrac{1}{2}\pi) = b\cos m\eta$$

Gebranchen wir das Axiom

$$\cos m(n\eta) = \cos n(m\eta)$$

Der Cosinns des vielfachen Bogens kann nur in einer Reihe von Potenzen des Sinns des einfachen Bogens entwickelt werden, wenn das Vielfach gerade ist.[1]) Er kann immer in einer Reihe von Potenzen des Cosinns des einfachen Bogens entwickelt werden.[2]) Die Gleichnng der Cnrve wird im IIIten Falle, das ist wenn n nngerade und m gerade ist:

$$1 + \sum_1^{\frac{1}{2}m} (-1)^p \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\{m^2-(2p-2)^2\}}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 2p} \sin^{2p} n\eta$$

1) Schlömilch. Alg. Analysis pag. 188.

2) „ „ „ , 192.

$$= \tfrac{1}{2}\Big\{(2\cos m\eta)^n - \frac{n}{1}(2\cos m\eta)^{n-2} + \frac{n\,(n-3)}{1\quad 2}(2\cos m\eta)^{n-4}$$

$$- \frac{m\,(n-4)(n-5)}{1\quad 2\quad 3}(2\cos m\eta)^{n-6} \quad \text{u. s. w.}\Big\}$$

oder

$$1 + \sum_{1}^{\frac{1}{2}m}(-1)^p \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\{m^2-(2p-2)^2\}}{1\quad 2\quad 3\quad \ldots\quad 2p}\frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big\{\frac{2^n y^n}{b^n} - \frac{n}{1}\frac{2^{n-2}y^{n-2}}{b^{n-2}} + \frac{n\,(n-3)}{1\quad 2}\frac{2^{n-4}y^{n-4}}{b^{n-4}}$$

$$- \frac{n\,(n-4)(n-5)}{1\quad 2\quad 3}\frac{2^{n-6}y^{n-6}}{b^{n-6}}\ldots \quad \text{u. s. w.}\Big\} \tag{7}$$

Die Curve ist für x vom $m$ten Grade, für y vom $n$ten Grade. n dieser Formel kommen nur gerade Potenzen der x vor, also ist die Curve symmetrisch zur Y Achse.

Im IIten Falle sind m und n ungerade, also ist $\cos n\,(m\eta)$ unentwickelbar in eine Reihe von Potenzen von $\sin n\,\eta$, wir müssen wieder gebrauchen die Formel:

$$\sin^2 m\,(n\eta) = \sin^2 n\,(m\eta)$$

Werden diese Functionen entwickelt nach den Formeln (3) und (5), so finden wir:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{m}(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2p-1)^2}\sin^{2p}n\eta$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}(-1)^{q-1}C_q^{2q}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2q-1)^2}\cos^{2q}m\eta$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{m}(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2p-1)^2}\frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}(-1)^{q-1}C_q^{2q}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2q-1)^2}\frac{y^{2q}}{b^{2q}}$$

Diese Curve ist symmetrisch in Bezug auf beide Achsen und sie ist für x vom $2m$ten und für y vom $2n$ten Grade. Sie geht nicht durch den Coordinatenanfangspunkt.

Ist nun im Iten Falle n gerade und m ungerade, so finden wir bei der Entwickelung:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{m}(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2p-1)^2}\sin^{2p}n\eta$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}(-1)^{q-1}C_q^{2q}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2q-1)^2}\cos^{2q}m\eta$$

oder

$$\sum_{1}^{m}(-1)^{p-1}C_p^{2p}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(p-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2p-1)^2}\frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$

$$=\sum_{1}^{n}(-1)^{q-1}C_q^{2q}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(q-1)^2\}}{1\quad 3^2\quad 5^2\quad\ldots\quad(2q-1)^2}\frac{y^{2q}}{b^{2q}}$$

Diese Gleichnng ist der Formel (6) gleich; die Cnrve wird in diesem Falle dieselbe sein, als wenn dio Phasendifferenz gleich 0 wäro.

Ist $\psi = 180^0$, so wird

$$x = a\sin n\eta \quad \text{und} \quad y = b\sin(m\eta + \pi) = -b\sin m\eta$$

Im ersten nnd dritten Falle finden wir dieselben Gleichnngen für die Cnrven, als wenn die Phasendifferenz 0 wäre; im zweiten Falle wird die Gleichung (2)

$$\sum_{1}^{\frac{m+1}{2}}(-1)^{p-1}\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots\{m^2-(2p-3)^2\}}{1\quad 2\quad 3\quad\ldots\quad 2p-1}\frac{x^{2p-1}}{a^{2p-1}}$$

$$=\sum_{1}^{\frac{n+1}{2}}(-1)^{q-1}\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots\{n^2-(2q-3)^2\}}{1\quad 2\quad 3\quad\ldots\quad 2q-1}\frac{(-y)^{2q-1}}{b^{2q-1}}$$

Die Potenzen, welche in der rechten Seite vorkommen, sind nngerade, also haben diese Glieder das entgegengestellte Zeichen wie in der Formel (2). Hieraus folgt, dass die Cnrven, welche bei denselben n nnd m entstehen, bei einer Phasendifferenz gleich 0 oder gleich $\frac{1}{2}\lambda'$ Spiegelbilder von einander sind.

Znm Schlnsse sei die Phasendifferenz $\frac{3}{4}\lambda'$, so finden wir im ersten nnd zweiten Falle dieselben Curven, als wenn die Phasendifferenz $\frac{1}{4}\lambda'$ wäre. Im dritten Fallo finden wir jedoch, weil

$$x = a\sin n\eta \quad \text{und} \quad y = b\sin(m\eta + {}^3/_2\pi) = -b\sin m\eta$$

ist

$$1+\sum_{1}^{\frac{1}{2}m}(-1)^p\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)\ldots\{m^2-(2p-2)^2\}}{1\quad 2\quad 3\quad\ldots\quad 2p}\frac{x^{2p}}{a^{2p}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{2^n(-y)^n}{b^n}-\frac{n}{1}\frac{2^{n-2}(-y)^{n-2}}{b^{n-2}}+\frac{n(n-3)}{1\quad 2}\frac{2^{n-4}(-y)^{n-4}}{b^{n-4}}\right.$$

$$\left.-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\quad 2\quad 3}\frac{2^{n-6}(-y)^{n-6}}{b^{n-6}}\ldots\text{ u. s. w.}\right\}$$

Da n nngerade ist, so sind alle Potenzen, welche in der rechten Seite vorkommen, nngerade, also haben diese Glieder das entgegengesetzte Zeichen derselben Glieder in der Formel (7), also sind die Cnrven, welche im 3ten Falle entstehen, bei der Phasendifferenz $\frac{3}{4}\lambda'$ wie bei $\frac{1}{4}\lambda'$.

Im ersten Falle bekommen wir also bei jeder der genannten Phasendifferenz dieselben Curven.

Wir könnten jetzt noch nntersnchen die Fälle, dass die Phasendifferenzen $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$ nnd $\frac{3}{4}\lambda$ waren, aber wir würden dasselbe finden, als wenn wir n nnd m mit einander wechselten. Fig. 4 zeigt die Richtigkeit des Abgeleiteten. Diese Betrachtungen gelten eben so gut für ein schiefwinkliges, wie für ein rechtwinkliges Coordinatensystem.

Schiedam, Juli 1886.

III.

Erweiterung zweier Sätze auf n Dimensionen.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Bermann'scher Satz.

In Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. XXXI. S. 381 enthält ein Aufsatz überschrieben: „Ein Minimumproblem" Von O. Bermann — einen Satz über die Berührungsebene einer Fläche der nebst seinem Beweise nichts von seiner Einfachheit verliert, wenn man ihn sogleich auf beliebig viele Dimensionen erweitert. Er lautet alsdann:

„Das $n$dehnige $(n+1)$eck begrenzt von n $(n-1)$dehnigen n-ecken, deren eins eine feste krumme $(n-1)$dehnung berührt, während die übrigen in festen linearen $(n-1)$dehnungen liegen, ist bei variirendem Berührungspunkt ein Minimum, nur wenn der Berührungspunkt Schwerpunkt jenes berührenden $n$ecks ist."

Zum Beweise bedarf es zunächst eines passenden Ausdrucks für den Inhalt eines $n$dehnigen $(n+1)$ecks V. Sind die von einer Ecke ausgehenden n Kanten $r_1, r_2, \ldots r_n$ sämtlich normal zu einander, so ist offenbar

$$V = \frac{r_1 r_2 \ldots r_n}{n!}$$

Gibt man nun der Kante r_2 gegen die Kante r_1, dann der Kante r_3 gegen die Ebene $r_1 r_2$, dann der Kante r_4 gegen den Raum $r_1 r_2 r_3$ u. s. f. eine Neigung, so multiplicirt sich jedesmal bei unveränderter Basis die Höhe von V, mithin auch V selbst mit dem Sinus des Neigungswinkels. Da alle diese Winkel von der Lage des $(n+1)$ten

$n$ecks, welches den Ausgangspunkt der r nicht enthält, unabhängig sind, so kann man, gültig für beliebige Neigungen, schreiben:

$$V = Cr_1 r_2 \ldots r_n \qquad (1)$$

wo C gegen alle Veränderungen der r und der durch ihre Endpunkte bestimmten $(n-1)$dehnung constant ist.

Der Schnittpunkt der n festen linearen $(n-1)$dehnungen sei Anfang der orthogonalen Coordinaten x, x_1, x_2, ... x_{n-1}. Sind nun p, p_1, ... p_{n-1} die Richtungscosinus der Normale der krummen $(n-1)$-dehnung Ω im Punkte $(x, \ldots)$, ξ, ξ_1, ... ξ_{n-1} die Coordinaten eines Punkts der berührenden linearen $(n-1)$dehnung, und setzt man

$$M = \Sigma px \qquad (2)$$

so ist die Gleichung der Berührenden;

$$\Sigma p\xi = M \qquad (3)$$

Sind ferner a_k, a_{k1}, a_{k2}, ... die Richtungscosinus der $k$ten Kante r_k, mithin $r_k a_k$, etc. die Coordinaten des Schnittpunkts mit der Berührenden, so ist nach Gl. (3)

$$r_k \Sigma pa_k = M \qquad (4)$$

daher das Volum des $n$dehnigen $(n+1)$ecks nach Gl. (1)

$$V = \frac{CM^n}{\Pi_k \Sigma pa_k} \qquad (5)$$

woraus:

$$\partial V = V\left\{\frac{n\,\partial M}{M} - \Sigma_k \frac{\Sigma a_k \partial p}{\Sigma p a_k}\right\}$$

Da nun $\Sigma p\,\partial x = 0$ ist, so hat man nach Gl. (2)

$$\partial M = \Sigma x \partial p$$

Die Differentiale ∂p, etc., welche jetzt allein vorkommen, hangen bloss durch die Relation

$$\Sigma p\,\partial p = 0$$

von einander ab. Soll also V ein Minimum sein, so ist erste Bedingung:

$$\frac{nx}{M} - \Sigma_k \frac{a_k}{\Sigma p a_k} = \lambda p$$

$$\frac{nx_1}{M} - \Sigma_k \frac{a_{k1}}{\Sigma p a_{k1}} = \lambda p_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{nx_{n-1}}{M} - \Sigma_k \frac{a_{kn-1}}{\Sigma pa_{kn-1}} = \lambda p_{n-1}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit p, p_1, ... p_{n-1}, so ergibt ihre Summe:

$$n - \Sigma 1 = \lambda \quad \text{oder} \quad \lambda = 0$$

und man hat:

$$x = \frac{M}{n} \Sigma_k \frac{a_k}{\Sigma p a_k}; \quad \text{etc.}$$

Die Coordinate der $k$ten Ecke der berührenden $n$dehnung ist nach Gl. (4)

$$\xi_k = r_k a_k = \frac{M a_k}{\Sigma p a_k}$$

folglich

$$\xi_k - x = \frac{M}{n}\left(\frac{n a_k}{\Sigma p a_k} - \Sigma_k \frac{a_k}{\Sigma p a_k}\right)$$

gültig für $k = 1, 2, \ldots n$ und für alle Coordinaten x. Die Werte befriedigen die Gleichungen:

$$\Sigma_k(\xi_k - x) = 0; \quad \text{etc.}$$

folglich ist der Berührungspunkt Schwerpunkt der Ecken des $n$ecks, mithin bekanntlich auch Schwerpunkt des $n$ecks selbst (vergl. T. V. S. 420).

Hiermit ist die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen; ob sie ausreichend sei, bleibt auch im citirten Aufsatze für 3 Dimensionen unentschieden.

§. 2. Routh'scher Satz.

Im Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, V. XXI. p. 281. sind zu Anfang eines Aufsatzes von E. J. Routh die Werte des Integrals $\int z^n \partial V$, wenn sich dasselbe über ein Dreieck, Viereck, Tetraeder und körperliches Fünfeck erstreckt, aufgestellt.

Die bemerkenswerte, vom Verfasser weiterhin fruchtbar gemachte Eigenschaft dieser Ausdrücke, dass sie nämlich ausser dem Factor V nur Coordinaten gewisser Punkte in der einen zRichtung enthalten, liess vermuten, dass jene 4 speciellen Figuren aus einer umfassenderen Classe von Figuren hergeleitet werden können. Betrachtet man zunächst das Dreieck und Tetraeder als Anfang der Reihe der $n$dehnigen $(n+1)$ecke, so lässt sich in der Tat das ebene Viereck und körperliche Fünfeck durch Projection des dreidehnigen Vierecks auf die Ebene, des vierdehnigen Fünfecks auf den Raum gewinnen, und so eine zweite Reihe von Figuren aus der ersten herleiten. Die Berechnung der entsprechenden Formel ergibt sich jedoch einfacher nach derjenigen Beziehung der zweiten Reihe zur ersten, in welche

sie an der citirten Stelle gesetzt wird, der gemäss das $n$dehnige $(n+2)$eck aus zwei $n$dehnigen $(n+1)$ecken mit einer gemeinsamen Seite besteht. Wir wollen daher zuerst die Formel für das $n$dehnige $(n+1)$eck berechnen, daraus durch Addition die Formel für das $n$dehnige $(n+2)$eck ableiten und schliesslich auf die erstgenannte Beziehung näher eingehen.

§. 3. Erweiterter Routh'scher Satz für $n$dehniges $(n+1)$eck.

Substituirt man für die Abscisse x des Elements eines $n$dehnigen $(n+1)$ecks V auf beliebiger Axe mit beliebigem Anfang (nach T. V. S. 419) folgende Function der Unabhängigen u_1. u_2, .., u_n

$$x = \sum_{k=1}^{k=n+1} (x_k - x_{k+1}) u_k u_{k+1} \dots u_n \quad (x_{n+2} = 0)$$

wo x_k die Abscisse der $k$ten Ecke von V bezeichnet, und macht Anwendung auf n orthogonale Axen, so lautet die Functionsdeterminante

$$\Delta = n!\, V u_2 u_3^2 u_4^3 \dots u_n^{n-1}$$

und das Element

$$\partial V = \Delta \partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n$$

erfüllt V, wenn alle u von 0 bis 1 variiren.

Sei nun z Abscisse von ∂V in beliebiger Richtung, in oder ausser der $n$dehnung, so dass

$$z = \sum_{k=1}^{k=n+1} (z_k - z_{k+1}) u_k u_{k+1} \dots u_n \quad (z_{n+2} = 0)$$

und man setzt

$$z(\mu, \nu) = (z_\mu - z_\nu) u_{\nu-1} u_\nu \dots u_n + \sum_{k=\nu}^{k=n+1} (z_k - z_{k+1}) u_k \dots u_n$$

so wird

$$\int_0^1 z^\varkappa(\mu, \nu) \partial u_{\nu-1} = \int_0^1 z^\varkappa(\mu, \nu) \frac{\partial z(\mu, \nu)}{\partial u_{\nu-1}} \partial u_{\nu-1} \cdot \frac{1}{(z_\mu - z_\nu) u_\nu \dots u_n}$$

$$= \frac{z^{\varkappa+1}(\mu, \nu+1) - z^{\varkappa+1}(\nu, \nu+1)}{(\varkappa+1)(z_\mu - z_\nu) u_\nu \dots u_n}$$

daher insbesondere (für $\mu = 1$; $\nu = 2$, dann $\mu = 1, 2$; $\nu = 3$, etc.)

$$\int_0^1 z^p \partial u_1 = \frac{z^{p+1}(1,3) - z^{p+1}(2,3)}{(p+1)(z_1 - z_3)u_2 \ldots u_n}$$

$$\int_0^1 u_2 \partial u_2 \int_0^1 z^p \partial u_1 = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \left\{ \frac{z^{p+2}(1,4) - z^{p+2}(3,4)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \right.$$

$$\left. + \frac{z^{p+2}(2,4) - z^{p+2}(3,4)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} \right\} \frac{1}{(u_3 \ldots u_n)^2}$$

$$= \frac{1}{(p+1)(p+2)} \left\{ \frac{z^{p+2}(1,4)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} + \frac{z^{p+2}(2,4)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} \right.$$

$$\left. + \frac{z^{p+2}(3,4)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \right\} \frac{1}{(u_3 \ldots u_n)^2}$$

demnach, wie leicht zu ersehen, allgemein

$$\int_0^1 u_h^{h-1} \partial u_h \int_0^1 \ldots \int_0^1 u_2 \partial u_2 \int_0^1 z^p \partial u_1 =$$

$$\frac{1}{(p+1)\ldots(p+h)(u_{h+1} \ldots u_n)^h} \sum_{k=1}^{k=h+1} \frac{z^{p+h}(k, h+2)}{(z_k - z_1)\ldots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\ldots(z_k - z_h)}$$

woraus für $h = n$:

$$\int z^p \partial V = n!\, V \int_0^1 \ldots \int_0^1 z^p u_2 u_3^2 \ldots u_n^{n-1} \partial u_1 \ldots \partial u_n =$$

$$\frac{n!\, V}{(p+1)\ldots(p+n)} \times \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{z_k^{p+n}}{(z_k - z_1)\ldots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\ldots(z_k - z_n)} \qquad (6)$$

§. 4. Erweiterter Routh'scher Satz für $n$dehniges $(n+2)$eck.

Nehmen wir nun das $(n-1)$dehnige $n$eck

$$(2,\ 3,\ \ldots\ n+1)$$

als gemeinsame Seite der zwei $n$dehnigen $(n+1)$ecke

$$V' \equiv (1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n+1), \qquad V'' \equiv (2,\ 3,\ \ldots\ n+2)$$

so stellt die Gesamtfigur $V = V' + V''$ ein $n$dehniges $(n+2)$eck dar, für welches

$$\int z^p \partial V = \int z^p \partial V' + \int z^p \partial V''$$

durch Addition zweier Werte der Function (6) erhalten wird nämlich

$$\int z^p \partial V = \frac{n!}{(p+1)\dots(p+n)} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{V' z_k^{p+n}}{(z_k - z_1)\dots(z_k - z_{n-1})} + \sum_{k=2}^{k=n+2} \frac{V'' z_k^{p+n}}{(z_k - z_2)\dots(z_k - z_{n+2})} \right\}$$

Die Summe der allgemeinen Terme beider Reihen ist, wenn N_k den Generalnenner bezeichnet,

$$= z_k^{p+n} \frac{V'(z_k - z_{n+2}) + V''(z_k - z_1)}{N_k}$$

$$= z_k^{p+n} \frac{V z_k - D}{N_k}$$

wo

$$N_k = (z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_{n+2}) \tag{7}$$

$$D = V' z_{n+2} + V'' z_1 \tag{8}$$

Dieser Wert bleibt auch für $k = 1$ und $k = n+2$ richtig, folglich ist

$$\int V^p \partial V = \frac{n!}{(p+1)\dots(p+n)} \sum_{k=1}^{k=n+2} z^{p+n} \frac{V z_k - D}{N_k} \tag{9}$$

Wird nun die gemeinsame Seite von V' und V'' von der Diagonale $(1, n+2)$ im Punkte (0) geschnitten, so verhält sich

$$z_1 - z_0 : z_0 - z_{n+2} = V' : V''$$

daher ist

$$z_1 = z_0 + \lambda V'; \quad z_{n+2} = z_0 - \lambda V''$$

also nach Gl. (8)

$$D = V z_0$$

und man hat:

$$\int z^p \partial V = \frac{n! V}{(p+1)\dots(p+n)} \sum_{k=1}^{k=n+2} z^{p+n} \frac{z_k - z_0}{N_k} \tag{10}$$

§. 5. Schlussbemerkung.

Die Projection eines $n$dehnigen $(n+1)$ecks auf eine lineare $(n-1)$dehnung ist entweder ein $n$eck oder $(n+1)$eck (letzteres mit seinen Diagonalgebilden, ersteres mit einem Punkte und dessen Verbindungsgebilden im Innern). Alle $k$dehnigen linearen Grenzgebilde

des n dehnigen $(n+1)$ ecks sind nämlich $(k+1)$ ecke, als solche mithin sämtlich convexe Figuren, die von einer Geraden nur in 2 Punkten geschnitten werden können. Der Umfang (d. i. Seitensumme) des n dehnigen $(n+1)$ ecks V sei Ω. Jede Seite von V ist ein $(n-1)$-dehniges n eck, daher ihre Projection auf eine lineare $(n-1)$ dehnung gleichfalls. Nur die noch übrige Ecke von V kann sich in verschiedener Lage projiciren. Entweder fällt ihre Projection in das Innere jenes n ecks oder nicht. Demnach sind nur die 2 Fälle zu unterscheiden: Fällt die Projection irgend einer Ecke von V in das Innere der Projection der Gegenseite, so ist die Projection von V und Ω ein n eck, fällt die Projection keiner Ecke in das Innere der Projection der Gegenseite, ein $(n+1)$ eck.

Bezeichnet Ω' die Projection von Ω, so gibt im ersten Falle Gl. (6), im zweiten Gl. (10) den Wert von

$$\int z^p \partial\Omega'$$

wenn man die $n-1$ ersten Coordinatenaxen in die Projectionsbasis legt und $n-1$ statt n setzt.

Die Beziehung zwischen den verglichenen Projectionen ist folgende. Das $(n-1)$ dehnige n eck hat eine Ecke weniger als Ω, daher fallen in Ω' alle Grenzgebilde weg, welche diese Ecke besitzen. Das $(n-1)$ dehnige $(n+1)$ eck hat eine Kante weniger als Ω, daher gehen in Ω' alle Grenzgebilde in Diagonalgebilde über, welche diese Kante besitzen.

Ein allgemeines Kriterium der 2 Fälle lässt sich schwerlich geben.

Digitized by Google

IV.

Ueber Triederschnitte und Minimaltetraeder.

Von

Dr. **Bermann**

in Liegnitz.

Vor längerer Zeit [1]) untersuchte ich in einer Programmarbeit die Oerter der Schwerpunkte solcher Dreiecke, in welchen ein Trieder (Dreikant) von einer Ebene geschnitten wird. Ich bezeichnete dieselben als „Triederschnitte". Dabei nahm ich an, dass die schneidenden Ebenen entweder durch einen festen Punkt oder eine feste Achse gehen oder Berührungsebenen gegebener Flächen seien oder endlich ein Tetraeder von gegebenem Volumen abschneiden; auch betrachtete ich den Fall, wo der Triederschnitt eine vorgeschriebene Gestalt hat. Im Folgenden beabsichtige ich, hierzu noch Einzelnes nachzutragen.

Die Kanten des Trieders seien die Achsen der x, y, z, und es bedeute α den Winkel (y, z), β (x, z), γ (x, y). ξ, η, ζ mögen die Coordinaten des Schwerpunkts eines Triederschnitts bezeichnen, t, u, v die Parameter der schneidenden Ebene auf den Achsen der x, y, z. Es ist dann $t = 3\xi$, $u = 3\eta$, $v = 3\zeta$.

I. Zur Ermittelung der bei gegebenem Ort des Schwerpunkts von den schneidenden Ebenen umhüllten Gebilde ist zwischen den Gleichungen dieser Ebene, des gegebenen Ortes und ihren ersten Differentialgleichungen ξ, η, ζ, $D_\xi\zeta$ und $D_\eta\zeta$ zu eliminiren. Es ist aber erstere Gleichung

---

1) Progr. 1874. des Gymn. zu Liegnitz.

$$\frac{x}{t}+\frac{y}{u}+\frac{z}{v}=1$$

oder

(1) $$\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=3$$

und hieraus

(2) $$\begin{cases} D_{\xi}\zeta = -\dfrac{\zeta^2}{\xi^2}\cdot\dfrac{x}{z} \\ D_{\eta}\zeta = -\dfrac{\zeta^2}{\eta^2}\cdot\dfrac{y}{z} \end{cases}$$

Ist der Ort des Schwerpunktes ein auf die Kanten des Trieders als seine zugeordneten Durchmesser bezogenes Ellipsoid

(3) $$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta}{b}\right)^2+\left(\frac{\zeta}{c}\right)^2=1$$

so hat man

(4) $$\begin{cases} D_{\xi}\zeta = -\dfrac{c^2}{a^2}\,\dfrac{\xi}{\zeta} \\ D_{\eta}\zeta = -\dfrac{c^2}{b^2}\,\dfrac{\eta}{\zeta} \end{cases}$$

Aus (2) und (4) folgt

$$\xi=\zeta\sqrt[3]{\frac{a^2x}{c^2z}},\quad \eta=\zeta\sqrt[3]{\frac{b^2y}{c^2z}}$$

und dann aus (3)

$$\zeta=\frac{c}{\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{c^2x^2}{a^2z^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{c^2y^2}{b^2z^2}}+1}}$$

Die Substitution dieser Werte in (1) liefert dann nach einigen leichten Umformungen

(5) $$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$$

als Gleichung der von den schneidenden Ebenen umhüllten Fläche[1]),

1) Die — um es so auszudrücken — umgekehrte Aufgabe, d. h. die Bedingung, dass die schneidenden Ebenen ein dem obigen gleiches Ellipsoid umhüllen sollen, führt zu der Fläche 6. Ordnung

$$\left(\frac{a}{3\xi}\right)^2+\left(\frac{b}{3\eta}\right)^2+\left(\frac{c}{3\zeta}\right)^2=1$$

als Ort des Schwerpunkts. S. Progr. 74, S. 11.

Mit sechs Rückkehrpunkten erstreckt diese sich auf den Achsen bis $\pm 3a$, $3b$, $3c$ (vom Scheitel aus gerechnet); die Dreikantflächen und die denselben (innerhalb leicht zu berechnenden Grenzen) parallelen Ebenen schneidet sie in Ellipsen-Evoluten; nämlich die xy-Ebene in der Evolute der Ellipse, deren zugeordnete Durchmesser auf den Achsen der x und y bezhw. $\frac{3ab^2}{a^2-b^2}$, $\frac{3a^2b}{a^2-b^2}$ sind, die anderen Flächen in Evoluten von Ellipsen mit den zugeordneten Durchmessern:

$$\frac{3bc^2}{b^2-c^2},\quad \frac{3b^2c}{b^2-c^2};\quad \frac{3ac^2}{a^2-c^2},\quad \frac{3a^2c}{a^2-c^2}$$

Hat man insbesondere ein rechtwinkliges Dreikant, um dessen Scheitel eine Kugelfläche vom Radius r gelegt ist, welche den Schwerpunktsort bilden soll, so reducirt sich Gl. (5) auf

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=(3r)^{\frac{2}{3}}$$

Es sei zweitens der Schwerpunkts-Ort die Ebene

(6) $$\frac{\xi}{a}+\frac{\eta}{b}+\frac{\zeta}{c}=1$$

also

$$D_\xi\zeta=-\frac{c}{a},\qquad D_\eta\zeta=-\frac{c}{b}$$

so hat man bei Zuziehung von (2)

$$\xi=\zeta\sqrt{\frac{ax}{cz}},\qquad \eta=\zeta\sqrt{\frac{by}{cz}}$$

Hieraus durch Substitution in (6):

$$\zeta=\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)\sqrt{cz}$$

$$\eta=\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)\sqrt{by}$$

$$\xi=\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)\sqrt{ax}$$

und endlich aus Gl. (1):

(7) $$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=3$$

als Gleichung der von den schneidenden Ebenen umhüllten Fläche. — Sie ist 4. Ordnung, die Reciprocale des Schwerpunkts-Ortes der

durch den festen Punkt $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ gehenden Triederschnitte [1]) und schneidet die Triederflächen in Kegelschnitten.

Es sei drittens der Ort des Schwerpunktes die Gerade

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{\zeta}{a} + \frac{\xi}{b} &= 1 \\ \frac{\zeta}{c} + \frac{\eta}{d} &= 1 \end{aligned}$$

also

$$D_\xi \zeta = -\frac{a}{b}, \quad D_\eta \zeta = -\frac{c}{d}$$

so ergibt sich analog

$$\xi = \zeta \sqrt{\frac{bx}{az}}, \quad \eta = \zeta \sqrt{\frac{dy}{cz}}$$

und dann

$$\zeta = \tfrac{1}{3} \sqrt{z} \left(\sqrt{\frac{ax}{b}} + \sqrt{\frac{cy}{d}} + \sqrt{z} \right)$$

$$\eta = \tfrac{1}{3} \sqrt{\frac{dy}{c}} \left(\sqrt{\frac{ax}{b}} + \sqrt{\frac{cy}{d}} + \sqrt{z} \right)$$

$$\xi = \tfrac{1}{3} \sqrt{\frac{bx}{a}} \left(\sqrt{\frac{ax}{b}} + \sqrt{\frac{cy}{d}} + \sqrt{z} \right)$$

Durch Substitution in (8) ergibt sich endlich die Gleichung der Gratlinie, deren Schmiegungsebenen die Ebenen der Triederschnitte sind:

$$(9) \qquad \begin{cases} (\sqrt{ax} + \sqrt{bz})(\sqrt{adx} + \sqrt{bcy} + \sqrt{bdz}) = 3ab\sqrt{d} \\ (\sqrt{cy} + \sqrt{dz})(\sqrt{adx} + \sqrt{bcy} + \sqrt{bdz}) = 3cd\sqrt{b} \end{cases}$$

Die Division der einen dieser Gleichungen in die andere führt zu

$$c\sqrt{ad}\sqrt{x} - a\sqrt{bc}\sqrt{y} = (a-c)\sqrt{bd}\sqrt{z} \qquad (10)$$

der Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, der mit dem Trieder den Scheitel gemeinschaftlich hat und mithin auch seine drei Flächen geradlinig schneidet, jede der beiden Flächen vierter Ordnung aber, welche durch eine der Gl. (9) ausgedrückt werden, in der obigen Gratlinie.

---

1) Progr. 74. S. 2.

Digitized by Google

Durch Elimination je einer Variabeln zwischen den beiden Gleichungen (9), bezhw. Gleichung (10), gelangt man zu den Projectionsgleichungen der Gratlinie. So durch Elimination von z und dann von y zu:

$$a^4 d^2 x^2 - 2abcd(a^2+c^2)xy + b^2c^4y^2 - 6a^2(a-c)^2 bd^2 x - 6c^2(a-c)^2 b^2 dy + 9(a-c)^4 b^2 d^2 = 0$$

$$(a+c)^2 a^2 x^2 - abc(a+c)xz + b^2c^2z^2 - 6a^2b(a+c)x - 6ab^2cz + 9a^4b^2 = 0$$

Die Gratlinie ist mithin eine Raumcurve 4. Ordnung, die gemeinschaftliche Durchdringungscurve dreier den Triederkanten paralleler hyperbolischer Cylinder.

Die Fläche $\xi\eta\zeta = a^3$, deren Tangentialebenen vom Trieder volumengleiche Tetraeder abschneiden, besitzt (S. Progr. 74 S. 13) auch die Eigenschaft, dass die Berührungspunkte ihrer Tangentialebenen die Schwerpunkte der zugehörigen Triederschnitte sind. Bei dem vorstehenden Verfahren muss sich bei ihr also wieder dieselbe Fläche ergeben (als von den schneidenden Ebenen umhüllt).

In der Tat ist hier auch:

$$D_\xi \zeta = -\frac{\zeta}{\xi}, \quad D_\eta \zeta = -\frac{\zeta}{\eta}$$

also wegen (2):

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{y}{z} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{x}{z}.\zeta, \quad \eta = \frac{y}{z}.\zeta$$

Durch Substitution in $\xi\eta\zeta = a^3$:

$$\zeta = a\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}$$

und dann:

$$\eta = a\sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}, \quad \xi = a\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}$$

und dann aus (1):

$$x\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}} + y\sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}} + z\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}} = 3a$$

oder:

$$\sqrt[3]{xyz} = a, \quad xyz = a^3$$

II. Sollen die Triederschnitte flächengleich werden, so hat man, wenn ihre in den Ebenen xy, yz, xz liegenden Seiten bzhw. s_1, s_2, s_3 sind:

$$\varDelta = \tfrac{1}{4}\sqrt{4s_1^2 s_2^2 - (s_1^2 + s_2^2 - s_3^2)^2}$$

und da wegen

$$t = 3\xi, \quad u = 3\eta, \quad v = 3\zeta$$
$$s_1^2 = 9(\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\gamma)$$
$$s_2^2 = 9(\eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta\cos\alpha)$$
$$s_3^2 = 9(\xi^2 + \zeta^2 - 2\xi\zeta\cos\beta)$$

ist, so hat man, wenn

$$\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma \text{ mit } A$$
$$\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma \text{ mit } B$$
$$\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta \text{ mit } C$$

bezeichnet wird:

$$\varDelta = {}^9/_2\sqrt{\eta^2\zeta^2\sin^2\alpha + \xi^2\zeta^2\sin^2\beta + \xi^2\eta^2\sin^2\gamma - 2\xi\eta\zeta(A\xi + B\eta + C\zeta)}$$

Der Ort der Schwerpunkte für die Triederschnitte vom Inhalt $\varDelta$ ist daher:

$$(1) \quad y^2z^2\sin^2\alpha + x^2z^2\sin^2\beta + x^2y^2\sin^2\gamma - 2xyz(Ax + By + Cz) = \left(\frac{2\varDelta}{9}\right)^2$$

nnd insbesondere für das rechtwinklige Trieder:

$$(1^a) \qquad y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 = \left(\frac{2\varDelta}{9}\right)^2$$

Die vorstehenden Gleichnngen lassen sich anch schreihen:

$$(xy\sin\gamma + yz\sin\alpha + xz\sin\beta)^2 - 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\left(x\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right.$$
$$\left. + y\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} + z\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)xyz = \left(\frac{2\varDelta}{9}\right)^2$$

hzhw.

$$(xy + yz + xz)^2 - 2(x + y + z)xyz = \left(\frac{2\varDelta}{9}\right)^2$$

Für $\varDelta = 0$ geht diese Fläche über in eine der von unsern grossen Mathematikern Kummer und Weierstrass synthetisch erörterten (Monatsberichte der Kgl. Akad. d. W. 1863 p. 332 sqq.),[1]) Kegelschnittsschaaren enthaltenden Steiner'schen Flächen.

Da es an Modellen derselben nicht fehlt, so kann man sich auch von Fläche (1) eine Anschauung bilden, wenn man sich die tiefsten Stellen ihrer trichterförmigen Einsenkungen nicht zusammenstossend, sondern um eine leicht zu ermittelnde Strecke von einander ab-

1) Cfr. Schroeter ibid. p. 520 sqq. und Crelle (Borchardt) Jahrg. 64 p. 64 u. 66 sqq. — Auch ibid. Jahrg. 63 p. 315 von Cremona nebst Note von Cayley (Jahrg. 64 p. 72) und Salmon-Fiedler Analyt. Geom. d. Raums Th. 2, S. 356.

Digitized by Google

stehend denkt. Besonders einfach wird dies bei dem rechtwinkligen Trieder und der Fläche (1^a). Die innerhalb der letzteren befindlichen Strecken der Triederkanten sind die Achsen eines regulären Oktaeders. Legt man nun durch den Triederscheitel die vier den Oktaederflächen parallelen Ebenen $z \pm y \pm x = 0$, so schneiden sie die Fläche (1^a) in Kreisen. Man erhält nämlich für die Schnittcurven:

$$\begin{cases} x^2y^2 + (x \pm y)^2(x^2 + y^2) = ({}^2/_9 \Delta)^2 \\ x^2z^2 + (x \pm z)^2(x^2 + z^2) = ({}^2/_9 \Delta)^2 \end{cases}$$

oder nach beiderseitiger Radicirung:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \pm xy = {}^2/_9 \Delta \\ x^2 + z^2 \pm xz = {}^2/_9 \Delta \end{cases}$$

Eine successive erfolgende Drehung der Achsen in ihrer Ebene um $\pi/_4$ lässt dieselben übergehen in

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = {}^4/_{27} \Delta \\ x^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 = {}^4/_{27} \Delta \end{cases}$$

Die Flächen des Oktaeders sind aber gegen die des Trieders (hier gegen die xy-, bzw. xz-Ebene) unter dem durch $\cos i = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ gegebenen Winkel i geneigt. Die vorstehenden Ellipsengleichungen sind also die Projectionsgleichungen von vier Kreisen mit dem Radius $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$, und $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$ gibt hier den Abstand der tiefsten Stellen der Fläche an.[1])

III. Soll das Volumen des abgeschnittenen Tetraeders ein Minimum sein, so hat man, wenn zugleich die Bedingung $f(t, u, v) = 0$ besteht:

(1) $$V = \tfrac{1}{6} tuv \sin\gamma \sin i$$

wo i oder Wkl. (z, xy) durch

$$\cos i = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}}$$

gegeben ist,

---

1) d. h. da die Fläche aus vier congruenten Teilen besteht, den Abstand e zweier einander gegenüberstehender Teile.

$$(2) \quad \begin{cases} D_t V . D_v f - D_v V . D_t f = 0 \\ D_u V . D_v f - D_v V . D_u f = 0 \end{cases}$$

Gehen die Triederschnitte durch einen festen Punkt (x', y', z'), so ist

$$f \equiv \frac{x'}{t} + \frac{y'}{u} + \frac{z'}{v} - 1 = 0,$$

$$D_t V = \tfrac{1}{6} uv \sin\gamma \sin i,$$
$$D_u V = \tfrac{1}{6} tv \sin\gamma \sin i,$$
$$D_v V = \tfrac{1}{6} tu \sin\gamma \sin i;$$
$$D_t f = -\frac{x'}{t^2}, \quad D_u f = -\frac{y'}{u^2}, \quad D_v f = -\frac{z'}{v^2}$$

also nimmt Gl. (2) dann die Form an:

$$x'v - z't = 0$$
$$y'v - z'u = 0$$

oder

$$\frac{x'}{t} = \frac{y'}{u} = \frac{z'}{v}$$

und mithin:

$$f \equiv \frac{3x'}{t} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{3y'}{u} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{3z'}{v} - 1 = 0$$

d. h.

$$t = 3x' = \xi$$
$$u = 3y' = \eta$$
$$v = 3z' = \zeta$$

Es schneidet also derjenige Triederschnitt, d e s s e n S c h w e r p u n k t d e r g e g e b e n e f e s t e P u n k t ist, das Minimaltetraeder ab.

Gehen die Triederschnitte durch eine feste Gerade

$$\begin{cases} \frac{z}{m} + \frac{x}{n} = 1 \\ \frac{z}{p} + \frac{y}{q} = 1 \end{cases}$$

so ist die Gleichung einer Triederschnittebene:

$$\frac{z}{p} + \frac{y}{q} - 1 + \mu\left(\frac{z}{m} + \frac{x}{n} - 1\right) = 0$$

oder:

$$\frac{z}{\frac{mp(1+\mu)}{m+\mu p}} + \frac{y}{(1+\mu)q} + \frac{x}{(1+\mu)\frac{n}{\mu}} = 1$$

Mithin

$$V = \tfrac{1}{6}\,\frac{(1+\mu)^3\,mnpq \sin\gamma \sin i}{\mu\,(m+\mu p)}$$

$$D_\mu V = \tfrac{1}{6}\,\frac{mnpq\,(1+\mu)^2}{m+\mu p}\,[p\mu^2 + 2\,(m-p)\,\mu - m] \sin\gamma \sin i$$

Wegen $D_\mu V = 0$ hat man zur Bestimmung des dem Minimum entsprechenden μ:

$$\mu^2 + 2\left(\frac{m}{p} - 1\right)\mu - \frac{m}{p} = 0$$

woraus:

$$\mu = 1 - \frac{m}{p} \pm \sqrt{\frac{m^2}{p^2} - \frac{m}{p} + 1}$$

da für $\mu = -1$ $V = 0$ wird, entsprechend einem durch den Triederscheitel gehenden Schnitte, und da, weil durch die gegebene Gerade eine Ebene gelegt werden kann, die einer der Triederkanten parallel läuft, so dass $V = \infty$ wird, ein Maximum ausgeschlossen ist.

Nach einigen Reductionen folgt hieraus:

$$t = \frac{n}{m}\,(2m - p \pm \sqrt{m^2 - mp + p^2})$$

$$u = \frac{q}{p}\,(2p - m \pm \sqrt{m^2 - mp + p^2})$$

$$v = m + p \mp \sqrt{m^2 - mp + p^2}$$

Läuft die feste Gerade einer Triederfläche, etwa der xz-Ebene, parallel, so wird p unendlich und es reducirt sich die Gleichung der schneidenden Ebene auf

$$\frac{z}{\frac{m}{\mu}(1+\mu)} + \frac{y}{q(1+\mu)} + \frac{x}{\frac{n}{\mu}(1+\mu)} = 1$$

V auf

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{(1+\mu)^3}{\mu^2}\,mnq \sin\gamma \sin i$$

$D_\mu V$ auf

$$\tfrac{1}{6}\,mnq \sin\gamma \sin i \cdot \frac{(1+\mu)^2(\mu-2)}{\mu^3}$$

Es ist dann also $\mu = 2$, wie sich ja auch unmittelbar aus dem obigen

$$\mu = 1 - \frac{m}{p} + \sqrt{\frac{m^2}{p} - \frac{m}{p} + 1}$$

für $p = \infty$ ergibt. Es wird dann:

$$t = \tfrac{3}{2}n, \quad u = 3q, \quad v = \tfrac{3}{2}m$$

woraus ersichtlich ist, dass in diesem Falle **der Schwerpunkt des Triederschnitts in die Drehungsachse (feste Gerade) fällt.**

Sollen die Triederschnitte eine gegebene Fläche umhüllen, so ergibt sich die Bedingung für das Minimaltetraeder in folgender Weise:

Die Gleichung der Fläche sei $\varphi(x, y, z) = 0$; sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Berührungspunktes und bedenten p, q, r bzhw. $D_\xi \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $D_\eta \varphi$, $D_\zeta \varphi$, so ist:

$$p(x-\xi)+q(y-\eta)+r(z-\zeta)=0$$

die Gleichung der Tangentialebene. Ihre Parameter t, u, v sind also bzhw.

$$\frac{p\xi+q\eta+r\zeta}{p},\quad \frac{p\xi+q\eta+r\zeta}{q},\quad \frac{p\xi+q\eta+r\zeta}{r}$$

Es ist somit V oder $\frac{1}{6} tuv \sin\gamma \sin i$ hier

$$=\frac{1}{6}\frac{(p\xi+q\eta+r\zeta)^3}{pqr}\sin\gamma\sin i$$

Die obige Minimalbedingung (2) wird demnach für diesen Fall:

$$(2^a)\qquad \begin{cases} rD_\xi V - pD_\zeta V = 0 \\ rD_\eta V - qD_\zeta V = 0 \end{cases}$$

Setzt man:

$$p\xi+q\eta+r\zeta = S,\quad pqr = P$$

und differentiirt successive nach ξ, η, ζ, so erhält man:

$$\frac{6P^2}{S^2\sin\gamma\sin i}D_\xi V = 3PD_\xi S - SD_\xi P$$

$$\frac{6P^2}{S^2\sin\gamma\sin i}D_\eta V = 3PD_\eta S - SD_\eta P$$

$$\frac{6P^2}{S^2\sin\gamma\sin i}D_\zeta V = 3PD_\zeta S - SD_\zeta P$$

Da aber

$$D_\xi S = p+\xi D_\xi p+\eta D_\xi q+\zeta D_\xi r$$

$$D_\eta S = q+\eta D_\eta q+\xi D_\eta p+\zeta D_\eta r$$

$$D_\zeta S = r+\zeta D_\zeta r+\xi D_\zeta p+\eta D_\zeta q$$

und

$$D_\xi P = qrD_\xi p+prD_\xi q+pqD_\xi r$$

$$D_\eta P = qrD_\eta p+prD_\eta q+pqD_\eta r$$

$$D_\zeta P = qrD_\zeta p+prD_\zeta q+pqD_\zeta r$$

ist, so erhält man nach Einsetzung dieser Werte:

$$\frac{6P^2}{S^2\sin\gamma\sin i} = 3p^2qr + qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)D_\xi p + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)D_\xi q$$
$$+ pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)D_\xi r$$

$$\frac{6P^2 D_\eta V}{S^2\sin\gamma\sin i} = 3pq^2r + qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)D_\eta p + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)D_\eta q$$
$$+ pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)D_\eta r$$

$$\frac{6P^2 D_\zeta V}{S^2\sin\gamma\sin i} = 3pqr^2 + qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)D_\zeta p + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)D_\zeta q$$
$$+ pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)D_\zeta r$$

Werden diese Werte in (2^a) substituirt, so gehen die beiden dortigen Gleichungen schliesslich über in

$$(2^b)\quad \left\{\begin{aligned} & qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)(rD_\xi p - pD_\zeta p) \\ & \quad + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)(rD_\xi q - pD_\zeta q) \\ & \quad + pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)(rD_\xi r - pD_\zeta r) = 0 \\ & qr(2p\xi - q\eta - r\zeta)(rD_\eta p - qD_\zeta p) \\ & \quad + pr(2q\eta - p\xi - r\zeta)(rD_\eta q - qD_\zeta q) \\ & \quad + pq(2r\zeta - p\xi - q\eta)(rD_\eta r - qD_\eta r) = 0 \end{aligned}\right.$$

Unabhängig von den (partiellen) Differentialquotienten wird diesen Gleichungen durch

$$p\xi = q\eta = r\zeta$$

genügt, wodurch die obigen Werte der Parameter t, u, v in 3ξ, 3η, 3ζ übergehen, und sich demnach als Ergebniss herausstellt, dass **die Tangentialebene das Minimaltetraeder abschneidet, deren Berührungspunkt zugleich der Schwerpunkt des zugehörigen Triederschnittes ist.**

Der Minimalwert von V wird $\frac{9}{2}\xi\eta\zeta\sin\gamma\sin i$.

Beispiele:

1) Für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat man:

$$\xi D_\xi\varphi = \frac{\xi^2}{a^2}, \quad \eta D_\eta\varphi = \frac{\eta^2}{b^2}, \quad \zeta D_\zeta\varphi = \frac{\zeta^2}{c^2}$$

so dass also

$$\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} = \tfrac{1}{3}, \quad \xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

wird. Vol. des Minimaltetraeders $= \frac{1}{2}abc\sqrt{3}\sin\gamma\sin i$.

2) **Für die obige Fläche**

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}-1$$

ist

$$\xi p=\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{a\xi^2},\quad \eta q=\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{b\eta^2},\quad \zeta r=\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{c\zeta^2}$$

also:

$$a\xi^2=b\eta^2=c\zeta^2 \quad\text{oder}\quad \eta=\xi\sqrt{\frac{a}{b}},\quad \zeta=\xi\sqrt{\frac{a}{c}}$$

Dies in die Flächengleichung eingesetzt, ergibt:

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}},\quad \eta=\frac{1}{\sqrt{b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}},\quad \zeta=\frac{1}{\sqrt{c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}}$$

Minimaltetraeder-Volumen v:

$$\frac{\frac{9}{2}\sin\gamma\sin i}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sqrt{ab+bc+ac}} \quad\text{oder}\quad \frac{\frac{9}{2}abc\sin\gamma\sin i}{(ab+bc+ac)^{\frac{3}{2}}}$$

3) $ax^2+by+cs+d=0$ (Paraboloid)

$$\xi p=2a\xi^2,\quad \eta q=b\eta,\quad \zeta r=c\zeta$$

$$2a\xi^2=b\eta=c\zeta$$

$$\xi=\sqrt{\frac{d}{5a}},\quad \eta-\frac{2d}{5b},\quad \zeta=\frac{2d}{5c}$$

$$v-\frac{18}{25\sqrt{5}}\cdot\frac{d^2\sqrt{d}}{bc\sqrt{a}}\sin\gamma\sin i$$

4) $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=(\frac{2}{3}\Delta)^2$ (s. oben)

$$\xi p=2\xi^2(\eta^2+\zeta^2)$$

$$\eta q=2\eta^2(\xi^2+\zeta^2)$$

$$\zeta r=2\zeta^2(\xi^2+\eta^2)$$

$$\xi=\eta=\zeta=\tfrac{1}{3}\sqrt{\Delta}\,.\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}$$

$$v=\tfrac{1}{3}\Delta\sqrt{\Delta}\,.\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}$$

V.

Construction der den Brennpunkten eines Kegelschnitts entsprechenden Punkte im collinearen Systeme.

Von

L. Klug.

K. Pohlke bringt in seiner „darst. Geometrie“ (zweite Abth., Berlin 1876; § 114) ohne Beweis die Construction derjenigen Punkte in der Ebene eines Kreises, deren Central-Projectionen die Brennpunkte der Central-Projection des Kreises werden.

Im folgenden wollen wir den Beweis der Pohlke'schen Construction geben in dem allgemeinen Falle, wenn statt des Kreises ein Kegelschnitt angenommen wird, die Construction wenn das Projections-Centrum ins Unendliche rückt, endlich die umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich: Projections-Centrum und Ebene so bestimmen, dass die Projection zweier beliebiger Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts die Brennpunkte der Projection des Kegelschnitts werden.

„Schneidet die zu einer Tangente eines Kegelschnitts Parallele, die durch den Berührungspunkt P gezogene beliebige Gerade in B, den zur Geraden PB conjugirten Durchmesser in A, so liegt der Punkt B mit dem Pole der Geraden PA in einem Durchmesser des Kegelschnitts.“

Die Pole U, V der Geraden AB, BP liegen in dem durch P, resp. A gehenden Durchmesser, und das Dreieck ABP mit dem UVC, dessen Ecken die Pole der Seiten des ersteren sind, persp. liegt, so ist BC der zur Geraden AP conjugirte Durchmesser des Kegelschnitts.

folgt, wenn A in einen Brennpunkt des Kegelschnitts [illegible] Betracht zieht, dass der Pol einer Brennpunkt- [illegible] Brennpunkte errichteten Senkrechten liegt: [illegible] Brennpunkt A eines Kegelschnitts zu einer [illegible] die vom Berührungspunkte P auf die Hauptaxe [illegible] in B die Tangente des Punktes P in C, so liegen die [illegible] C auf dem zur Geraden AP conjugirten Durchmesser.

[illegible] man den Schnittpunkt dieses Durchmessers und der [illegible] AP mit D, den Schnittpunkt der durch B zur Hauptaxe parallelen und AP mit N, den Fusspunkt der von B auf AP gefällten Senkrechten mit E, so folgt aus den vorhandenen ähnlichen Dreiecken: $AD:DE = CD:BD$; $DP:AD = CD:BD$, welche Proportionen die Relation $\overline{DA}^2 = DP.DE$ geben. Ferner ist aus der Figur ersichtlich, dass der Punkt B, da er auf der zu einer Seite des CAP Dreieckes Parallelen sich befindet, immer ausserhalb des Dreieckes, daher E innerhalb der Strecke DP, und wegen des rechtwinkligen Dreieckes PBN auch innerhalb der Strecke PN liegt, weshalb auch E niemals auf die Strecke ND gelangen kann.

Mittelst der früheren Relation und dieser Bemerkung kann man die Brennpunkte eines Kegelschnitts, wenn die Lage der Axen und ein Par conjugirte Durchmesser bekannt sind, auf folgende Art construiren:

Durch einen beliebigen Punkt O zieht man Parallele zu den Axen und einem der Durchmesser und eine Senkrechte auf den anderen Durchmesser, und schneidet diese vier Geraden mit einer zu dem letzteren Durchmesser Parallelen g in N, P, D, E; liegt nun E auf der Strecke DP, so bestimmt man den Punkt A auf g derart, dass $\overline{DA}^2 = DP.DE$ und führt durch die Berührungspunkte der zu AO parallel gehenden Tangenten des Kegelschnitts Parallele zu g; die Letzteren treffen die mit ON parallele Hauptaxe in den Brennpunkten.

Die Construction geht bei der Parabel, da die Durchmesser parallel sind, in folgende über: durch O führt man eine Parallele und Senkrechte zur Axe und eine beliebige Gerade, schneidet dieselben mit einer auf der Letzteren Senkrechten in D, P, E; bestimmt den Punkt A derart auf ihr, dass $\overline{DA}^2 = DP.DE$, zieht die mit OA parallele Tangente; die durch den Berührungspunkt zu DP Parallele schneidet die Axe im Brennpunkte.

Wir wollen nun die hier gegebenen Constructionen zur Bestimmung der Brennpunkte des einem Kegelschnitt persp. collinearen Kegelschnitts benutzen.

Digitized by Google

Es sei k ein beliebiger Kegelschnitt, s, C die Collineations-Axe und das Centrum, q', r die Gegenaxen, k' die dem k entsprechende persp. collineare Figur, M der Pol von r bezüglich k. Sind R_1, R_2; R_3, R_4 zwei Par bezüglich k conjugirte Punkte auf r, von welchen das erste Par aus C unter einem rechten Winkel erscheint, so gehen die Geraden CR_1, CR_2 mit den Axen, CR_3, CR_4 mit einem Par conjugirter Durchmesser von k' parallel. Schneidet man die ersten drei Geraden und die auf der vierten in C errichtete Senkrechte mit einer zur vierten parallelen in N, P, D, E, bestimmt auf dieser den Punkt A derart, dass im Falle E auf der Strecke DP liegt, $\overline{DA}^2 = DP.DE$, im Falle aber E auf der Ssrecke DN liegt, $DA^2 = DN.DE$ wird, zieht vom Schnittpunkte der Geraden CA, r Tangenten zu k, so treffen die Verbindungslinien des Punktes R_4 mit den Berührungspunkten im ersten Falle R_1M, im zweiten aber R_2M in denjenigen Punkten, deren entsprechende die Brennpunkte von k' sind.

Fällt R_4 ins Unendliche, ist daher R_3M der zur Richtung der Geraden r conjugirte Durchmesser von k, so fälle man von C eine Senkrechte auf r; liegt der Fusspunkt E derselben zwischen R_3 und R_2, dann ziehe man von den aus der Relation $\overline{R_3A}^2 = R_3R_2.R_3E$ bestimmten Punkte A auf r Tangenten zu k; die Schnittpunkte der durch die Berührungspunkte parallel zu r gelegten Geraden mit MR_1 gehen die den Brennpunkten des k' entsprechende Punkte. — Dies ist die oben erwähnte Pohlke'sche Construction; welche aber im Falle, dass R_2 nach D gelangt, nicht anwendbar ist, daher die allgemeine Construction benutzt wird.

Berührt r den Kegelschnitt k im Punkte R, und sind die Schnittpunkte der durch C gehenden und der auf r, wie auch auf CR senkrecht stehenden Geraden mit r, R_1 resp. E, dann bestimmt man den Punkt A auf r aus der Relation $RE.RR_1 = \overline{RA}^2$, zieht von R_1 und A Tangenten zu k, und durch die Berührungspunkte Parallele zu CR resp. r, der Schnittpunkt derselben ist der dem Brennpunkte der Parabel entsprechende Punkt.

Obige Constructionen werden bei Bestimmung der Brennpunkte des einem Kegelschnitt affinen Kegelschnitts folgender Art angewendet.

Sind k, k' zwei affine Kegelschnitte in persp. Lage, M, M' ihre Mittelpunkte, s die Affinitätsaxe, MS_1, MS_2 die den Axen $M'S_1$, $M'S_2$ von k' entsprechenden conjugirten Durchmesser von k, D der Schnittpunkt des zu s conjugirten Durchmessers MD mit s, endlich E der Fusspunkt der aus M' auf s gefällten Senkrechten. Liegt E auf der Strecke DS_2, dann bestimme man A auf s aus der Relation

$DE.DS_2 = \overline{DA}^2$, ziehe mit AM parallele Tangenten zu k; die durch die Berührungspunkte zu s parallel gelegten Geraden schneiden MS_1 in den, den Brennpunkten von k' entsprechenden Punkten.

Bemerkung. 1. Liegt M, daher auch M' auf s, dann werden die Schnittpunkte von MS_1, MS_2, ME, MD mit einer beliebigen zu s Parallelen benutzt.

2. Geht s parallel zu den Axen von k, und ist zugleich die Projectionsrichtung senkrecht zu s, dann werden statt s und des dieser Geraden conjugirten Durchmessers von k' eine andere Gerade und der ihr conjugirte Durchmesser angewendet.

Wir wollen jetzt die umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich: es sind gegeben ein Kegelschnitt k und zwei Punkte F, G seiner Ebene, man bestimme die Collineations-Axe und das Centrum, wie auch die Gegenaxen derart, dass die den F, G entsprechenden Punkte F', G' die Brennpunkte des dem Kegelschnitt k entsprechenden Kegelschnitts werden.

Diese Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn F, G innerhalb k liegen, d. h. wenn die durch F oder G gehenden conjugirten Geraden eine ellipt. Involution bilden. Sind M. μ die von F, G harmonisch getrennten conjugirten Punkte, R der Pol von FG, dann entsprechen entweder die conjugirten Geraden $M\mu$, MR, oder $M\mu$, μR den Axen des gewünschten Kegelschnitts, weshalb auch der Aufgabe zwei Systeme von Kegelschnitten entsprechen. Das erste System enthält Ellipsen, das zweite Hyperbeln. Der der Geraden $\mu R \equiv r$ conjugirte Durchmesser schneide r in D, die Tangenten in einem der Endpunkte der durch F oder G zu r parallel geführten Sehne schneide r in A. Ist nun der Punkt E auf r so bestimmt, dass er auf der Strecke DR liegt und $DE = DA^2 : DR$ ist, dann wird die in E auf r errichtete Senkrechte den über μR als Durchmesser beschriebenen Kreis im Collineations-Centrum treffen; die Collineations-Axe wird zu r parallel angenommen.

Diese Construction ist nicht anwendbar, wenn μ (oder M) ins Unendliche rückt, da in diesem Falle die Punkte D, R, E, A zusammenfallen. Man kann aber die Lage des Collineations-Centrums in diesem, wie auch im allgemeinen Falle bestimmen, wenn man in Betracht zieht, dass die sich im Brennpunkte schneidenden conjugirten Geraden aufeinander Senkrecht stehen, daher man die Schnittpunkte von zwei Par durch F gehenden conjugirten Geraden mit der Polare von M, d. h. der Geraden r ermittelt, durch die entsprechenden Schnittpunkte Kreise legt, deren Mittelpunkt in r liegt; die gemeinsamen Punkte dieser Kreise sind die Collineations-Mittelpunkte.

Digitized by Google

Fallen F nud G zusammen in den innerhalb des Kegelschnitts gelegenen Pnnkt M, dann gelangt A, daher auch E nach D, nnd es werden alle conjugirten Pnnkte der Geraden r aus C unter einem rechten Winkel projicirt, und k' geht in einen Kreis über.

Im Falle, dass G auf k angenommeu wird, geht k' in eine Parabol über, und die Constructiou ist leicht dem bei der Parabel gezeigten directen Verfahren nachzubilden; im Falle aber auch F auf k gelangt, ist die Gegenaxe r unbestimmt, indem dieselbe durch den Pol von FG beliebig gezogen werden kann; immerhin fällt aber C in diesen Pol, daher k' in eine Gerade übergeht.

Liegen F, G auf einem Durchmesser von k nnd vom Mittelpunkt M desselben gleich weit entfernt, dann wird für ein System der Kegelschnitte k' die Collineation zur Affinität, und die Lage der Affinitätsaxe s kann beliebig angenommen werden. Verbindet man den einen Endpunkt T der durch F zu s parallelen Sehne mit M, nennt die Schnittpunkte der zu TM, FG, s conjugirten Durchmesser mit s, resp. A, S_2, D, wie auch den Schnittpnnkt vou G mit derselben Geraden S_1, errichtet in dem durch die Relation $DE = \overline{DA}^2 D_2S_2$ bestimmten Pnnkte E der Strecke DS_2 eine Senkrechte auf s, so schneidet dieselbe den über $S_1 S_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreis im Mittelpunhte M' des zu k affinen Kegelschnitts.

Pressburg, im Febr. 1886.

VI.

Ueber mehrfach perspective Tetraeder.

Von

L. Klug.

---

1. „Wenn fünf Kanten eines Tetraeders von welchen „die ersten drei durch einen Eckpunkt gehen, fünf Kanten „eines andern Tetraeders, von welchen die ersten drei eben- „falls durch einen Eckpunkt gehen, schneiden, ohne dass „die Tetraeder einen gemeinsamen Eckpunkt oder Fläche „haben, so schneidet auch die sechste Kante des einen „Tetraeders die sechste Kante des andern, und dieselben „liegen perspectiv."

Wir bezeichnen mit A_{gh} den Schnittpunkt der $M_g M_h$, $N_g N_h$ Kanten der Tetraeder $M \equiv M_1 M_2 M_3 M_4$, $N \equiv N_1 N_2 N_3 N_4$ und setzen voraus, dass ausser $M_1 M_2$, $N_1 N_2$ die übrigen Kanten sich schneiden. Die Punkte $A_{13} A_{14} A_{34}$, A_{23}, $A_{24} A_{34}$ als die Schnittpunkte der in den Flächen $N_1 N_3 N_4$, $M_1 M_3 M_4$ und $N_2 N_3 N_4$, $M_2 M_3 M_4$ liegenden Kanten, welche Flächen weder durch einen gemeinsamen Eckpunkt gehen, noch in einer Ebene liegen, befinden sich je in einer Geraden. Weil sich diese Geraden im Punkte A_{34} schneiden, so haben auch die Geraden $A_{13} A_{23}$, $A_{14} A_{24}$ daher auch die Flächen $N_1 N_2 N_3$, $M_1 M_2 M_3$; $N_1 N_2 N_4$, $M_1 M_2 M_4$ einen gemeinsamen Punkt, welcher der Schnittpunkt der Kanten $N_1 N_2$, $M_1 M_2$ ist.

2. „Wenn drei Kanten eines Tetraeders drei Par „Gegenkanten eines anderen Tetraeders, und ausserdem zwei „Kanten des ersten zwei Kanten des anderen schneiden, so „schneidet auch die sechste Kante des ersten ein Par „Gegenkanten des zweiten Tetraeders und dieselben liegen „auf zweierlei Art perspectiv. Der einer perspectiven Lage

Digitized by Google

„entsprechende Collineations-Mittelpunkt liegt in derjenigen „Collineations-Ebene, welche der anderen perspectiven Lage „zugehört."

Vorausgesetzt, dass $N_g N_h$ Kanten des N Tetraeders, ausser $N_1 N_2$, die Kanten $M_g M_h$ des M in Agh schneiden, und noch die Kanten $N_2 N_3$, $M_1 M_4$; $N_1 N_4$, $M_2 M_3$; $N_3 N_4$, $M_1 M_2$ in A'_{23}, resp. A'_{14}, A'_{34} gemeinsame Punkte haben, so wird, da $N_1 N_3$, $N_1 N_4$, $N_2 N_3$, $N_2 N_4$, $N_3 N_4$ Kanten des einen, $M_1 M_3$, $M_1 M_4$, $M_2 M_3$, $M_2 M_4$, $M_3 M_4$ und $M_1 M_3$, $M_2 M_3$, $M_1 M_4$, $M_2 M_4$, $M_1 M_2$ Kanten des anderen schneiden: Kante $N_1 N_2$ sowol mit $M_1 M_2$, als $M_3 M_4$ einen Punkt A_{12}, resp. A'_{12} gemeinsam haben. Die zwei Tetraeder liegen daher auf zweierlei Art perspectiv, und es entsprechen den $N_1 N_2 N_3 N_4$ Eckpunkten des einen $M_1 M_2 M_3 M_4$ und $M_3 M_4 M_1 M_2$ Eckpunkte des anderen.

Bezeichnet man mit O_1 den zur ersten persp. Lage gehörigen Coll.-Mittelpunkt, so schneiden die Geraden $O_1 A'_{34}$, $O_1 A'_{14}$, von welchen die erste mit den Kanten $M_1 M_2$, $N_3 N_4$, die zweite mit $M_2 M_3$, $N_1 N_4$ in A'_{34}, resp. A'_{14} gemeinsame Punkte hat, die den genannten Kanten in der ersten persp. Lage entsprechenden $N_1 N_2$, $M_3 M_4$ resp. $N_2 N_3$, $M_1 M_4$ Kanten in den Punkten A'_{12} resp. A'_{23}, woraus ersichtlich, dass O_1 ein Diagonalpunkt des Vierseits $A_{13} A_{24} A'_{12} A'_{14} A'_{23} A'_{34}$ ist, welches in der zur zweiten persp. Lage gehörige Coll.-Ebene liegt.

Um das Tetraeder N bei gegebenem M zu construiren, nimmt man auf der Transversale von zwei Gegenkanten z. B. $M_1 M_4$, $M_2 M_3$ des M zwei beliebige Punkte N_2, N_3 an, sucht die Schnittpunkte O_1, O_2, N_4, N_1 von $N_2 M_2$, $N_3 M_3$, resp. $N_2 M_4$, $N_3 M_1$; $O_1 M_4$, $O_2 M_2$; $O_1 M_1$, $O_2 M_3$, : $N_1 N_2 N_3 N_4$ ist das mit $M_1 M_2 M_3 M_4$ auf zweierlei Art bezüglich O_1, O_2 persp. liegende Tetraeder.

3. „Schneiden fünf Kanten eines Tetraeders fünf Par „Gegenkanten eines anderen, so schneidet auch die sechste „Kante des ersten ein Par Gegenkanten des anderen, und „die zwei Tetraeder liegen auf viererlei Art perspectiv."

Wir nehmen an, dass $N_g N_h$ Kante des N, mit Ausnahme von $N_1 N_2$ die Kanten $M_g M_h$, $M_i M_k$ des Tetraeders M in Agh, $A'gh$ schneidet. Wenn den Eckpunkten $N_1 N_2 N_3 N_4$ die Eckpunkte $M_1 M_2 M_3 M_4$ entsprechen, so wird $N_1 N_2$, da die übrigen fünf entsprechenden Kanten sich schneiden, mit $M_1 M_2$ einen gemeinsamen Punkt A_{12} haben, wenn aber denselben Eckpunkten $M_3 M_4 M_1 M_2$ entsprechen, so wird aus demselben Grunde $N_1 N_2$ auch $M_3 M_4$ in A'_{12} schneiden. Den Eckpunkten $N_1 N_2 N_3 N_4$ können aber auch die Eckpunkte $M_2 M_1 M_4 M_3$ und $M_4 M_3 M_2 M_1$ entsprechen (weil die homologen Kanten sich schneiden), daher die Tetraeder auf viererlei Art persp. sind. — Wir

bezeichnen die zu den genannten Lagen gehörigen Coll.-Mittelpunkte mit O_1, resp. O_3, O_2, O_4, und es gehen die zu O_1, resp. O_k gehörigen Coll.-Ebenen durch die Vierecke $A_{12}A_{13}A_{14}A_{23}A_{24}A_{34}$, resp. $A_{1k}A_{ik}$ $A'_{1i}A'_{1k}A'_{ki}A'_{ik}$.

Weil die Gerade $O_1A'_{1g}$ die Kanten M_kM_i, N_1N_g in A'_{1g}, und die, diesen Kanten in der ersten persp. Lage entsprechende N_kN_i, M_1M_g in A'_{ki} schneidet, ferner O_gA_{1k}, resp. OA'_{1g} Geraden M_1M_k, N_iN_k; M_kM_i, N_1N_g Kanten in A_{1k}, A'_{1g} und die, diesen Kanten in der $g$ten persp. Lage entsprechenden N_gN_i, M_gM_i; N_kN_i, M_gM_1 in A_{gi}, A'_{ki} schneidet; so sind die vier Coll.-Mittelpunkte die Diagonalpunkte der in den Coll.-Ebenen liegenden Vierecke. Daraus folgt, wegen der harm. Lage der Punkte $O_1A'_{1g}O_gA'_{ki}$, $O_gA_{gk}O_kA_{ik}$, dass zwei beliebige Kanten M_gM_k, M_iM_k; N_gN_k, N_iN_k von M oder N durch zwei Coll.-Mittelpunkte O_g, O_k wie auch O_iO_k und daher durch zwei Coll.-Ebenen $O_gO_kO_i$, $O_gO_kO_k$; $O_iO_kO_g$, $O_iO_kO_k$, endlich durch einen beliebigen Coll.-Mittelpunkt und seine Coll.-Ebene harm. getrennt sind.

Da die Projection der Punkte $N_1A_{1k}N_kA'_{1k}$ aus $O_1 : M_1A_{1k}M_kA'_{ik}$; dieser Punkte aus $O_i : N_iA_{ik}N_kA'_{ik}$; dieser Punkte aus $O_1 : M_iA_{ik}M_kA'_{1k}$; endlich die Projection dieser Punkte aus $O_k : N_kA_{1k}N_1A'_{1k}$ ist, so folgt, dass zwei Gegenkanten M, N Tetraeder, wie M_gM_k, M_iM_k und N_gN_k, N_iN_k durch zwei Par Eckpunhte N_g, N_k; N_i, N_k, resp. M_g, M_k; M_i, M_k der N und M Tetraeder, daher auch durch zwei Par Flächen $N_gN_kN_i$, $N_gN_kN_k$; $N_iN_kN_g$, $N_iN_kN_k$, resp. $M_gM_kM_i$, $M_gM_kM_k$, $M_iM_kM_g$, $M_iM_kM_k$ endlich durch einen Eckpunkt und die Gegenfläche von N, resp. M harm. getrennt sind.

Aus der harm Lage der Punkte $M_gA_{gk}M_kA'_{ik}$, $N_gA_{gk}N_kA'_{gk}$ und daraus, dass O_gO_k Gerade durch A_{gk}, A_{ik} oder A'_{gk}, A'_{ik} geht (je nachdem g, h, oder i, k gleich 1 ist) folgt, dass zwei Gegenkanten des $O_1O_2O_3O_4 \equiv O$ Tetraeders durch M_g, M_k; M_i, M_k wie auch N_g, N_k; N_i, N_k Punkte, daher durch $M_gM_kM_i$, $M_gM_kM_k$; $M_iM_kM_g$, $M_iM_kM_k$ und $N_gN_kN_i$, $N_gN_kN_k$; $N_iN_kN_g$, $N_iN_kN_k$ Ebenen, endlich durch einen Eckpunkt und Gegenfläche von M oder N harm. getrennt sind.

Aus der soeben gefundenen Lage der Eckpunkte, Kanten und Flächen der Tetraeder M, N, O und aus dem Umstande, dass wegen der persp. Lage die Verbindungs- oder Schnittlinie von zwei zu verschiedenen Tetraedern gehörigen Eckpunkten resp. Flächen durch einen Eckpunkt des dritten gehen, resp. in einer Fläche liegen, folgt: zwei zu verschiedenen Tetraedern gehörige Eckpunkte oder Flächen werden durch einen Eckpunkt und Gegenfläche des dritten Tetraeders harm., drei in einer Geraden liegende Eckpunkte der Tetraeder, durch die Gegenflächen involutorisch getrennt.

Das Resultat dieser Untersuchung lautet:

„Durch ein Tetraeder und einen ausserhalb seiner „Flächen liegenden Punkt ist ein anderes Tetraeder be- „stimmt, von welchem der angenommene Punkt, und die von „ihm durch die Gegenkanten des Tetraeders harmonisch „getrennten Punkte die Eckpunkte sind. Dieses und das „angenommene Tetraeder sind auf viererlei Art persp.; die „Coll.-Mittelpunkte und Ebenen sind die Eckpunkte und „Flächen ein und desselben neuen Tetraeders. Zwei be- „liebige Eckpunkte, Flächen, Gegenkanten, Eckpunkte und „Gegenflächen jedes der drei Tetraeder werden von den „Gegenkanten der anderen zwei harm. getrennt. Zwei zu „verschiedenen Tetraedern gehörige Eckpunkte oder Flächen „werden durch einen Eckpunkt und Gegenfläche des dritten „Tetraeders harm., drei in einer Geraden liegende Eckpunkte „durch die Gegenflächen invol. getrennt. Die 12 Eckpunkte „und Flächen der drei Tetraeder liegen resp. schneiden „sich zu dreien in je 16 Geraden; von den ersten 16 Gera- „den geben durch jeden Eckpunkt 4, welche ein Vierkant „bestimmen, dessen Diagonal-Dreikant drei Kanten eines „der Tetraeder sind, von den anderen 16 Geraden liegen „in jeder Tetraeder-Fläche 4 und bilden ein Vierseit, dessen „Diagonaldreieck die Kanten eines der Tetraeder sind. Die „Kanten der drei Tetraeder liegen in 12 Ebenen und geben „durch 12 Punkte; dieselben sind die Flächen resp. Eck- „punkte von drei neuen Tetraedern, welche dieselbe gegen- „seitige Lage haben als die ersten drei Tetraeder. Aber „auch die gegenseitige Lage der zweimal drei Tetraeder „ist übereinstimmend, indem die Flächen oder Eckpunkte „jedes der drei neuen Tetraeder durch sechs Eckpunkte „der anderen gehen, resp. in sechs Flächen derselben liegen, „so wie die Flächen oder Eckpunkte der ersten drei Tetra- „eder durch sechs Eckpunkte der neuen geben, resp. in „sechs Flächen derselben liegen."

„Die ganze Figur enthält 24 Punkte, 24 Ebenen und 50 Gerade; „die Punkte liegen (Ebenen gehen) zu vieren in (durch) 18 Geraden „und zu dreien in (durch) 32 Geraden; durch jeden Punkt gehen (in „jeder Ebene liegen) von den 32 und 18 Geraden 4, resp. 3, von „den 24 Ebenen (Punkten) 7, welche ein Vierkant (Vierseit) mit dem „Diagonal-Dreikant (-Dreiseit) bestimmen."

Die Eckpunkte der im Satze erwähnten drei neuen Tetraeder sind: $A_{gh}A_{ik}A'_{gh}A'_{ik}$, ... und es sind je zwei bezüglich der Eckpunkte

Digitized by Google

und Gegenflächen des dritten Tetraeders, als Coll.-Mittelpunkt und Ebenen, auf viererlei Art persp. So z. B. sind bezüglich $A_{12}, A_{34}, A'_{12}, A'_{34}$ Coll.-Mittelpunkte $A_{13}A_{24}A'_{13}A'_{24}$ persp. mit $A_{23}A_{14}A'_{23}A'_{14}$, $A_{14}A_{23}A'_{14}A'_{23}$, $A'_{23}A'_{14}A_{23}A_{14}$, $A'_{14}A'_{23}A_{14}A_{23}$.

Aus der eigentümlichen Lage der M, N, O Tetraeder, dass zwei zu verschiedenen Tetraedern gehörige Eckpunkte durch einen Eckpunkt und Gegenfläche des dritten harm. getrennt sind, folgt:

„Die 8 Mittelpunkte der in ein Tetraeder einbeschrie-
„benen Kugeln sind die Eckpunkte von zwei Tetraedern,
„welche sowol zu einander als zu dem Original-Tetraeder
„auf viererlei Art persp. liegen."

5. Zwei Tetraeder haben in Rücksicht auf ihre gemeinsamen Ecken oder Flächen folgende Lage: sie haben a) 3 gemeins. Ecken und 3, 2, 1 gemeins. Flächen; b) 2 gemeins. Ecken und 3, 2, 1, 0 gemeins. Flächen; c) 1 gemeins. Ecke und 3, 2, 1, 0 gemeins. Flächen, endlich d) 0 gemeins. Ecke und 2, 1, 0 gemeins. Flächen.

Bezeichnet man die Eckpunkte der Tetraeder mit $M_1M_2M_3M_4$, $N_1N_2N_3N_4$ und fallen a) M_1, N_1; M_2, N_2; M_3, N_3 zusammen, dann wird $M_1M_2M_3M_4$ entweder mit $N_1N_2N_3N_4$, $N_4N_2N_3N_1$, $N_1N_4N_3N_2$, $N_1N_2N_4N_3$ oder blos mit den drei letzteren persp. liegen, je nachdem N_4 auf M_3M_4 liegt oder nicht. b) Fallen M_1, N_1; M_2, N_2 zusammen, und liegen ausserdem entweder N_3, N_4 auf M_2M_3 resp. M_2M_4 Kanten, oder schneiden sich M_3N_3, M_4N_4, M_1M_2 Geraden in einem Punkte, so ist $M_1M_2M_3M_4$ mit $N_1N_2N_3N_4$, $N_1N_2N_4N_3$, $N_2N_1N_3N_4$; wenn sich aber ausser den gemeins. Eckpunkten blos M_3M_4, N_3N_4 Kanten schneiden oder auf derselben Geraden liegen, dann ist M Tetraeder mit N nur in den zwei ersten Gruppirungen der Eckpunkte perspectiv. c) Fallen M_1, N_1 zusammen, so sind die Tetraeder selbst wenn 3, 2, 1 Eckpunkte von N auf die durch M_1 gehenden Kanten oder Flächen liegen, blos auf einerlei Art persp.; wenn aber $M_2M_3M_4$, $N_2N_3N_4$ Dreiecke in derselben Ebene liegend auf 0, 1, 2, 3, 4-erlei Art persp. sind[1]), dann liegen auch die Tetraeder auf ebenso vielerlei Art persp. d) Haben die Tetraeder keinen gemeins. Eckpunkt, fallen aber N_1N_2, M_1M_2 Kanten auf dieselbe Gerade, und gehen M_1M_2, M_3N_3, M_4N_4 Gerade durch einen Punkt (die Tetraeder haben zwei gemeins. Flächen), so ist $M_1M_2M_3M_4$ persp. mit $N_1N_2N_3N_4$, $N_2N_1N_3N_4$.

Aus diesem ist ersichtlich: „Zwei Tetraeder, welche eine „oder mehr gemeins. Ecken, Flächen, Kanten haben, können nicht „mehr als auf viererlei Art persp. liegen".

1) bei reellen Eckpunkten.

6. „Zwei Tetraeder, welche keine gemeins. Ecken, „Kanten, oder Flächen haben, können nicht dermassen auf „zweierlei Art persp. liegen, dass einem oder zwei Eckpunk- „ten des einen in beiden Lagen dieselben ein oder zwei „Eckpunkte des andern entsprechen.

Weil $M_hM_iM_k$, $N_hN_iN_k$ Dreiecke keine gemeinsamen Eckpunkte haben und auch nicht in einer Ebene liegen, so können sie nur auf einerlei Art, z. B. in der aufgeschriebenen Ordnung der entsprechenden Eckpunkte, persp. sein, woraus folgt: dass $M_gM_hM_iM_k$ Tetraeder mit $N_gN_kN_iN_k$ und mit einem durch eine andere Gruppirung der $N_hN_iN_k$ oder blos der N_iN_k Eckpunkte entstandenen Tetraeder, z. B. $N_gN_iN_k N_h$, $N_gN_hN_kN_i$, etc. nicht persp. sein kann.

7. „Zwei Tetraeder können nicht dermassen zu ein- „ander persp. liegen, dass vier Eckpunkten des einen vier „Eckpunkte des anderen und noch eine derartige andere „Gruppe dieser letzteren Eckpunkte entsprechen sollen, in „welcher keiner von ihnen demselben Eckpunkt des ersteren „Tetraeders entspricht, als in der früheren Gruppe, aus- „genommen die drei Fälle, wo zwei und zugleich die an- „deren zwei Eckpunkte ihre Stelle in der Gruppe abwech- „selnd verändern."

Damit $M_gM_hM_iM_k$, zu $N_gN_hN_iN_k$ und $N_hN_kN_gN_i$ persp. sei, ist notwendig, dass in beiden Lagen die entsprechenden Kanten sich schneiden; dies ist aber in dem Falle nur dann möglich, wenn ein Eckpunkt und seine Gegenfläche in der einen, und ein anderer Eckpunkt und seine Gegenfläche in der anderen persp. Lage mit seinem entsprechenden Eckpunkte und Gegenfläche zusammenfällt, z. B. M_g, M_h Eckpunkte mit N_g, N_k; $M_hM_iM_k$, $M_gM_iM_k$ Flächen mit $N_hN_iN_k$, $N_gN_hN_i$ zusammen fallen. Die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte der Tetraeder $M_gM_hM_iM_k$, $N_gN_hN_iN_k$ können aber bei dieser Lage nur dann durch einen Punkt gehen, wenn entweder N_h, N_k oder N_i, M_i zusammenfallen; während die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte der Tetraeder $M_gM_hM_iM_k$, $N_hN_kN_gN_i$ nur dann durch einen Punkt gehen, wenn N_h, N_i oder N_i, N_k zusammen fallen, und weil weder N_h in M_k und zugleich M_i, noch N_i in M_i und M_k fallen kann, so werden die Tetraeder in den angegebenen Lagen nicht persp. sein.

8. „Zwei Tetraeder mit reellen Eckpunkten können „höchstens auf viererlei Art persp. liegen."

In 5. ist gezeigt worden, dass zwei Tetraeder mit teilweise zusammenfallenden Elementen nicht mehr als auf viererlei Art persp.

sein können; wir schliessen daher diesen Fall aus. Ist $M_g M_h M_i M_k$ Tetraeder mit $N_g N_h N_i N_k$ persp., dann kann es laut 6. nicht mit den 14, und laut 7. mit den 6 Tetraedern persp. sein, welche durch eine andere Gruppirung der entsprechenden Eckpunkte entstehen, es bleiben daher blos übrig diejenigen drei Tetraeder $N_g N_h N_i N_k$, $N_i N_k N_g N_h$, $N_k N_i N_h N_g$ deren persp. Lage in 4. betrachtet wurde.

9. „Wenn zwei Tetraeder keine gemeinsamen Elemente „haben, können sie nicht auf dreierlei Art persp. sein.“

Hat nämlich M Tetraeder mit N keine gemeins. Elemente, und ist $M_g M_h M_i M_k$ zu $N_g N_h N_i N_k$ persp., so kann es noch zu $N_h N_g N_k N_i$, $N_i N_k N_g N_h$, $N_k N_i N_h N_g$ persp. sein. Wenn man aber voraussetzt, dass $M_g M_h M_i M_k$ zu $N_g N_h N_i N_k$, $N_h N_g N_k N_i$, $N_i N_k N_g N_h$ persp. ist, dann schneiden sich die Kanten: $M_g M_k$, $N_g N_k$; $M_h M_i$, $N_h N_i$; $M_h M_k$, $N_g N_i$; $M_g M_i$, $N_h N_k$; $M_g M_h$, $N_i N_k$; $M_i M_k$ $N_g N_h$, daher $M_g M_h M_i M_k$ auch zu $N_k N_i N_h N_g$ persp. sein wird.

* * *

10. Drei parweise persp. Tetraeder bestimmen ausser den in 4. beschriebenen, noch andere Tetraeder.

Projicirt man nämlich aus N_g die $M_g M_h M_i M_k$ Eckpunkte des M Tetraeders auf den Gegenflächen nach $M_g^{(g)} M_h^{(g)} M_i^{(g)} M_k^{(g)}$, so bestimmen dieselben ein Tetraeder $M^{(N_g)}$, und da man aus jedem Eckpunkte des N Tetraeders projiciren kann, so gibt es vier solche $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$, ... Tetraeder.

Bezeichnet man die Schnittpunkte der $M_g M_h$, $N_g N_h$; $M_i M_k$, $N_g N_k$ Kanten wie früher mit A_{gh}, A'_{gh}, so ist ersichtlich, dass $A_{gh} A'_{gh} A_{ik}$, $A_{gh} A_{ik} A'_{ik}$ die Diagonaldreiecke der Vierecke $M_g^{(g)} M_h^{(g)} M_g^{(h)} M_h^{(h)}$, resp. $M_g^{(i)} M_h^{(i)} M_g^{(k)} M_h^{(k)}$ sind und dass die Viereck-Seiten $M_g^{(g)} M_h^{(g)}$, $M_g^{(g)} M_g^{(h)}$, $M_g^{(g)} M_h^{(h)}$, $M_h^{(g)} M_g^{(h)}$, $M_g^{(i)} M_h^{(i)}$, $M_g^{(i)} M_g^{(k)}$, $M_g^{(i)} M_h^{(k)}$ durch die Punkte A'_{ik}, resp. A'_{gh}, A_{gh}, A_{gh}, A_{gh}, A_{ik}, A'_{ik} gehen.

Jedes der $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$, ... Tetraeder ist zu M und O persp., die Coll.-Mittelpunkte sind die Eckpunkte von N, die Coll.-Ebenen ihre Gegenflächen, da sich die entsprechenden Kanten nach dem Obigen in Punkten der Flächen des N Tetraeders schneiden.

Die 16 Eckpunkte der vier $M^{(N_g)}$... Tetraeder können aber auch als Eckpunkte von vier anderen dem M einbeschriebenen Tetraeder: $M^{(O_1)} \equiv M_g^{(g)} M_h^{(h)} M_i^{(i)} M_k^{(k)}$, $M^{(O_h)} \equiv M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$ und von vier

in den Flächen von M liegenden Vierecken: $M^{(M_g)} \equiv M_g^{(g)} M_g^{(h)} M_g^{(i)} M_g^{(k)}$ betrachtet werden; diese Tetraeder sind zu M, N bezüglich der Eckpunkte und Gegenflächen des O Tetraeders als Coll.-Mittelpunkt und Ebenen, die Vierecke zu O, N bezüglich der Eckpunkte von M persp., da die Eckpunkte der $M^{(O_i)}$, $M^{(O_k)}$ Tetraeder, die Projectionen von $M_1 M_h M_i M_k$ aus O_1, resp. O_h, die Eckpunkte der $M^{(M_g)}$, ... Vierecke die Projectionen von $N_g N_h N_i N_k$ aus M_g sind.

Je zwei der $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$, ..., und $M^{(O_g)}$, $M^{(O_h)}$, ... wie auch $M^{(M_g)}$, $M^{(M_h)}$ ... Tetraeder und Vierecke sind zu einander bezüglich den Eckpunkten und Gegenflächen der $A_{gh} A_{ik}$ $A'_{gh} A'_{ik}$ Tetraeder als Coll.-Mittelpunkte und Ebenen auf zweierlei Art persp. So sind z. B. die Tetraeder $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$ bezüglich A_{gh}, A'_{gh}; $M^{(O_i)}$, $M^{(O_h)}$ bezüglich A'_{1h}, A'_{ik}; $M^{(O_h)}$, $M^{(O_i)}$ bezüglich A_{1k}, A_{hi}, die Vierecke $M^{(M_g)}$, $M^{(M_h)}$ bezüglich A_{gh}, A'_{ih} persp., und es entsprechen den Eckpunkten von $M_g^{(g)} M_h^{(g)} M_i^{(g)} M_k^{(g)}$, $M_1^{(1)} M_h^{(h)} M_i^{(i)} M_k^{(k)}$, $M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$, $M_g^{(g)} M_g^{(h)} M_g^{(i)} M_g^{(k)}$, resp. die Eckpunkte $M_h^{(h)} M_g^{(h)} M_i^{(h)} M_k^{(h)}$, $M_g^{(h)} M_k^{(h)} M_k^{(h)} M_i^{(k)}$, $M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_k^{(i)} M_i^{(k)}$, $M_h^{(1)} M_1^{(h)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$; $M_k^{(h)} M_h^{(k)} M_i^{(1)} M_1^{(i)}$, $M_1^{(i)} M_i^{(1)} M_h^{(k)} M_k^{(h)}$; $M_h^{(h)} M_h^{(g)} M_h^{(i)} M_h^{(k)}$, $M_h^{(g)} M_h^{(h)} M_h^{(k)} M_h^{(i)}$, da die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte durch die angegebenen Coll.-Mittelpunkte gehen. Es ist aber auch leicht einzusehen, dass die Gegenflächen der Coll.-Mittelpunkte der $A_{gh} A_{ik} A'_{gh} A'_{ik}$ Tetraeder die Coll.-Ebenen sind, da sich z. B. bei den Tetraedern $M^{(N_g)}$, $M^{(N_h)}$ die Kanten $M_g^{(g)} M_h^{(g)}$, $M_h^{(h)} M_g^{(h)}$ $M_i^{(g)} M_k^{(g)}$, $M_i^{(h)} M_k^{(h)}$ in beiden persp. Lagen entsprechen, daher die beiden Coll.-Ebenen durch ihre Schnittpunkte A'_{ik}, A_{ik} und (laut 2.) auch abwechselnd durch die Coll.-Mittelpunkte gehen.

Jedes der $M^{(N_g)}$ ... Tetraeder ist zu jedem der $M^{(O_g)}$ ... persp.; die Coll.-Mittelpunkte und Ebenen sind die Eckpunkte und Gegenflächen von M. So sind die Tetraeder $M^{(N_g)}$, $M^{(O_g)}$ bei jedem Werte des g Indexes bezüglich M_1; $M^{(N_1)}$, $M^{(O_h)}$; $M^{(N_h)}$, $M^{(O_1)}$; $M^{(N_i)}$, $M^{(O_k)}$; $M^{(N_k)}$, $M^{(O_i)}$ bezüglich M_h persp., da $M_g^{(g)} M_g^{(h)}$, $M_i^{(g)} M_i^{(h)}$ als Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte durch M_h gehen.

Die Vierecke $M^{(M_g)}$, ... sind auch persp. mit $M^{(N_g)}$, ... $M^{(O_g)}$ Tetraeder; die 32 zu diesen Lagen gehörigen Coll.-Mittelpunkte sind

die Eckpunkte von 8 dem M nmschriebenen Tetraedern, welche dieselben 16 Flächen haben, nnd von welchen vier zu M, N, vier zu M, O persp. liegen.

Das Tetraeder $M^{(N_g)}$ nnd Viereck $M^{(M_g)}$ hat nämlich in $M_g^{(g)}$ einen gemeins. Eckpunkt, und es schneiden sich die entsprechonden Seiten der $M_h^{(g)} M_i^{(g)} M_k^{(g)}$, $M_g^{(h)} M_g^{(i)} M_g^{(k)}$ Dreiecke in $A_{hi} A_{hk} A_{ik}$ Pnnkten, daher das Tetraeder nnd Viereck persp. liegen. Die durch $M_h^{(g)} M_i^{(g)}$, $M_g^{(h)} M_g^{(i)}$ entsprechende Seiten gelegte Ebene enthält $A_{hi} A_{gh} A_{gi} M_k$ Punkte, daher ist der zn $M(^{N_g})$, $M(^{M_g})$ gehörige Coll.-Mittelpunkt der Schnittpnnkt von den Verbindungsebenen der $A_{hi} A_{gh} A_{gi}$, $A_{hk} A_{gh} A_{gk}$, $A_{ik} A_{gi} A_{gk}$ Geraden mit M_k, resp. M_i, M_k Pnnkten, nnd da diese Geraden die Schnittlinien der $O_2 O_3 O_4$ Ebene mit den dnrch M_g gebenden Fläcben des M Tetraeders sind: so werden die Eckpnnkte desjenigen Tetraeders, welches M nmschrieben ist, nnd dessen Flächen M in der $0_2 O_3 O_4$ Ebene schneiden, die zn den persp. Lagen der $M^{(N_g)}$, $M^{(M_g)}$; $M^{(N_h)}$, $M^{(M_k)}$; ... Tetraeder nnd Vierecke gehörige Coll.-Mittelpunkte sein.

Ebenso kann bewiesen werden, dass die zn den persp. Lagen der $M^{(N_1)}$, $M^{(M_h)}$; $M^{(N_h)}$, $M^{(M_1)}$; $M^{(N_i)}$, $M^{(M_k)}$ nnd $M(^{O_g})$, $M^{(M_g)}$ ...; $M^{(O_1)}$, $M^{(M_h)}$; $M^{(O_h)}$, $M^{(M_1)}$; $M^{(O_i)}$, $M^{(M_k)}$ gehörigenColl.-Mittelpnnkte die Eckpnnkte derjenigen dem M nmschriebenen Tetraeder sind, welche die Flächen von M in den Ebenen $O_1 O_i O_k$, resp. $N_2 N_3 N_4$, $N_1 N_i N_k$ schneiden.

Weil sich (lant 4.) die Flächen der M, N, O Tetraeder in 16 Geraden schneiden, so haben die 8 nmgeschriebenen Tetraeder dieselben Flächen, nnd weil vier von ihnen die Flächen der M, N, die anderen die Flächen der M, O in einer Ebene liegenden Geraden schneiden, so sind vier der nmschriebenen Tetraeder mit M, N; vier mit M, O persp.

Wir haben daher folgenden Satz, dessen reciprok entsprechender leicht ausgesprochen werden kann.

„Wenn drei Tetraeder parweise persp. liegen, dann „gibt es vier, zu dem ersten nnd zweiten, vier zn dem ersten „und dritten persp., dem ersten einbeschriebene Tetraeder, „nnd vier zn dem zweiten nnd dritten Tetraeder persp. „Vierecke, welche in den Flächen des ersten liegen; die 8 „Tetraeder nnd 4 Vierecke haben dieselben 16 Eckpnnkte. „Die ersten vier, sowie die zweiten vier Tetraeder und „die Vierecke sind parweise zu einander in Bezug auf die

„Kanten-Schnittpnnkte der Urtetraeder als Coll.-Mittel-„pnnkte auf zweierlei Art persp. Zwei einbeschriebene Te-„traeder, welche nicht zu denselben zwei Urtetraedern „persp. liegen, sind zu einander bezüglich der Eckpunkte „des ersten Tetraeders persp.; jedes einbeschriebene Te-„traeder liegt anch persp. zu den Vierecken bezüglich der „Eckpunkte derjenigen Tetraeder, welche dem ersten um-„schrieben und zugleich dem ersten und zweiten, oder dem „ersten nnd dritten persp. ist."

11. Wir wollen endlich die gegenseitige Lage, der in dem M N, O Tetraedern einbeschriebenen Tetraeder untersuchen.

Zn dem Ende bezeichnen wir wie oben die Projection der Eckpnnkte $N_g N_h N_i N_k$ anf die Gegenflächen ans O_g, O_h, O_i, O_k mit $N_g^{(g)} N_h^{(g)} N_i^{(g)} N_k^{(g)}$, $N_g^{(h)} N_h^{(h)} N_i^{(h)} N_k^{(h)}$, ...; die Tetraeder, deren Eckpnnkte die 16 Projoctionen, und welche in N, M resp. N, O einbeschrieben sind, mit $N^{(O_g)} \equiv N_g^{(g)} N_h^{(g)} N_i^{(g)} N_k^{(g)}$, ...; $N^{(M_1)} \equiv N_1^{(1)} N_h^{(h)} N_i^{(i)} N_k^{(k)}$, $N^{(M_h)} \equiv N_1^{(h)} N_h^{(1)} N_i^{(k)} N_k^{(i)}$, und bemerken, dass $N_g^{(g)} N_h^{(g)}$, $N_g^{(g)} N_g^{(h)}$, $N_g^{(g)} N_h^{(h)}$, $N_g^{(h)} N_h^{(g)}$, $N_g^{(i)} N_g^{(k)}$, $N_g^{(i)} N_h^{(k)}$, $N_g^{(i)} N_h^{(i)}$ Gerade durch Agh, $A'ik$, $A'gh$, $A'gh$, Aik, Agh, $A'gh$ oder $A'gh$, Aik, Agh, Agh, $A'ik$, $A'gh$, Agh gehen, je nachdem g, h oder i, k gleich 1 ist.

Die Tetraeder $M^{(O_g)}$, $N^{(O_g)}$ sind hei jedem Werte des g Indexes auf viererlei Art persp. bezüglich der Eckpnnkte nnd Gegenflächen des O Tetraeders, als Coll.-Mittelpnnkte nnd Ebenen, und zwar derweise, dass den Eckpnnkten $M_1^{(1)} M_h^{(h)} M_i^{(i)} M_k^{(k)}$ des $M^{(O_1)}$ die Eckpunkte $M_1^{(1)} M_h^{(1)} M_i^{(1)} M_k^{(1)}$, $N_h^{(1)} N_1^{(1)} N_i^{(1)} N_k^{(1)}$ von $N^{(O_1)}$ bezüglich O_1, resp. O_h, den Eckpunkten $M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$ des $M^{(O_h)}$, die Eckpnnkte $N_1^{(h)} N_h^{(h)} N_i^{(h)} N_k^{(h)}$, $N_h^{(h)} N_1^{(h)} N_k^{(h)} N_i^{(h)}$, $N_i^{(h)} N_k^{(h)} N_1^{(h)} N_h^{(h)}$, $N_k^{(h)} N_i^{(h)} N_h^{(h)} N_1^{(h)}$ bezüglich O_1, O_h, O_i, O_k als Coll.-Mittelpnnkte entsprechen.

Dies folgt für O_1 als Coll.-Mittelpunkt und $M_1^{(1)} M_h^{(h)} M_i^{(i)} M_k^{(k)}$, $N_1^{(1)} N_h^{(1)} N_i^{(1)} N_k^{(1)}$, wie auch für O_h als Coll.-Mittelpunkt und $M_1^{(h)} M_h^{(1)} M_i^{(k)} M_k^{(i)}$, $N_h^{(h)} N_1^{(h)} N_k^{(h)} N_i^{(h)}$ als entsprechende Eckpnnkte nnmtttelbar, da die Geraden $M_g N_g$ bei jedem Werte von g dnrch O_1, die Geraden $M_h N_1$, $M_1 N_h$, $M_i N_k$, $M_k N_i$ durch O_h gehen. Dies in Betracht gezogen wird der Beweis für die übrigen Tetraeder-Combinationen anf folgende Art erhalten.

Die Diagonaldreiecke der Vierecke $M_1 M_h N_1 N_h$, $M_i M_k N_i N_k$

…monischen Reihe.

…ertation über die „harmonische … definirt, bei der von je drei anfein… …re das harmonische Mittel der beiden … eine Folge von Brüchen mit con… eine arithmetische Reihe bilden. Als …kann ohne Beschränkung der Allgemein… …den; denn wird

$$\ldots \frac{1}{+2} + \cdots + \frac{1}{z+n} = S_n(z)$$

…ine harmonische Reihe

$$\ldots \frac{1}{a+2b} + \cdots + \frac{1}{a+nb} = \frac{1}{b} S_n\left(\frac{a}{b}\right)$$

…urückzuführen. In grundsätzlich elementarer …n der Satz gewonnen, dass mit n zwar auch wächst, aber nur wie der Logarithmus von n,

$$S_n(z) - \log(n+z) = C_n(z)$$

Function $C_n(z)$ mit wachsendem n, beständig ab… nur von z abhängigen Grenzwert $C(z)$ zustrebt. …entlich gleichbedeutend mit der Gauss'schen Func…

$$\Psi(z) = \lim_{n=\infty} [\log n - S_{n-1}(z+1)]$$

$$C(z) = -\Psi(z-1), \quad \Psi(z) = -C(z+1)$$

… 1886. Ein vermehrter Abdruck der Arbeit im „Archiv …cht bevor.

…quisitiones generales circa seriem infinitam etc. Art. 30.

Digitized by Google

„Wenn drei Tetraeder parweise auf viererlei Art „persp. liegen, dann sind a) je zwei zu dem ersten und „zweiten Tetraeder perspective, und zugleich dem ersten „resp. zweiten $\left\{\begin{array}{l}\text{einbeschriebene}\\ \text{umschriebene}\end{array}\right.$ Tetraeder zu einander „bezüglich der Eckpunkte und Gegenflächen des dritten „Tetraeders als Coll.-Mittelpunkte und Ebenen, auf viererlei „ Art persp.; b) jedes dem ersten $\left\{\begin{array}{l}\text{einbeschriebene}\\ \text{umschriebene}\end{array}\right.$ und „zu dem ersten und dritten perspective Tetraeder ist zu „jedem dem zweiten $\left\{\begin{array}{l}\text{einbeschriebenen}\\ \text{umschriebenen}\end{array}\right.$ und zum zweiten „und dritten perspectiven Tetraeder, bezüglich eines Eck-„punktes und Gegenfläche des dritten Tetraeders, als Coll.-Mittelpunkt und Ebene, perspectiv."

VII.

Miscellen.

1.

Zur Theorie der harmonischen Reihe.

1. In meiner Inaugural-Dissertation über die „harmonische Reihe“ [1]) ist diese Reihe als solche definirt, bei der von je drei aufeinander folgenden Gliedern das mittlere das harmonische Mittel der beiden äussern ist. Es ergiebt sich so eine Folge von Brüchen mit constantem Zähler, deren Nenner eine arithmetische Reihe bilden. Als die „Differenz“ der letzteren kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets 1 angenommen werden; denn wird

(1) $$\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\cdots+\frac{1}{z+n}=S_n(z)$$

gesetzt, so ist die allgemeine harmonische Reihe

(2) $$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+nb}=\frac{1}{b}\,S_n\left(\frac{a}{b}\right)$$

also auf jene sofort zurückzuführen. In grundsätzlich elementarer Abhandlung wurde nun der Satz gewonnen, dass mit n zwar auch $S_n(z)$ ins Unendliche wächst, aber nur wie der Logarithmus von n, so dass, wenn

(3) $$S_n(z)-\log(n+z)=C_n(z)$$

gesetzt wird, die Function $C_n(z)$ mit wachsendem n, beständig abnehmend, einem nur von z abhängigen Grenzwert $C(z)$ zustrebt. Derselbe ist wesentlich gleichbedeutend mit der Gauss'schen Function [2])

$$\Psi(z)=\lim_{n=\infty}[\log n-S_{n-1}(z+1)]$$

da offenbar

$$C(z)=-\Psi(z-1),\quad \Psi(z)=-C(z+1)$$

1) Halle 1886. Ein vermehrter Abdruck der Arbeit im „Archiv d. Math.“ steht bevor.

2) Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. Art. 30.

ist. Insbesondere hat man für $z = 1$ die Euler-Mascheroni'sche Constante

$$C(1) = c \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0{,}5772156649\ldots$$

Von den allgemeinen Eigenschaften der Function, die schon Gauss aufgefunden hat, sind hier nur drei zu erwähnen, die im Folgenden Anwendung finden. Es ist nämlich

$$(4) \qquad C(z) - C(1-z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z,$$

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{m} C\left(z+\frac{k}{m}\right) = mC(mz+1) + m\log m$$

und mit Hilfe dieser Sätze kann man $C(z)$ für beliebige rationale und echt gebrochene z durch die Formeln darstellen:

$$(6) \quad \begin{cases} C\left(\frac{n}{m}\right) = c + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{m} + \log m - 2\sum\limits_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} \cos\frac{2k\pi n}{m}\log\left(2\sin\frac{k\pi}{m}\right), & \text{für ungerade } m, \\ C\left(\frac{n}{m}\right) = c + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{m} + \log m - 2\sum\limits_{k=1}^{\frac{m-2}{2}} \cos\frac{2k\pi n}{m}\log\left(2\sin\frac{k\pi}{m}\right) + (-1)^{n+1}\log 2, & \text{für gerade } m, \end{cases}$$

$$(6^a) \qquad C\left(\frac{n}{m}\right) = c + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{m} + \log(2m) - 2\Sigma\cos\frac{kn\pi}{m/2}\log\operatorname{tg}\frac{k\pi}{m}$$

$$\left(n \text{ ungerade, } m \text{ gerade; } k = 1, 2, 3 \ldots \frac{m-4}{4} \text{ oder } \frac{m-2}{4}\right)$$

Durch die Function C lassen sich leicht beliebige Ausschnitte der harmonischen Reihe ausdrücken; die alternirende Reihe $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - \frac{z}{z+3} \ldots$ lässt sich als Differenz zweier harmonischen Reihen mit positiven Gliedern durch zwei C-Functionen summiren, und die Wert-Aenderung, die dieselbe Reihe erfährt, wenn das Verhältniss der Anzahl der positiven Glieder zur Anzahl der negativen Glieder geändert wird, ist ebenfalls mit Hilfe von C leicht zu entwickeln. Bezüglich aller dieser, sowie anderer damit zusammenhangender Fragen sei auf die angeführte Arbeit verwiesen und nur bemerkt, dass eine elementare und zugleich strenge Behandlung

derselben hauptsächlich dadurch ermöglicht wird, dass zunächst mit **endlichen** Reihen und mit der noch von ihrem Index abhängigen Function C_n gerechnet wird, so dass bis zum Augenblick des Grenzüberganges für $n = \infty$ alles durchaus geschlossen im Endlichen vor sich geht.

Dasselbe Verfahren wollen wir bei der hier zu lösenden Aufgabe einschlagen.

2. Aus der harmonischen Reihe werde eine neue in der Weise gebildet, dass die Vorzeichen gruppenweise wechseln; die ersten p Glieder sollen positiv, die p nächsten negativ genommen werden u. s. f. Gesucht ist die Summe der neuen Reihe, im Falle ihrer Convergenz.

Schreiben wir der Kürze wegen $\frac{1}{z+k} = h_k$, so ist die Summe der ersten $2pn$ Glieder

$$\begin{aligned}\sigma_{2pn}(z) = {} & h_0 + h_1 + \ldots + h_{p-1} - h_p - h_{p+1} - \ldots - h_{2p-1} \\ & + h_{2p} + \ldots + h_{3p-1} - h_{3p} - \ldots - h_{4p-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots \\ & + h_{(2n-2)p} + \ldots h_{(2n-1)p-1} - h_{(2n-1)p} - h_{2np-1}\end{aligned}$$

oder, wenn wir die Glieder nach Verticalreihen zusammenfassen,

$$\begin{aligned}\sigma_{2pn}(z) = {} & \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ h_k + h_{k+2p} + \ldots + h_{k+(2n-2)p} \right\} \\ & - \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ h_{k+p} + h_{k+3p} + \ldots + h_{k+(2n-1)p} \right\}\end{aligned}$$

Hier kann man nun die beiden Summen zu einer einzigen zusammenziehen und die negativen Glieder einzeln hinter die positiven einschalten, wodurch σ_{2pn} als Summe von alternirenden harmonischen Reihen dargestellt erscheint. Um aber die Summenformel für die letzteren nicht voraussetzen zu müssen, wollen wir lieber unmittelbar Formel (2) auf jede der beiden Summen anwenden und erhalten so:

$$\sigma_{2pn} = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ S_{n-1}\left(\frac{z+k}{2p}\right) - S_{n-1}\left(\frac{z+k+p}{2p}\right) \right\}$$

oder nach (3)

$$= \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{p-2} \left\{ C_{n-1}\left(\frac{z+k}{2p}\right) - C_{n-1}\left(\frac{z+k+p}{2p}\right) \right.$$

$$\left. + \log \frac{n-1+\frac{z+k}{2p}}{n-1+\frac{z+k+p}{2p}} \right\}$$

Für $n = \infty$ verschwindet jeder der p Logarithmen, so dass sich ergiebt:

(I) $$\sigma(z) = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ C\left(\frac{z+k}{2p}\right) - C\left(\frac{z+k}{2p} + \tfrac{1}{2}\right) \right\}$$

Schreiben wir dies noch

$$2p \cdot \sigma(z) = \sum_{0}^{p-1} C\left(\frac{z+k}{2p}\right) - \sum_{p}^{2p-1} C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$$

$$= \sum_{0}^{2p-1} C - 2 \sum_{p}^{2p-1} C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$$

so ist nach (5)

$$\sum_{2}^{2p} C\left(\frac{z-1}{2p} + \frac{k}{2p}\right) = 2p\, C(z) + 2p \log(2p)$$

also auch

(II) $$\sigma(z) = C(z) + \log(2p) - \frac{1}{p} \sum_{k=p}^{2p-1} C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$$

Für $p = 1$ geht σ in die einfach alternirende Reihe über. Wir erhalten für diesen Fall aus (I) und (II) die Formeln (29) und (30) der Differentation.

Beispiel. Es ist

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{16} - \frac{1}{19} - \frac{1}{22} + + - - \ldots = \frac{1}{3}\, \sigma\left(\frac{1}{3}\right)$$

Da hier $p = 2$ ist, haben wir aus (I)

$$\sigma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\left\{ C\,\frac{1}{12} - C\,\frac{7}{12} + C\,\frac{1}{3} - C\,\frac{5}{6} \right\}$$

Nun ist aus (6) bzhw. (6a)

$$C\,\frac{1}{3} = c + \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

$$C\,\frac{1}{12} = c + 3\log 2 + \frac{3}{2}\log 3 - \sqrt{3}\log(2-\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})$$

$$C\,\frac{5}{6} = c + \frac{3}{2}\log 3 + 2\log 2 - \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$$

$$C\frac{7}{12} = c + 3\log 2 + \frac{3}{2}\log 3 + \sqrt{3}\log(2-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})$$

also

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{16} \cdots = \frac{1}{6}\left\{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \log 2 - \sqrt{3}\log(2-\sqrt{3})\right\}$$

3. Anwendung auf die „specielle" harmonische Reihe.

Für $s = 1$ vereinfacht sich Formel (I) erheblich, selbst wenn p ganz unbestimmt bleibt. Es ist

$$\begin{aligned}2p\,\sigma(1) = \quad & C\frac{1}{2p} + C\frac{2}{2p} + \ldots + C\frac{p-1}{2p} + C\frac{p}{2p} \\ & - C\frac{2p}{2p} - C\frac{2p-2}{2p} - \ldots - C\frac{p+1}{2p}\end{aligned}$$

oder, nach (4), da die untereinander stehenden Functionen C Argumente besitzen, deren Summe 1 ist,

$$2p\sigma(1) = -c + C\tfrac{1}{2} + \pi\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2p} + \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{2p} + \ldots + \operatorname{cotg}\frac{(p-1)\pi}{2p}\right).$$

Hier ergänzen sich die Bogen je zweier symmetrisch zur Mitte stehenden Cotangenten zu $\frac{\pi}{2}$. Da nun allgemein

$$\operatorname{cotg} u + \operatorname{tg} u = \frac{2}{\sin 2u}$$

ist, so haben wir, wenn p ungerade, etwa gleich $2m+1$ ist,

$$\sum_{1}^{2m}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{4m+2} = 2\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m+4}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{2m+1}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{m\pi}{2m+1}}\right\}$$

und für $p = 2m$, in welchem Falle ein Mittelglied $\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{4m} = 1$ vorhanden ist,

$$\sum_{1}^{2m-1}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{4m} = 2\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{2m}} + \ldots + \frac{2m}{\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right\} + 1$$

Wenn wir schliesslich noch beachten, dass

$$C\tfrac{1}{2} = c + 2\log 2$$

ist, wie sich unmittelbar aus (5) für $s = 0$, $m = 2$ ergiebt, so kommt also

$$\sigma(1) = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\cdots+\frac{1}{2p}\right)+-\cdots$$

$$\text{(III)} \quad = \frac{2}{2\pi}+\frac{1}{p}\log 2+\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{p}} \quad \text{für gerade } p$$

$$= \frac{1}{p}\log 2+\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{p}} \quad \text{für ungerade } p.$$

Beispiele: Hiernach ist: Für $p = 2$,

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdots = \frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}$$

wie auch unmittelbar ersichtlich.

Für $p = 3$,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots = \frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}\log 2+\frac{2}{9}\pi\sqrt{3}$$

Für $p = 4$,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\cdots = \frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$$

4. Anwendung auf die Reihe der reciproken ungeraden Zahlen. Für $z = \frac{1}{2}$ ist

$$\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}\right)+-\cdots$$

Nach I. wird für diesen Fall

$$2p\,\sigma(\tfrac{1}{2}) = C\frac{1}{4p}+C\frac{3}{4p}+\cdots+C\frac{2p-1}{4p}$$
$$-C\frac{4p-1}{4p}-C\frac{4p-3}{4p}-\cdots-C\frac{2p+1}{4p}$$
$$= \pi\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4p}+\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4p}+\cdots+\operatorname{cotg}\frac{2p-1}{4p}\right).$$

Dieselbe Umformung wie vorher ergiebt hier

$$(\mathrm{IV})\quad \sigma(\tfrac{1}{4}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2p} + \dfrac{\pi}{p} \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{1}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2p}}, & \text{wenn } p \text{ ungerade} \\[2ex] \dfrac{\pi}{p} \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} \dfrac{1}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2p}}, & \text{wenn } p \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beispiele. Für $p = 2$ wird $\sigma(\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}$, also

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \cdots = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

Für $p = 3$ ist $\sigma(\frac{1}{3}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{6}}$, so dass

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots = \frac{\sigma}{12}\pi$$

Diese Reihe lässt sich auch ableiten, indem man

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots$$

mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt und das Ergebniss

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2}{3} \qquad - \frac{2}{9} \qquad + \frac{2}{15} \cdots$$

so hinzufügt, dass man die gleichnamigen Brüche vereinigt.

Für $p = 4$ kommt $\sigma(\frac{1}{4}) = \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} + \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}\right) = \pi\cos\dfrac{\pi}{8}$, somit

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots = \frac{\pi}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

(Fortsetzung folgt.) Heinrich Simon.

2.

Ueber die Normalen der Kegelschnitte.

Zieht man von einem Punkte R, φ in der Ebene eines Kegelschnitts Normalen an denselben, so lässt sich vermittelst einer Gleichung 4. Grades für die Normale n folgende Relation für ihre Quadratsumme aufstellen:

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2=4R^2+2(a^2+b^2)-\frac{2R^2}{c^2}(a^2\cos\varphi^2-b^2\sin\varphi^2)$$

Hieraus folgt auch

$$\Sigma n^2-2(a^2+b^2)=2x^2\frac{(a^2-2b^2)}{a^2-b^2}+2y^2\frac{(2a^2-b^2)}{a^2-b^2}$$

Ist demnach $\Sigma n^2=\text{Const.}$, so erhält man einen Kegelschnitt als geometrischen Ort der Constanz der Quadratsumme der Normalen.

Derselbe geht in einen Kreis über, wenn eine gleichseitige Hyperbel zu Grunde gelegt wird, weil alsdann

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2=3R^2 \quad \text{ist.}$$

Die obige Gleichung gilt auch noch allgemein für die Asymptoten einer Hyperbel, nur ist dann

$$a=b=0,\quad \frac{b}{a}=\operatorname{tg}E,\quad n_3^2+n_4^2=2R^2$$

zu setzen, und der geometrische Ort wird dann durch die Ellipse

$$\frac{x^2}{\cos E^2}+\frac{y^2}{\sin E^2}=\frac{n_1^2+n_2^2}{2\sin E^2\cos E^2}$$

chracterisirt.

Die Diagonalen des ihr umbeschriebenen Rechtecks fallen demnach mit den Asymptoten zusammen. Fällt man also von einem Punkt einer Ellipse auf diese ihre Diagonalen Senkrechte, so ist die Summe ihrer Quadrate eine constante Grösse.

E. Oekinghaus.

VIII.

Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

Von

P. H. Schoute.

Vierter Abschnitt.

(Die Polaren der Curve $\bar{C}^4$.)

44. „Die erste Polare eines Punktes P in Bezug auf eine Curve $\bar{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C ist eine durch diese Punkte gehende Curve dritter Ordnung C_p^3, welche in $\bar{C}^4$ die sechs Berührungspunkte ihrer durch P gehenden Tangenten einschneidet. Die erste Polare eines Punktes Q von $\bar{C}^4$ zerfällt in zwei Teile, die einander entsprechen in der quadratischen Transformation, welche $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführt, in die Tangente q' des Wendeschnittes im entsprechenden Punkte Q' und in den Kegelschnitt C_q^2 durch A, B, C, welche $\bar{C}^4$ in Q berührt."

Der erste Teil des Satzes ist ganz der Polarentheorie zu entnehmen.[1]) Und der zweite Teil ist eine unmittelbare Folge des Weyr'schen Satzes. Denn nach diesem Satze muss die erste Polare vom Punkte Q der $\bar{C}^4$ in Bezug auf $\bar{C}^4$ vier Punkte gemein haben mit der Tangente q' des Wendeschnittes im entsprechenden Punkte Q' und da sie nur von der dritten Ordnung ist diese Gerade ganz enthalten. Und da die erste Polare eines Punktes Q der Grundcurve

---

1) Man vergleiche Cremona's „Einleitung in eine geometrische Theorie des ebenen Curven", deutsch von M. Curtze.

diese Curve in Q berührt, so muss der ergänzende Kegelschnitt C_q^2, welcher nun durch A, B, C geht, die $\overline{C}^4$ in Q berühren und also in der bekannten Transformation der Tangente q' vom Wendeschnitte entsprechen. Es entsprechen dann die beiden Schnittpunkte der beiden Teile im allgemeinen einander, da q' nicht durch einen der vier sich selbst entsprechenden Punkte geht.

45. „In Bezug auf eine Curve $\overline{C}^4$ hat jede Gerade g sechs bewegliche Pole G. Diese Pole G sind die Eckpunkte eines vollkommenen Vierseits, des Vierseits der Tangenten q' am Wendeschnitte in den Punkten Q', welche den vier Schnittpunkten Q von g mit $\overline{C}^4$ entsprechen. Dieses Vierseit ist ebenfalls einem in ABC eingeschriebenen Kegelschnitte umschrieben.[2]) Und die Gegenecken des Vierseits entsprechen einander in der Transformation, welche $\overline{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführt."

Nach der Polarentheorie bilden die ersten Polaren von den Punkten einer Geraden g in Bezug auf $\overline{C}^4$ einen Büschel von Curven dritter Ordnung und schneiden diese durch A, B, C gehenden Curven also einander zu je zweien noch in sechs allen gemeinschaftlichen Punkten G, welche man die Pole von g in Bezug auf $\overline{C}^4$ nennt, da diese Punkte die Gerade g zur gemeinschaftlichen Polgeraden haben. Hieraus folgt, dass man die sechs Pole irgend einer Geraden g betrachten kann als die sechs Punkte, welche mit A, B, C die neun Schnittpunkte bilden von den ersten Polaren von irgend zwei beliebig auf g gewählten Punkten. Wählt man nun für diese zwei Punkte zwei der vier Schnittpunkte Q von g mit $\overline{C}^4$, so figurirt der Schnittpunkt von den Tangenten q' am Wendeschnitte in den entsprechenden zwei Punkten Q' unter den sechs Polen und da dieses für jede der sechs Combinationen von den vier Punkten Q auf g zu je zweien gilt, sind die sechs Pole die sechs Schnittpunkte der vier Tangenten q' des Wendeschnittes in den vier entsprechenden Punkten Q' dieser Curve.

Die vier Punkte Q' sind die Schnittpunkte vom Wendeschnitte K mit dem Kegelschnitte durch A, B, C, welcher in der die $\overline{C}^4$ in K überführenden Transformation der Geraden g entspricht. Also ist die Polarfigur dieses Kegelschnittes in Bezug auf K sowohl dem Dreiecke ABC als dem Vierseite der vier Geraden q' eingeschrieben; d. h. die vier Geraden q' umhüllen einen in ABC eingeschriebenen Kegelschnitt.

2) Diesen Teil des Satzes verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Prof. Küpper.

Digitized by Google

Deutet man die vier Schnittpunkte einer Geraden g mit $\bar{C}^4$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, die ihnen entsprechenden Punkte vom Wendeschnitte K durch Q_1', Q_2', Q_3', Q_4' und die Tangenten von K in diesen Punkten durch q_1', q_2', q_3', q_4' an, so kann man jedem der sechs Pole G, welche wir weiterhin zusammen als das Polsextupel G von g bezeichnen, die beiden Indices der sich in diesem Punkte schneidenden Geraden q' beilegen, wie es in Fig. 42 angegeben ist. Es sind dann offenbar die Paare $G_{1,2}$ und $G_{3,4}$, $G_{1,3}$ und $G_{2,4}$, $G_{1,4}$ und $G_{2,3}$, deren Indices einander ergänzen, die drei Paare von Gegenecken des von den vier Geraden q' gebildeten Vierseits. Und je zwei Gegenecken entsprechen einander in der Transformation, welche $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt umbildet. Betrachtet man nämlich das Polsextupel mit A, B, C als die Schnittpunkte der ersten Polaren von Q_1 und Q_2 in Bezug auf $\bar{C}^4$, wovon die erste aus q_1' und dem ihr entsprechenden Kegelschnitte C_1^2, die zweite aus q_2' und dem ihr entsprechenden Kegelschnitte C_2^2 besteht, so geben q_1' und q_2' den Schnittpunkten $G_{1,2}$, q_1' und C_2^2 die Schnittpunkte $G_{1,3}$ und $G_{1,4}$, q_2' und C_1^2 die Schnittpunkte $G_{2,3}$ und $G_{2,4}$ und müssen C_1^2 und C_2^2 ausser A, B, C also den sechsten Pol $G_{3,4}$ als Schnittpunkt haben; da nun die Kegelschnitte C_1^2 und C_2^2 den Geraden q_1' und q_2' entsprechen, so muss auch der freie Schnittpunkt $G_{3,4}$ von C_1^2 und C_2^2 dem Schnittpunkte $G_{1,2}$ von q_1' und q_2' entsprechen.

46. „Die acht Schnittpunkte von C^4 mit ihrem Wendeschnitte K sind die Berührungspunkte von $\bar{C}^4$ mit ihren vier Doppeltangenten; die Pole von diesen Doppeltangenten in Bezug auf $\bar{C}^4$ sind die vier Punkte S, welche in der die C^4 in K überführenden Transformation sich selbst entsprechen. Bei den Curven $\bar{C}^4$ erster Gattung sind die vier Punkte S und also auch die vier Doppeltangenten sämtlich imaginär; bei den Curven $\bar{C}^4$ zweiter Gattung ist von den Punkten S und also auch von den Doppeltangenten ein Paar reell und ein Paar imaginär.“

Ist g eine Tangente von $\bar{C}^4$ und sind Q_1 und Q_2 die in den Berührungspunkt Q zusammengetretenen Punkte von $\bar{C}^4$, so zeigt das Polsextupel G von g die in Fig. 43 vorgeführte Anordnung. Es fallen dann $G_{1,3}$ und $G_{2,3}$ in der Richtung von q_3' und $G_{1,4}$ und $G_{2,4}$ in der Richtung von q_4' mit einander zusammen. Und indem $G_{1,2}$ als Schnittpunkt der auf einander folgenden Tangenten q_1' und q_2' von K auf K liegt, ist $G_{3,4}$ nach dem vorhergehenden Artikel der dem Punkte $G_{1,2}$ von K entsprechende Punkt von $\bar{C}^4$, d. h. der Berührungspunkt Q von q mit $\bar{C}^4$. Umgekehrt, wenn einer der sechs

Pole G auf K liegt, so berührt die Gerade g im entsprechenden Punkte von $\overline{C}^4$ diese Curve; denn nach dem vorhergehenden Artikel ist die Gegenecke dann der entsprechende Punkt von $\overline{C}^4$ und die Polgerade eines Punktes von $\overline{C}^4$ ist nach der Polarentheorie die Tangente der Curve in diesem Punkte.

Ist weiter g eine Doppeltangente von $\overline{C}^4$, indem einerseits Q_1 und Q_2 und andererseits Q_3 und Q_4 zusammenfallen, so reducirt sich das Polsextupel G von g in der in Fig. 44 vorgestellten Weise. Es fallen dann die vier Punkte $G_{1,3}$, $G_{1,4}$, $G_{2,3}$, $G_{2,4}$ in einen Punkt zusammen, und dieser Punkt ist dann, da $G_{1,3}$ und $G_{2,4}$ ebenso wie $G_{1,4}$ und $G_{2,3}$ einander entsprechen, einer der vier sich selbst entsprechenden Punkte S; dabei sind die coincidirenden Tangenten q_1' und q_2' von K als die Verbindungslinien von $G_{1,3}$ mit $G_{1,4}$ und von $G_{2,3}$ mit $G_{2,4}$, die coincidirenden Tangenten q_3' und q_4' von K als die Verbindungslinien von $G_{1,3}$ und $G_{2,3}$ und von $G_{1,4}$ mit $G_{2,4}$ zu betrachten. Und die Punkte $G_{1,2}$ und $G_{3,4}$ befinden sich als Schnittpunkte von aufeinanderfolgenden Tangenten von K auf K. Aber wenn $G_{1,2}$ und $G_{3,4}$ auf K liegen, so befinden sich nach dem vorhergehenden Artikel $G_{3,4}$ und $G_{1,2}$ auf $\overline{C}^4$ und ist $G_{3,4}$ der aus der Coincidenz von Q_1 und Q_2, $G_{1,2}$ der aus der Coincidenz von Q_3 und Q_4 hervorgegangene Berührungspunkt der Doppeltangente g. Also sind die Berührungspunkte von C^4 mit einer Doppeltangente Schnittpunkte von $\overline{C}^4$ mit ihrem Wendeschnitte K. Und die Zahl der Doppeltangenten ist jener der Punkte S gleich, also vier; woraus dann noch folgt, dass $\overline{C}^4$ und K acht Punkte gemein haben.

Die im Satze aufgenommene Bemerkung in Bezug auf die Realität der Punkte S und der ihnen entsprechenden Doppeltangenten ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Normalcurven. Bei der ersten Normalcurve erster Gattung (Fig. 22) liegen die einander entsprechenden Punkte P und P' allemal in zwei Scheitelwinkeln der vier von den Achsen CA und CB gebildeten Winkel, bei der zweiten Normalcurve 1. Gattung (Fig. 24) liegen sie an verschiedenen Seiten der imaginären Achse des Wendeschnittes; in beiden Fällen kann keine Coincidenz eintreten, sind also die vier Punkte S, die vier Doppeltangenten von C^4 und die acht Schnittpunkte von C^4 mit K sämtlich imaginär. Bei der Normalcurve zweiter Gattung giebt es zwei reelle Punkte S auf der imaginären Achse von K, da die Transformation in diesem Falle die um diese Gerade umgelegte Verwandtschaft der reciproken Radien ist; die Entfernung dieser Punkte von C ist der Potenz dieser Verwandtschaft gleich.

47. „Die Polsextupel G der verschiedenen Geraden g durch einen gegebenen Punkt P liegen auf der ersten Polare C_p^3 von P in

Bezug auf $\bar{C}^4$ und bilden auf ihr eine Involution sechster Ordnung, die zu dem Strahlbüschel der zugeordneten Geraden g durch P projectivisch ist.

Die erste Polare C_p^3 von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ entspricht sich selbst in der Transformation, welche $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt K überführt."

Die Polsextupel G der Geraden g durch P müssen nach der Polarentheorie auf der ersten Polare C_p^3 von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ liegen. Sie bilden auf C_p^3 eine mit dem Büschel der Strahlen g durch P projectivische Involution; denn, indem irgend eine Gerade g durch P ein einziger Polsextupel bestimmt, so bestimmt auch irgend ein Punkt G von C_p^3 mittelst seiner durch P gehenden Polgeraden g das ganze ihn aufnehmende Polsextupel.

Die Curve C_p^3 entspricht sich selbst in der Transformation, welche $\bar{C}^4$ in K überführt. Ist nämlich G irgend ein Punkt von C_p^3, so enthält diese Curve das ganze Polsextupel, welches G aufnimmt, und also auch die Gegenecke von G im vollkommenen Vierseite, welches das Polsextupel trägt, d. h. den dem Punkte G in der bekannten Transformation entsprechenden Punkt. Im einander Entsprechen der beiden Teile von der ersten Polare eines Punktes von $\bar{C}^4$ haben wir schon einen besonderen Fall dieser allgemeinen Wahrheit behandelt.

Nach im vorhergehenden Jahre publicirten Untersuchungen des Herrn Emil Weyr[3]) giebt es auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung C^3 nur zwei Arten von involutorischen eindeutigen Punktbeziehungen, die centralen und die nicht centralen. Die Punktepaare der ersten liegen auf Strahlen, welche C^3 zum dritten Male in einem festen Punkte treffen; jede nicht centrale Beziehung der verlangten Beschaffenheit ist immer eine der drei Systeme conjugirter Punkte von C^3, welche schon von Maclaurin[4]) aufgewiesen sind. Da nun die drei Verbindungslinien der drei Paare von Gegenecken eines Polsextupels nach den bekannten Eigenschaften des vollkommenen Vierseits nicht durch einen Punkt gehen, ist die involutorische eindeutige Beziehung der Gegenecken $G_{1,2}$ und $G_{3,4}$ auf C_p^3 die Verwandtschaft eines der drei Systeme correspondirender Punktepaare von C_p^3.

3) „Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins" (Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissensch. zu Wien, Band LXXXIX. 2te Abteilung, Seite 436).

4) „Salmon-Fiedler's höhere ebene Curven", Art. 152.

Wirklich folgt aus bekannten Sätzen[5]), dass die drei Paare Gegenecken eines Polsextupels drei Paare conjugirter Punkte eines nämlichen Systemes sind, muss dann aber noch gezeigt werden, dass die verschiedenen Tripel von Paaren Gegenecken aller auf C_p^3 liegenden Polsextupel dem nämlichen Systeme angehören; was ich hier nach Aufführung der Untersuchungen Weyr's wol unterdrücken mag.

Wenn eine Curve C_p^3 mit einem ihrer Systeme conjugirter Punkte $G_{1,2}$, $G_{3,4}$ vorliegt, so giebt es bekanntlich[6]) eine einzige Curve dritter Ordnung, welche C_p^3 zur Hesse'schen und Steiner'schen Curve und auf ihr das System conjugirter Punkte $G_{1,2}$, $G_{3,4}$ zum Systeme von conjugirten Polen hat. Es ist also die Enveloppe der Verbindungslinie der Punktepaare $G_{1,2}$, $G_{3,4}$, die Cayley'sche Curve dieser neuen Curve dritter Ordnung[7]), eine Curve dritter Classe und sechster Ordnung.

Kehren wir zu der Involution sechster Ordnung der Polsextupel G auf C_p^3 zurück, so bemerken wir, dass diese Involution sechs Verzweigungsgruppen von besonderer Beschaffenheit hat. Es können nämlich nur dann zwei Punkte G eines Polsextupels zusammenfallen, wenn die zugeordnete Gerade g durch P die C^4 berührt, und die Anzahl der von P an $\overline{C}^4$ möglichen Tangenten ist sechs. Es sind weiter die sechs Verzweigungsgruppen von besonderer Beschaffenheit, da jede von ihnen nach Fig. 43 aus einem Paare von Doppelpunkten und einem Paare von Verzweigungspunkten besteht. Ueberdies lassen sich die sechs Verzweigungspaare leicht anweisen; denn jedes Paar von Verzweigungspunkten besteht aus einem der sechs von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte von $\overline{C}^4$ und C_p^3 und aus dem entsprechenden Schnittpunkte von K und C_p^3. Und da jede Tangente q' von K drei Punkte von einer Gruppe, nämlich vom Polsextupel der Geraden PQ, enthält, so muss K in der Involutionscurve der betrachteten Involution dreimal begriffen sein und diese Involution ausserdem nur noch die Enveloppe der Verbindungslinien von den Gegenecken der Polsextupel umfassen, welche oben als eine Curve dritter Classe sechster Ordnung erkannt ist.

Wenn man P durch einen Punkt Q von $\overline{C}^4$ ersetzt, wobei die erste Polare aus der Tangente q' von K und dem dieser Geraden

5) Dieser Satz sagt aus, man erhält das ganze System, wozu irgend ein Paar conjugirte Punkte A_1, A_2 gehört, wenn man diese Punkte A_1, A_2 aus allen Punkten der Curve dritter Ordnung auf diese Curve projiciren, Salmon-Fiedler, a. a. O., Art. 152.

6) Cremona, a. a. O., Art. 143.

7) Cremona, a. a. O., Art. 135.

entsprechenden Kegelschnitte C_q^2 besteht, so teilt sich jedes Polsextupel in zwei Tripel, wovon das eine auf q', das andere auf C_q^2 liegt; denn der Punkt Q ist dann für jede durch ihn gehende Gerade einer der vier Schnittpunkte dieser Geraden mit C^4. Es bilden dann die Tripel auf q' eine kubische Involution auf q' und die Tripel auf C_q^2 eine kubische Involution auf C_q^2, da ein Punkt von q' und ebenso von C_q^2 seine Polgerade und also das in zwei Tripel zerfallende Polsextupel bestimmt. Jede dieser beiden kubischen Involutionen hat vier Verzweigungsgruppen, welche den durch Q gehenden $\bar{C}^4$ in einem von Q verschiedenen Punkte berührenden Tangenten entsprechen; denn die Tangente von $\bar{C}^4$ in Q liefert zwei Tripel, welche jedes für sich aus drei verschiedenen Punkten bestehen, wovon aber zwei, die Schnittpunkte von q' und C_q^2, in jedes von beiden eingehen. Also sind die vier Schnittpunkte von q' mit $\bar{C}^4$ die Verzweigungspunkte der Involution auf C_q^2. Offenbar ist K die Involutionscurve der Involution auf C_q^2 und entsprechen die beiden kubischen Involutionen einander in der Transformation, welche $\bar{C}^4$ in K überführt.

48. „Die Steiner'sche Curve des Netzes der ersten Polaren in Bezug auf $\bar{C}^4$ besteht aus der doppelt gezählten $\bar{C}^4$ und ihren vier Doppeltangenten."

Wenn irgend eine der ersten Polaren einen Doppelpunkt D hat, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem D mit einem der vier Punkte S zusammenfällt oder nicht. Hat die erste Polare erstens einen sich selbst entsprechenden Punkt S zum Doppelpunkte, so enthält sie das von diesem Punkte und den Berührungspunkten der diesem Punkte zugeordneten Doppeltangente von $\bar{C}^4$ gebildete Polsextupel und es liegt dann ihr Pol auf dieser Doppeltangente. Und wirklich hat die erste Polare irgend eines Punktes von einer bestimmten Doppeltangente einen Doppelpunkt im zugeordneten Punkte S. Denn die ersten Polaren von den Berührungspunkten D und D' dieser Doppeltangenten enthalten die vier Punkte, welche mit D und D' das Polsextupel der Doppeltangente bilden, und diese Punkte fallen nach Fig. 44 paarweise in den Richtungen der Tangenten DS und $D'S$ vom Wendeschnitte, welche durch S gehen, mit S zusammen. Aber wenn die ersten Polaren von D und D' einen Doppelpunkt haben in S, so hat umgekehrt der Polkegelschnitt von S nach einem bekannten Satze [8]) Doppelpunkte in D und D', ist dieser Kegelschnitt also die doppelt gezählte Doppeltangente und hat er deshalb einen Doppelpunkt in jedem Punkte der Doppeltangente. Und hieraus folgt

8) Cremona, a. a. O., Art. 78.

dann umgekehrt wieder, dass die erste Polare von irgend einem Punkte der Doppeltangente einen Doppelpunkt hat in S. Hat die erste Polare zweitens einen nicht sich selbst entsprechenden Doppelpunkt D, so hat sie als sich selbst entsprechende Curve notwendig einen zweiten Doppelpunkt im entsprechenden Punkte D' und zerfällt sie also in eine Gerade und einen Kegelschnitt, die entweder sich selbst oder einander entsprechen. Hierüber giebt nun weiter das Polsextupel Aufschluss, welches D und also auch D' aufnimmt. Es können nämlich die vier Tangenten aus D und D' an K nicht alle verschieden sein, denn sonst würde jede dieser vier Geraden unsere das Polsextupel enthaltende zerfallende Polare in vier Punkte schneiden. Zur vollständigen Beseitigung des Widerspruches müssen entweder die Tangenten aus D an K zusammenfallen und ebenso die Tangenten aus D' an K, oder aber die Verbindungslinie von D und D' muss K berühren. Aber die erste Voraussetzung macht D und D' zu einander entsprechenden Punkten von K und der ihr entsprechenden C^4, also zu Berührungspunkten einer Doppeltangente von $\overline{C}^4$; woraus dann folgen würde, dass die vier anderen Punkte des Polsextupels im zugeordneten Punkte S vereint sind, die betrachtete Polare in diesem Punkte S ebenfalls einen Doppelpunkt hat, und diese Curve also aus drei Geraden zusammengesetzt ist. Und dies ist unmöglich; denn die Doppeltangente geht nicht durch einen der drei Punkte A, B, C, da sie schon vier Punkte mit C^4 gemein hat, und sie entspricht also weder sich selbst noch einem zerfallenden Kegelschnitte, bildet deshalb mit den beiden Geraden DS und $D'S$ keine sich selbst entsprechende Curve, keine erste Polare. Es restet also nur die zweite Voraussetzung, dass DD' den Wendeschnitt berührt, und diese liefert immer die schon früher gefundene erste Polare, deren Pol auf $\overline{C}^4$ liegt.

Es hat nach den gefundenen Resultaten die erste Polare eines Punktes einen einzigen Doppelpunkt — immer in einem der vier Punkte S — wenn der Pol auf einer der vier Doppeltangenten von C^4 liegt, und zwei einander entsprechende Doppelpunkte, wenn der Pol ein Punkt von $\overline{C}^4$ ist. Also besteht der Ort der Pole, deren erste Polaren in Bezug auf C^4 einen Doppelpunkt haben, d. h. die Steiner'sche Curve des Netzes der ersten Polaren in Bezug auf C^4 aus der doppelt gezählten $\overline{C}^4$ und ihren vier Doppeltangenten. Die zwölf Doppelpunkte, welche nach einem allgemeinen Satze dem Büschel der ersten Polaren von den Punkten einer Gerade g zukommen, sind deshalb die vier Doppelpunktenpaare der vier zerfallenden ersten Polaren, welche den Schnittpunkten von g mit $\overline{C}^4$ ent-

sprechen, und die vier Punkte S, als Doppelpunkte der vier ersten Polaren, wovon die Schnittpunkte von g mit den Doppeltangenten von $\overline{C}^4$ die Pole sind.

49. „Die Hesse'sche Curve des Netzes der ersten Polaren in Bezug auf C^4 ist eine hyperelliptische Curve sechster Ordnung mit sieben Doppelpunkten, die Punkte A, B, C und die vier Punkte S."

Zur Bestimmung der Ort der Doppelpunkte von den zerfallenden Polaren des Netzes zeigen wir erst die Doppelpunkte der ersten Polare irgend eines Punktes Q von $\overline{C}^4$ näher an. Ist q die Tangente von C^4 in Q und nimmt man wieder an, dass von den vier Schnittpunkten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 von q mit $\overline{C}^4$ die beiden ersten Q_1 und Q_2 in Q zusammengefallen sind, so giebt Fig. 43 das Polsextupel von q an; dabei fällt nach Artikel 45 der Punkt $G_{3,4}$ in Q und ist die Coincidenzlinie q' der Seiten q_1' und q_2' des Polvierseits der geradlinige Teil der ersten Polare von Q. Aber dann müssen auch die Schnittpunkte von q' mit q_3' und q_4' die Doppelpunkte dieser ersten Polare sein; denn diese Curve muss das Polsextupel von q enthalten, also q_3' und q_4' in den Schnittpunkten mit q' berühren und deshalb aus q' und einem durch die Schnittpunkte von q' mit q_3' und q_4' gehenden Kegelschnitte bestehen.

Die Ordnung des Ortes der Doppelpunkte der zerfallenden Polaren wird gefunden, indem wir suchen, wieviel Punkte dieser Ort mit irgend einer Tangente von K gemein hat. Diese Tangente kann einmal, nämlich für den ihrem Berührungspunkte mit K entsprechenden Punkt von $\overline{C}^4$, als Gerade q' auftreten und enthält als solche zwei Doppelpunkte; sie kann weiter viermal, nämlich für jeden ihrer Schnittpunkte mit $\overline{C}^4$, als Gerade q_3' oder q_4' auftreten und enthält als solche vier Doppelpunkte. Also enthält irgend eine Tangente von K sechs Punkte des Ortes, und ist dieser sechster Ordnung.

Die gefundene Curve sechster Ordnung hat A, B, C zu Doppelpunkten, da jeder dieser Punkte Doppelpunkt ist von zwei ersten Polaren, von den ersten Polaren dieses zum einen oder zum anderen der beiden durch ihn gehenden Zweigen von $\overline{C}^4$ gerechneten Fundamentalpunktes. Ebenso hat die gefundene Hesse'sche Curve die vier Punkte S zu Doppelpunkten, denn da jedes dieser Punkte Doppelpunkt ist von zwei ersten Polaren, welche ihre Pole, die Berührungspunkte der entsprechenden Doppeltangente von $\overline{C}^4$, auf $\overline{C}^4$ haben, so geht die gesuchte Curve zweimal durch diesen Punkt.

Ein Netz von Curven C^3 mit sieben Basispunkten giebt zu einer involutorischen Verwandtschaft Anlass, denn alle Curven des Netzes,

welche durch irgend einen gegebenen Punkt P gehen, haben noch einen Punkt P' mit einander gemein, und diese Punkte entsprechen einander involutorisch. An einer anderen Stelle[9]) habe ich diese Verwandtschaft untersucht und unter anderm gefunden, dass sie zweiter Ordnung ist, wenn die sieben Basispunkte die vier Eckpunkte und die drei Diagonalpunkte eines vollkommenen Vierecks sind, d. h. wenn diese sieben Punkte die Lage der vier Punkte S und der drei Punkte A, B, C haben. Dabei ergab sich dann, dass die drei Diagonalpunkte die einfachen Fundamentalpunkte der quadratischen Transformation sind, und jeder dieser Punkte die Verbindungslinie der beiden anderen zur Fundamentalgeraden hat. Und man erkennt leicht, dass die vier Eckpunkte des vollständigen Vierecks die sich selbst entsprechenden Punkte dieser Transformation sind; denn die Curve C^3 des Netzes, welche aus drei durch einen dieser vier Punkte gehenden Geraden besteht, schneidet jede Curve des Netzes ausser den Basispunkten nur noch in diesem Punkte. Also ist die Verwandtschaft in dem besonderen Falle mit der Transformation, welche C^4 in ihren Wendeschnitt überführt, identisch, und sind zwei einander in der letzteren Transformation entsprechende Punkte P und P' mit A, B, C und den vier Punkten S immer die Basispunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung.

Weiter habe ich noch an einer anderen Stelle[10]) gezeigt, dass die Curven C^3 durch die Fundamentalpunkte und die vier Punkte S einer quadratischen Transformation in dieser Transformation sich selbst entsprechen. Und dies ist offenbar auch mit der Hesse'schen Curve sechster Ordnung der Fall, da sie der Ort ist von Paaren einander entsprechender Punkte. Sind nun D und D' irgend ein Paar dieser Punkte, so werden die anderen Paare von den Curven dritter Ordnung des Büschels, welcher die drei Punkte A, B, C, die vier Punkte S und D und D' zu Basispunkten hat, auf der Hesse'schen Curve eingeschnitten. Und diese Bemerkung führt weiter zu einer Erzeugung der Hesse'schen Curve mittelst projectivischer Curvenbüschel. Nimmt man nämlich auf dieser Curve zwei Paare einander entsprechende Punkte D_1, D_1' und D_2, D_2' und noch drei beliebig gewählte Punkte D_3, D_4, D_5 an, so kann die projectivische Verwandtschaft der beiden Büschel $C^3(A, B, C, 4S, D_1, D_1')$ und $C^3(A, B, C, 4S, D_2, D_2')$ dadurch bestimmt werden, dass die durch D_3, D_4, D_5 gehenden Curven der beiden Büschel einander entsprechen müssen.

9) „Sur la transformation conjuguée" (Association française pour l'avancement des sciences, compte rendu de la 8e Session. Montpellier, 1879, page 199).

10) „Deux cas particuliers de la transformation birationnelle" (Bulletin des sciences mathem. et astron., 2e Série, tome VI, 1882, page 152—169 et 174—189).

Dann aber erzeugen diese beiden Büschel eine Curve sechster Ordnung mit den sieben Doppelpunkten A, B, C, $4S$, welche durch D_1, D_1', D_2, D_2', D_3, D_4, D_5 geht und also mit der Hesse'schen Curve, wie leicht bewiesen wird, zusammenfällt.

Jede Curve C^3 der von den sieben Doppelpunkten von der Hesse'schen Curve bestimmten Netzes schneidet die Hesse'sche Curve in vier beweglichen Punkten, von welchen man zwei beliebig auf ihr wählen kann. Und alle Curven des Netzes, welche durch einen gegebenen Punkt D_1 von der Hesse'schen Curve gehen, schneiden sie noch in drei anderen Punkten, unter welchen immer der entsprechende Punkt D_1' begriffen ist. Dies kennzeichnet die Hesse'sche Curve als eine hyperelliptische[11]) Curve vom dritten Geschlechte[12]). Und hieraus folgt nun weiter, dass die Verbindungslinie der Punktenpaare D_1, D_1' eine rationale Curve umhüllen muss[13]); was uns im vorliegenden Falle schon bekannt war, da diese Verbindungslinien Tangenten von Wendeschnitte sind[14]).

Fünfter Abschnitt.

(Der Berührungskegelschnitt).

50. „Die erste Polare C_p^3 eines Punktes P in Bezug auf $\bar{C}^4$ wird in den Inflexionsknoten A, B, C von $\bar{C}^4$ von einem bestimmten Kegelschnitte D_p^2 berührt. Diesen Kegelschnitt schneidet die $\bar{C}^4$ ausser A, B, C noch in zwei Punkten P_p' und P_p''."

Ist K (Fig. 45) der Wendeschnitt von $\bar{C}^4$, dann sind bekanntlich die aus A an K möglichen Tangenten a' und a'' die Wende-

11) Man vergleiche die „Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch, bearbeitet und herausgegeben von Dr. F Lindemann, Seite 711 oder in der ursprünglichen Form die Verhandlung „Ueber algebraische Functionen" von Brill und Nöther (Mathematische Annalen, Band 7, Seite 286 und 287).

12) Das Geschlecht der Curve wird bestimmt von der Mächtigkeit der Schaar von adjongirten Curven dritter Ordnung; aber die Anzahl der Doppelpunkte führt zum nämlichen Resultate. denn man hat

$$\frac{5.4}{2} - 7 = 3.$$

13) Die Verbindungslinie muss eine rationale Curve umhüllen, da jeder Wert des Parameters, welcher die Curve der Büschel dritter Ordnung bestimmt, eine Verbindungslinie liefert.

14) Ich übergehe hier am Ende dieses Abschnitts die dualistisch gegenüberstehenden Ergebnisse, da die dualistische Uebertragung der Polarentheorie solche schwerfällige Resultaten liefert.

tangenten von $\bar{C}^4$ im Doppelpunkte A. Nun ist nach der Polarentheorie die Tangente in A an der ersten Polare C_p^3 von P in Bezug auf C^4 die Gerade durch A, welche P harmonisch trennt von a' und a''. Aber diese Gerade geht offenbar durch den Schnittpunkt A' der Polare p von P in Bezug auf K mit BC, da dieser Punkt A' der Pol von AP in Bezug auf K ist. Also liegen die Schnittpunkte A', B', C' der Tangenten in A, B, C an C_p^3 mit den Gegenseiten des Dreiecks ABC in einer Geraden, die Polare p von P in Bezug auf K; was bekanntlich beweiset, dass es einen Kegelschnitt D_p^2 giebt, welcher mit C_p^3 in den Punkten A, B, C die Tangenten AA'', BB'', CC'' gemein hat. Dieser Kegelschnitt hat ausser A, B, C noch zwei Punkte P_d' und P_d'' mit C^4 gemein, da die ihr entsprechende Gerade K in zwei Punkten schneidet.[15])

51. „Die Berührungspunkte der sechs durch irgend einen Punkt P an $\bar{C}^4$ möglichen Tangenten liegen in einem Kegelschnitte T_p^2. Dieser Kegelschnitt schneidet die $\bar{C}^4$ in zwei neuen Punkten P_t' und P_t'', welche mit P_d^1 und P_d^2 auf einer Geraden liegen."

Liegen $nr - \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ von den n^2 Schnittpunkten zweier Curven C^n von der Ordnung n auf einer Curve C^r niederer Ordnung r, so enthält C^r noch $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ dieser Schnittpunkte, und liegen die übrigen $n(n-r)$ Schnittpunkte der Curven C^n auf einer Curve C^{n-r} der Ordnung $n-r$. Der von Plücker[16]) herrührende Satz beweiset den Satz dieses Artikels[17]). Wenn man nämlich durch fünf der sechs Schnittpunkte von C_p^3 und $\bar{C}^4$, welche von A, B, C verschieden sind, einen Kegelschnitt T_p^2 legt, so bilden $\bar{C}^4$ und die aus den Kegelschnitten D_p^2 und T_p^2 bestehende Curve C_1^4 zwei Curven vierter Ordnung, welche elf auf C_p^3 liegende Punkte mit einander gemein haben, nämlich A, B, C, ihre Nachbarpunkte auf C_p^3 und die fünf Punkte mittelst welcher T_p^2 bestimmt worden ist. Also enthält C_p^3 noch einen Schnittpunkt von den beiden Curven vierter

15) Oder da $\bar{C}^4$ und D_p^2 einander überhaupt in acht Punkten schneiden und jeder der Punkte A, B, C zweimal als Schnittpunkt von $\bar{C}^4$ und D_p^2 zu zählen ist.

16) Cremona, a. a. O., 43, Lehrsatz 5.

17) Dieser Satz ist für die Lemniscate von Ralph A. Roberts publieirt worden in seiner Aufgabensammlung „A collection of examples and problems on conics and some of the Higher plane curves" (Example 345). Man vergleiche auch den analytischen Beweis dieses speciellen Falles, welcher durch centrale Projection verallgemeinert werden kann, in meiner „Notiz über die Lemniscate" (Sitzungsberichte u. s. w.), Band LXXXIX, 2te Abtheilung, Seite 1252), welche schon viele der folgenden Resultate in anderer Behandlungsweise enthält.

Digitized by Google

Ordnung, und dieser Punkt ist dann, da die sechs Schnittpunkte von D_p^2 und C_p^3 schon alle in den elf angezeigten Punkten aufgenommen sind, der sechste Schnittpunkt von T_p^2 mit C_p^3. Also geht der durch fünf der sechs von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte von C_p und $\overline{C^4}$ gebrachte Kegelschnitt T_p^2 auch durch den sechsten, und liegen die sechs von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte von C_p^3 und $\overline{C^4}$, die Berührungspunkte der sechs von P an $\overline{C^4}$ möglichen Tangenten auf einem Kegelschnitte T_p^2. Und da die vier übrigen Schnittpunkte der beiden Curven vierter Ordnung auf einer Geraden liegen müssen, ist die Verbindungslinie der beiden neuen Schnittpunkte P_t' und P_t'' von T_p^2 und $\overline{C^4}$, welche nicht auf C_p^4 liegen, nicht verschieden von der Verbindungslinie der beiden neuen Schnittpunkte P_d' und P_d'' von D_p^2 und $\overline{C^4}$, welche dies ebenso wenig tun.

Der Kürze wegen nenne ich die Punkte P_d' und P_d'' die „Restdoppelpunkte", die Punkte P_t' und P_t'' die Restpunkte" und die Gerade dieser vier Punkte die „Restgerade" von P in Bezug auf C^4

52. „Die Restgerade von P in Bezug auf $\overline{C^4}$ ist die Polgerade von P in Bezug auf $\overline{C^4}$."

Wir beweisen diesen Satz bei den Normalcurven und denken ihn nachher mittelst centraler Projection auf den allgemeinen einer Curve $\overline{C^4}$ ohne Mittelpunkt übertragen. Dabei behandeln wir nach einander die Normalcurven erster und zweiter Gattung.

Ist (Fig. 21 und Fig. 23) P der gegebene Punkt, so ist nach Artikel 50. der Kegelschnitt D_p^2 dadurch bestimmt, dass er durch A, B, C gehen und in Bezug auf das eingeschriebene Dreieck ABC die Polare p von P in Bezug auf den Wendeschnitt E, resp. H zur Pascal'schen Linie haben muss. Also ist D_p^2 die gleichseitige Hyperbel durch C, welche P_1 zum Mittelpunkt und $P_1 R_1$ und $P_1 S_1$ zu Asymptoten hat. Da in der bekannten Transformation den unendlich fernen Punkten dieser Hyperbel die Punkte R_1' und S_1' entsprechen, so entspricht dieser Hyperbel die Gerade p'. Es entsprechen also die Schnittpunkte von p' und E, resp. H den Punkten P_d' und P_d''. Da nun die vier Punkte P_d', P_d'', P_t', P_t'' die vier

In den „Notes and solutions to some of the problems" am Ende des englischen Werkchens macht Roberts die Bemerkung, dass der Weyr'sche Satz von Dr. Casey herrührt. Wenn dieser Mathematiker ihn schon in 1869 in den „Transactions of the irish academy, volume 24. publicirt hat, so wird dieser Satz also der Casey'sche Satz heissen müssen. Aber ich bin nicht in der Lage die Abhandlung des irischen Mathematikers zu ratpflegen.

Schnittpunkte von $\overline{C}^4$ mit einer Geraden sind, so entsprechen den Punkten P_t' und P_t'' die nenen Schnittpunkte von E, resp. H mit dem durch A, B, C und die Schnittpunkte von p' und E, resp. H geführten Kegelschnitte. Aber nach Artikel 31. sind diese nenen Schnittpunkte die Schnittpunkte von p mit E, resp. H und entsprechen also die Schnittpunkte von p mit E resp. H den Punkten P_t' und P_t'' von $\overline{C}^4$. Da nun nach Artikel 41. die Verbindungslinie der Punkte von $\overline{C}^4$, welche den Berührungspunkten vom Wendeschnitte mit seinen durch P gehenden Tangenten entsprechen, die Polgerade von P ist, ist der Satz für die Normalcuren erster Gattung bewiesen.

Bei der Normalcurve zweiter Gattung legen wir dem nämlichen Gedankengang folgend das Hauptgewicht auf die Anweisung der Hülfsmittel zur Umgehung der imaginären Kreispunkte. Es ist D_p^2 wieder der durch C gehende Kreis, welcher in Bezug auf das von den Kreispunkten und C gebildete eingeschriebene Dreieck die Polare p von P in Bezug auf den Wendeschnitt H zur Pascal'schen Linie hat. Wir beweisen sogleich, dass dieser Kreis das Spiegelbild von C in Bezug auf p zum Centrum hat. Ist nämlich in Fig. 46 (der Polarfigur von Fig. 34) ABC ein in K eingeschriebenes Dreieck und s die durch die Schnittpunkte D von a und d, E von b und e, F von c und f gehende Pascal'sche Linie, so werden c und s den Schnittpunkt C' von d und e harmonisch trennen von f. Und sind nun A und B die Kreispunkte, wobei c die unendlich ferne Gerade und K ein Kreis mit dem Centrum C' ist, so trennen s und die unendlich ferne Gerade den Punkt C des Kreises harmonisch vom Mittelpunkte C', ist also s, da sie den unendlich fernen Punkt der Kreistangente des Punktes C enthält, die Mittelsenkrechte von der Strecke CC'. Diesem Kreise entspricht nun in der bekannten Transformation die Gerade p'. Es entspricht nämlich diesem Kreise in jeder Transformation der reciproken Radien mit C als Centrum eine Gerade, welche zu p parallel ist, also in der $\overline{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführenden Transformation (Fig. 26), welche eine um die imaginäre Achse vom Wendeschnitte H umgelegte Transformation der reciproken Radien mit C als Centrum ist, eine zu p' parallele Gerade. Und dem auf der Entfernung $4\,CP_0$ von C liegende zweite Schnittpunkt von CP_0 mit dem Kreise entspricht der Punkt P_0' von p'; denn nach Artikel 27. hat man die Relation

$$4\,CP_0' \,.\, CP_0' = CF^2$$

Digitized by Google

Also entsprechen die Schnittpunkte von p' und H den Punkten P_d' und P_d'' von der Normalcurve zweiter Gattung. Und dann entsprechen weiter nach Artikel 31. die Schnittpunkte von p mit H den Punkten P_t' und P_t'' und findet man eben wie oben, dass die Verbindungslinie der vier Punkte P_d', P_d'', P_t', P_t'' die Polare von P in Bezug auf die Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung ist.

Nachdem der Satz nun mittelst centraler Projection auf eine Curve $\bar{C}^4$ ohne Mittelpunkt ausgedehnt ist, kann man noch bemerken, dass der Punkt P als $G_{1,2}$ zu kennzeichnen ist, wenn man P_t' und P_t'' als Q_1 und Q_2, P_d' und P_d'' als Q_3 und Q_4 betrachtet.

53. „Die Punktepaare, deren Restepunktenpaare einander zu den vier Schnittpunkten von $\bar{C}^4$ mit den Geraden ihrer Ebene ergänzen, entsprechen einander in der bekannten Transformation von $\bar{C}^4$ und K. Die sechs Punkte, deren Restpunktenpaare die zu je zweien genommenen Combinationen der vier Schnittpunkte von $\bar{C}^4$ mit einer Gerade g sind, bilden das Polsextupel von g in Bezug auf $\bar{C}^4$. Der Ort der Punkte, deren Restgerade durch einen gegebenen Punkt gehen, ist die erste Polare $C_{p^2}^3$ von P in Bezug auf $\bar{C}^4$.“

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des vorhergehenden.

54. „Der Wendeschnitt K ist der Ort der Punkte deren Restpunkte, die Curve $\bar{C}^4$ ist der Ort der Punkte, deren Doppelrestpunkte zusammenfallen.“

Liegt P auf K, so fallen die Punkte, welche P_t' und P_t'' entsprechen, als die Berührungspunkte der aus P an K möglichen Tangenten zusammen, und tun dies also auch die Punkte P_t' und P_t''. Und bei den Punkten P_d' und P_d'' wird Zusammenfallen eintreten, wenn der P entsprechende Punkt P' auf K, also P auf $\bar{C}^4$ liegt; denn nach dem ersten Teile des vorhergehenden Satzes tauschen Restpunkte und Restdoppelpunkte ihre Rollen, wenn man P durch den ihm entsprechenden Punkt P' ersetzt, und bedingt das Zusammenfallen der Restpunkte von P' also jenes der Restdoppelpunkte von P. Dieses letzte Resultat ist auch hiermit in Einklang, dass der Berührungskegelschnitt eines Punktes Q von $\bar{C}^4$ aus der Tangente q' von K im entsprechenden Punkte Q' und aus der Tangente q von $\bar{C}^4$ in Q bestehen muss, die beiden anderen Schnittpunkte von q mit $\bar{C}^4$ also die Restpunkte von Q sind, und die Restdoppelpunkte von Q mit diesem Punkte zusammenfallen.[18])

18) Es wird dieses Zusammenfallen in Artikel 58 näher beleuchtet werden.

55. Wenn P irgend eine Gerade g durchläuft, so erzeugen seine Restpunkte auf $\bar{C}^4$ eine quadratische Involution, welche degenerirt wenn g eine Tangente von K ist."

Die Paare von Restpunkten der Punkte P einer Geraden g bilden auf $\bar{C}^4$ eine Involution, da jeder Punkt von $\bar{C}^4$ seinen Pol und durch diesen involutorisch den ihn zu einem Restpunktenpaare ergänzenden Punkt bestimmt; ist nämlich P_t' auf C^4 gegeben, so ist der Pol P der Schnittpunkt von g mit der Tangente vom Wendeschnitte im Punkte, welcher dem gegebenen Punkte P_t' von $\bar{C}^4$ entspricht. Und man findet leicht einen diese Involution in $\bar{C}^4$ ausschneidenden Büschel. Denn nach Artikel 52 entsprechen den Restpunkten P_t' und P_t'' von P (F.g. 21 und 23) die Schnittpunkte vom Wendeschnitte E resp. H mit der Polgerade p von P in Bezug auf diesen Kegelschnitt, schneiden die durch den Pol G von g gehenden Polgeraden p der Punkte P von g im Wendeschnitte also die Involution der den Restpunktenpaaren entsprechende Punktepaare und der diesem Strahlenbüschel entsprechende Büschel von Kegelschnitten durch A, B, C und den dem Pole G von g entsprechenden Punkt G in $\bar{C}^4$ die quadratische Involution der Restpunktenpaare aus.

Ist g eine Tangente vom Wendeschnitt, so liegt G auf ihm, reducirt sich die Involution der entsprechenden Punkte, also auch jene der Paare Restpunkte, indem jedes Paar aus einem bestimmten Punkte von $\bar{C}^4$, welcher sich unmittelbar als der dem Berührungspunkte von G mit dem Wendeschnitte entsprechende Punkt ergiebt, und irgend einem anderen Punkte von C^4 besteht.

56. „Die Polgerade des Punktes P in Bezug auf den Kegelschnitt D_p^2 durch A, B, C und die Restdoppelpunkte fällt mit der Polgerade von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ zusammen."

Da die Polgerade von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ den Kegelschnitt D_p^2 in den Restdoppelpunkten P_d' und P_d'' schneidet, hat man nur zu beweisen, dass PP_d' und PP_d'' diesen Kegelschnitt in P_d' und P_d'' berühren. Wir führen diesen Beweis mittelst der Transformation, welche $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt umbildet, indem wir zeigen, dass die Kegelschnitte, welche den Geraden PP_d' und PP_d'' entsprechen, von der dem Kegelschnitte D_p^2 entsprechenden Geraden berührt werden, und betrachten dabei nach einander wieder die Normalcurven $\bar{C}^4$ erster und zweiter Gattung.

Bei der Normalcurve $\bar{C}^4$ erster Gattung beschränken wir uns

Digitized by Google

auf den Fall einer Cnrve $\overline{C}^4$, deren Wendeschnitt ein Kreis ist, was nach Artikel 22 die Allgemeinheit des Beweises nicht beeinträchtigt. Ist in Fig. 47 der Kreis Kr dieser Wendeschnitt, sind die Durchmesser CA nnd CB die Symmetrieachsen von $\overline{C}^4$ nnd ist P der gegebene Pnnkt, so entsprechen nach Artikel 49 den Pnnkten P, P_d', P_d'' nnd dem Kegelschnitte D_p^2 die Punkte P', $P_{d'}'$, $P_{d'}''$ nnd die Gerade $P_{d'}'P_{d'}''$ der Figur. Also mnss die Gerade $P_{d'}'P_{d'}''$ den Kegelschnitt $(A, B, C, P', P_{d'}')$ in $P_{d'}'$ nnd den Kegelschnitt $(A, B, C, P', P_{d'}'')$ in $P_{d'}''$ berühren. Und dies ist nach dem zweiten Teile des Satzes von Artikel 12 wirklich der Fall. Denn von diesen Kegelschnitten, welche beide gleichseitige Hyperbeln sind, ist der erste dem rechtwinkligen Dreieck $CP'P_{d'}'$, der zweite dem rechtwinkligen Dreieck $CP'P_{d'}''$ umschrieben, nnd $P_{d'}'P_{d'}''$ ist senkrecht zn der gemeinschaftlichen Hypotenuse dieser beiden Dreiecke.

Bei der Normalcnre C^4 zweiter Gattnng haben nach Artikel 53. die den Pnnkten P, P_d', P_d'' entsprechenden Pnnkte P', $P'_{d'}$, $P''_{d'}$, die in Fig. 48. angegebene Lage in Bezng auf einander, nnd mnss also nnr gezeigt werden, dass die Kreise durch P', C, $P'_{d'}$, nnd durch P' C. $P'_{d'}$ die Gerade $P'_{d'}$, $P'_{d'}$ in $P'_{d'}$ nnd $P'_{d'}$ berühren. Ist nnn Q der Schnittpunkt von $P'P_{d'}'$ mit cY nnd $c\overline{R}$ zn P'_d, P_d' parallel, so ist, da $P'P_d'$ den Wendeschnitt H in $P'_{d'}$ berührt,

$$\angle QCP'_{d'} = \angle CQP'_{d'} = \angle P'CQ + \angle CP'Q$$

und da CP' nnd $C\overline{R}$ conjngirte Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel H sind,

$$\angle QC\overline{R} = \angle P'CQ$$

also durch Snbstitntion

$$\angle \overline{R}CP'_{d'} = \angle CP'Q \quad \text{oder} \quad \angle CP'_{d'} = \angle CP'Q$$

d. h. der Kreis durch P', C, $P'_{d'}$ berührt $P'_{d'} P''_{d'}$ in $P'_{d'}$. Und ebenso beweist man, dass der Kreis durch P', C, $P''_{d'}$ die Gerade $P'_{d'} P''_{d'}$ in $P''_{d'}$ berührt.

Da obenstehende Beweisführungen nicht mehr zulässig sind, wenn die Gerade $P'_{d'} P''_{d'}$ den Wendeschnitt nicht schneidet, d. h. wenn P' innerhalb des Wendeschnitts liegt, so geben wir noch einen allgemeinen von der Lage von P' in Bezug auf den Wendeschnitt unabhängigen Beweis, indem wir zeigen, dass die Kegelschnitte des Büschels mit den Basispnnkten A, B, C, P' (Fig. 49) die Polare p' von P' in Bezng auf den Wendeschnitt K in einer Involntion von in Bezug auf K in einander conjngirten Pnnktepaaren schneiden. Und dies ist nnmittelbar hieraus zn entnehmen, dass jeder Kegel-

Digitized by Google

schnitt durch A, B, C, P' dem Poldreieck ABC von K umschrieben ist und er also die Polare p' von P' in Bezug auf K in zwei Punkten schneiden wird, welche mit P' ein Poldreieck von K bilden und also in Bezug auf K zu einander conjugirt sind. Also werden die beiden Kegelschnitte durch A, B, C, P', welche p' berühren, dies auf K tun, d. h. die Geraden durch P, welche D_p^2 berühren, berühren diesen Kegelschnitt auf C^4, in den Punkten P_d' und P_d''.

57. „Die Polgerade des Punktes P in Bezug auf den Kegelschnitt T_p^2 der Berührungspunkte von den aus P an $\bar{C}^4$ möglichen Tangenten fällt mit der Polgeraden von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ zusammen, d. h. indem der Berührungskegelschnitt T_p^2 in $\bar{C}^4$ die Berührungspunkte der aus P an $\bar{C}^4$ möglichen Tangenten einschneidet, schneidet umgekehrt auch $\bar{C}^4$ in T_p^2 die Berührungspunkte von den aus P an T_p^2 möglichen Tangenten ein und bildet also die Combination von $\bar{C}^4$ mit T_p^2 eine zusammengesetzte Curve sechster Ordnung mit acht von A, B, C verschiedenen Doppelpunkten, deren jeder eine der beiden Doppelpunktstangenten durch P sendet."

Dieser Satz, welcher einer merkwürdigen Wechselbeziehung der Curven C^4 und T_p^2 in Bezug auf den Punkt P Ausdruck giebt, ist in Verbindung mit einem Paare von einfachen Sätzen der Polarentheorie eine Folge des vorhergehenden Satzes.

Der erste dieser Hülfssätze sagt aus, dass die Polgeraden eines Punktes P in Bezug auf die Curven eines Büschels einen Strahlenbüschel bilden[19]) und deshalb zusammenfallen, wenn die Polgeraden von P in Bezug auf zwei verschiedene Curven des Büschels dies tun. Und der zweite Hülfssatz behauptet, dass die drei Polgeraden von P in Bezug auf drei Curven, von welchen eine aus der Combination der beiden anderen besteht, in eine Gerade zusammenfallen werden, wenn zwei von ihnen es tun: welcher Satz unmittelbar aus der Definition der Polgeraden[20]) abzuleiten ist.

Nun gehören nach Artikel 52, wenn p die Polare von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ andeutet, die drei Curven vierter Ordnung $\bar{C}^4$, $C_p^3 + p$, $D_p^2 + T_p^2$ einem Büschel an. Nach dem zweiten Hülfssatze hat

19) Cremona, a. a. O., Art. 81, Lehrsatz 7.

20) Mittelst der Definition

$$\Sigma \left(\frac{ma}{oa}\right)_1 = 0$$

Man vergleiche Cremona, a. a. O., Art. 11.

$C_p{}^3 + p$ die Gerade p zur Polgerade von P; es haben also die Curven $\bar{C}^4$ und $C_p{}^3 + p$ in Bezug auf P die nämliche Polgerade, und es ist deshalb nach dem ersten Hülfssatze p ebenfalls die Polgerade von P in Bezug auf $D_p{}^2 + T_p{}^2$. Aber da p nach Artikel 53. die Polgerade von P in Bezug auf $D_p{}^2$ ist, so ist p nach dem zweiten Hülfssatze ebenfalls die Polgerade von P in Bezug auf den Berührungskegelschnitt $T_p{}^2$.[21])

58. „Der Berührungskegelschnitt $T_p{}^2$ zerfällt in zwei Gerade, wenn P auf $\bar{C}^4$ oder auf dem Wendeschnitte K dieser Curve liegt; bei allen anderen Lagen von P ist $T_p{}^2$ nicht zusammengesetzt."

Ist der gegebene Punkt ein Punkt Q von $\bar{C}^4$, so besteht $T_q{}^2$ nach dem Weyr'schen Satze aus der Tangente q von $\bar{C}^4$ in Q und der Tangente q' von K im entsprechenden Punkte Q'. Ist der gegebene Punkt ein Punkt Q' von K, so fallen seine Restpunkte nach Artikel 54. im entsprechenden Punkt Q von $\bar{C}^4$ zusammen; deshalb ist nach dem vorhergehenden Satze Q der gemeinschaftliche Berührungspunkt der zwei von Q' an $\bar{T}_{q'}{}^2$ möglichen, hier mit $Q'Q$ zusammenfallenden Tangenten, und hat $T_{q'}{}^2$ in Q einen Doppelpunkt, so besteht $T_{q'}{}^2$ also aus zwei Geraden durch Q. Neben den durch irgend einen Punkt Q von $\bar{C}^4$ möglichen Tangenten an K, welche jede für sich $\bar{C}^4$ in vier Punkten mit durch einen Punkt von $\bar{C}^4$ gehenden Tangenten schneiden, kann man deshalb durch diesen Punkt noch zwei Gerade, die zusammenfallenden Teile von $T_{q'}{}^2$, so ziehen, dass jede von diesem $\bar{C}^4$ ausser Q noch in drei Punkten mit durch einen Punkt, den entsprechenden Punkt Q' von K, gehenden Tangenten schneidet.[22])

Bei allen anderen Lagen von P ist $T_{p'}{}^2$ ein nicht zerfallender Kegelschnitt. Denn, da die Berührungspunkte von den Tangenten aus P an $T_p{}^2$ auf der Polgeraden p von P in Bezug auf $\bar{C}^4$ liegen, so können diese Tangenten nur dann zusammenfallen, entweder wenn p durch P geht, d. h P auf $\bar{C}^4$ liegt, oder die Restpunkte von P zusammenfallen, d. h. P auf K liegt. Und nur wenn die Tangenten aus P an $T_p{}^2$ zusammenfallen, kann $T_p{}^2$ entarten.

Aus obenstehenden Betrachtungen folgt nun noch, dass die beiden Geraden, welche den Berührungskegelschnitt $T_{q'}{}^2$ eines Punktes

21) Einen analytischen Beweis dieses Satzes entnimmt man leicht aus meiner „Notiz über die Lemniscate (a. a. O.; Seite 1257).

22) Es ergänzt dieses Resultat den ersten Teil des Satzes von Art. 54.

Q' von K bilden, durch Q gehen und Q' harmonisch trennen von der Tangente q von $\bar{C}^4$ in Q. Später wird die Lage dieser beiden Geraden näher angewiesen werden.[23])

59. „Wenn der Kegelschnitt D_p^2 von P durch Q geht, so geht umgekehrt der Kegelschnitt D_q^2 von Q durch P, d. h. der Ort der Punkte Q, deren Kegelschnitte durch P gehen, ist der Kegelschnitt D_p^2 von P."

Wenn die Polgerade p' von P' in Bezug auf den Wendeschnitt K durch Q' geht, so geht umgekehrt die Polgerade q' von Q' in Bezug auf K durch P^1). Dieser bekannte Satz geht mittelst der bekannten Transformation in den Satz dieses Artikels über, da nach Artikel 53. den Polgeraden p' und q' von P' und Q' in Bezug auf K die Kegelschnitte D_p^2 und D_q^2 von P und Q entsprechen.

60. „Die vier Schnittpunkte von $\bar{C}^4$ mit einer Geraden sind von einander unabhängig."

Die Abhängigkeit zweier Gruppen von vier Punkten von einander kann bekanntlich nur darin bestehen, dass beide Gruppen das nämliche Doppelverhältniss zeigen. Dies aber trifft bei den Curven $\bar{C}^4$ nicht zu. Denn die Voraussetzung, dass irgend zwei in einem Punkte P von $\bar{C}^4$ einen unendlich kleinen Winkel mit einander bildende Gerade $\bar{C}^4$ nach gleichem Doppelverhältnisse schneiden, würde unmittelbar bedingen, dass jede Gerade durch P die $\bar{C}^4$ ausser P in drei Punkten mit durch einen Punkt gehenden Tangenten träfe. Was nach Artikel 58. nur bei zwei durch P gehenden Geraden der Fall sein kann.

Aus dem Satze dieses Artikels geht hervor, dass die Bedingung welche aussagt, dass eine $\bar{C}^4$ irgend eine Gerade in vier gegebenen Punkten schneidet, vier einfachen Bedingungen aequivalent ist. Nun ist ein Kegelschnitt K, von welchem ein Poldreieck ABC vorliegt, durch zwei seiner Punkte bestimmt; also kann man zur Bestimmung einer $\bar{C}^4$ mit gegebenen Inflexionsknoten auch zwei Punkte willkürlich annehmen. Da weiter Unbekanntheit mit der Lage von jedem der drei Inflexionsknoten der $\bar{C}^4$ die Zahl der willkürlich annehmbaren Punkte um zwei steigert, kann man zur Bestimmung einer $\bar{C}^4$ im allgemeinen acht Punkte willkürlich wählen. Also geht durch vier beliebig auf einer Gerade g angenommene Punkte eine vierfach unendliche Anzahl von Curven $\bar{C}^4$.

23) Man vergleiche Artikel 67.

61. „Wenn der Berührungskegelschnitt T_p^2 von P durch Q geht, so geht umgekehrt der Berührungskegelschnitt T_q^2 von Q durch P, d. h. der Ort der Punkte Q, deren Berührungskegelschnitte durch P gehen, ist der Berührungskegelschnitt T_p^2 von P."

Betrachten wir nochmals die drei Curven C^4, C_p^3+p, $D_p^3+T_p^2$ von Artikel 57., welche einem Büschel von Curven vierter Ordnung angehören und bezeichnen wir die Schnittpunktenquadrupel dieser Curven mit irgend einer Geraden g, welche den Punkt P enthält, worauf C_p^3, p, D_p^2, T_p^2 sich beziehen, durch $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, $R_1 R_2 R_3$ und S, $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$, so ist, wie sich zeigen lässt, das Quadrupel $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$ in der von den beiden anderen Quadrupeln auf g bestimmten biquadratischen Involution dadurch gekennzeichnet, dass es sich in zwei von P und S harmonisch getrennte Paare $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$ zerlegen lässt. Erstens kommt ihm nach den Artikeln 56. und 57. diese Eigenschaft zu. Zweitens beweisen wir wie folgt, dass es in der angegebenen Involution das einzige Quadrupel ist, welches diese Eigenschaft besitzt. Ist $U_1 U_2 U_3 U_4$ irgend ein Quadrupel der vorliegenden Involution, und trennen $V_1 V_2 V_3 V_4$ die Punkte dieses Quadrupels harmonisch von P und S, so bilden die verschiedenen Quadrupel $V_1 V_2 V_3 V_4$, welche den Quadrupeln $U_1 U_2 U_3 U_4$ entsprechen, offenbar eine neue Involution, welche mit der gegebenen projectivisch ist. Wenn nun die Involution $U_1 U_2 U_3 U_4$ zwei in zwei von P und S harmonisch getrennte Paare zerlegbare Quadrupel besässe, so würden die Involutionen $U_1 U_2 U_3 U_4$ und $V_1 V_2 V_3 V_4$ aus den nämlichen Gruppen bestehen, jede Gruppe der Involution $V_1 V_2 V_3 V_4$, also auch eine Gruppe der Involution $U_1 U_2 U_3 U_4$ sein. Und dies führt zum Irrschlusse, dass die Involution zwei durch S gehende Gruppen zulässt, die Gruppe $R_1 R_2 R_3$ und S, und die Gruppe der vier Punkte, welche diese Punkte harmonisch trennen von P und S. Deshalb kann die von den Quadrupeln $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, $R_1 R_2 R_3$ und S bestimmte Involution keine zwei Gruppen besitzen, welche sich in zwei von P und S harmonisch getrennte Paare zerlegen lassen.

Betrachten wir nun weiter die vierfach unendliche Anzahl der durch $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ gehenden Curven C^4, so erhellt aus dem vorhergehenden, dass die in Bezug auf diese Curven genommenen zusammengesetzten Curven $D_p^2+T_p^2$ von P die Gerade g sämtlich in den Punktepaaren $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$ schneiden. Aber dabei fragt es sich, ob immer das Paar $D_1 D_2$ auf dem Teile D_p^2 wie das Paar $T_1 T_2$ auf dem Teile T_p^2 liege. Und hierauf muss die Antwort entschieden verneinend lauten. Da nämlich die Paare $D_1 D_2$ und $T_1 T_2$ in Bezug auf die Quadrupel $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, $R_1 R_2 R_3$ und S eine ganz gleiche Bedeutung haben, werden die Punkte $D_1 D_2$ resp. $T_1 T_2$ bei der einen Hälfte

der vierfach unendlichen Anzahl von Curven $\bar{C}^4$ durch Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 auf der entsprechenden Curve D_p^2, resp. T_p^2, bei der anderen Hälfte auf T_p^2, resp. D_p^2 zu finden sein. Nennt man nun zwei Curven $\bar{C}^4$ durch die Punkte $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ von g in Bezug auf den Punkt P von g gleichartig oder ungleichartig, jenachdem von den zwei Paaren von Kegelschnitten D_p^2 und T_p^2 die gleichnamigen oder die ungleichnamigen durch die nämlichen Punkte von q gehen, so teilt dieses Verhalten die Curven $\bar{C}^4$ durch

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad Q_4$$

so in zwei Gruppen, dass zwei dieser Curven in Bezug auf P gleichartig oder ungleichartig sind, jenachdem sie zur nämlichen Gruppe oder zu verschiedenen Gruppen gehören. Offenbar wird, was hier für den Punkt P der Geraden g gefunden ist, auch allgemein für irgend einen Punkt von g gelten. Dabei fragt es sich aber, ob die Teilung der Curven C_4 durch $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ in zwei Gruppen von der Lage des Punktes P auf g abhängt oder nicht; aber diese Frage wird im folgenden Artikel beantwortet werden.

Wenn ich mich jetzt zum Satze dieses Artikels wende, so setze ich voraus, dass der Berührungskegelschnitt T_p^2 von P in Bezug auf die gegebene Curve $\bar{C}^4$ durch Q geht und die Verbindungslinie g der Punkte P und Q die C^4 in den Punkten $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ schneidet. Nach den vorhergehenden Entwickelungen ist Q dann ein Punkt des Kegelschnittes D_p^2 von P in Bezug auf eine andere Curve $\bar{C}^4$, durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, welche mittelst eines Indexes unterschiedene Curve man noch aus einer vierfach unendlichen Anzahl wählen kann. Aber dann geht nach Artikel 56. umgekehrt der Kegelschnitt D_q^2 von Q in Bezug auf $\bar{C}^4_1$ durch P. Und da die Curven $\bar{C}^4$ und $\bar{C}^4_1$ für irgend einen Punkt von g das nämliche Quadrupel $D_1\,D_2$ und $T_1\,T_2$ liefern, liegt P auf der aus den Kegelschnitten D_q^2 und T_q^2 von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$ zusammengesetzten Curve vierter Ordnung, also entweder auf D_q^2 von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$ oder auf T_q^2 von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$. Aber auf D_q^2 von Q in Bezug auf C^4 kann P nicht liegen, denn Q liegt nicht auf D_p^2 von P in Bezug auf $\bar{C}^4$. Also liegt P auf dem Berührungskegelschnitte T_q^2 von Q in Bezug auf $\bar{C}^4$ und ist der Satz dieses Artikels bewiesen.[24])

62. „Die Teilung der Curven $\bar{C}^4$ durch die vier Punkte $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ einer Geraden g in zwei Gruppen nach dem Verhalten

24) Für einen analytischen Beweis vergleiche man meine „Notiz über die Lemniscate" (a. a. O., Seite 1256).

der Schnittpunkte von g mit den in Bezug auf ihnen genommenen Kegelschnitten $D_p{}^2$ und $T_p{}^2$ von dem Punkte P von g ist von der Lage von P auf g unabhängig."

Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir erst, dass die Punkte P von g sich in Bezug auf eine bestimmte Curve $\bar{C}^4$ durch $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ in zwei Systemen ordnen. Nennen wir nämlich der Kürze wegen die Schnittpunkte von g mit der Curve $D_p{}^2$ irgend eines Punktes P in Bezug auf $\bar{C}^4$ die D-Punkte von P für $\bar{C}^4$ und stellen wir mittelst der Schreibweise

$$D_{-3},\ D_{-2},\ D_{-1},\ P,\ \ D_1,\ D_2,\ D_3\ \ldots$$

eine von P aus nach beiden Seiten hin unendlich fortlaufende Reihe von Punkten der Geraden g auf, von welchen jeder die ihn in der Reihe an beiden Seiten umschliessenden Punkte in Bezug auf $\bar{C}^4$ zu D-Punkten hat, so ist es klar, dass die Fortsetzung der Reihe nach beiden Seiten immer neue Punkte von g erzeugen wird, bis sich die Reihe an jedem der beiden Enden mittelst einer der vier Punkte $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ abschliesst. Denn, da alle Kegelschnitte $D_p{}^2$ von den Punkten P in Bezug auf $\bar{C}^4$ durch die Inflexionsknoten von $\bar{C}^4$ gehen, die Gerade g aber — da sie keinen Inflexionspunkt von $\bar{C}^4$ enthält — nicht ein Teil irgend eines zerfallenden Kegelschnittes $D_p{}^2$ sein kann, so hat kein Punkt P von g in Bezug auf $\bar{C}^4$ drei auf g liegende D-Punkte, was eintreten würde, wenn die Fortsetzung der Reihe in einer der beiden Richtungen auf irgend ein schon niedergeschriebenes Glied zurückführte, bevor man den Endpunkt Q erreicht hätte. Und die Reihe schliesst sich jederzeit in einem Punkte Q, da unter den beiden D-Punkten eines Punktes Q von $\bar{C}^4$ dieser Punkt selbst vorkommt. Aber dann muss es auch zwei solche Reihen von Punkten P auf g geben, da vier Endpunkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 vorliegen.

Nach dieser Vorbereitung ist es nicht schwierig mehr zu zeigen, dass irgend eine andere Curve $\bar{C}_1{}^4$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sich in Bezug auf die Punkte einer nämlichen Reihe zu $\bar{C}^4$ auf gleiche Weise verhält. Sind nämlich erstens $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1{}^4$ in Bezug auf irgend einen Punkt D_n von einer der beiden Reihen gleichartig, so gehen die Kegelschnitte $D_p{}^2$ von D_n in Bezug auf $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1{}^4$ durch den folgenden Punkt der Reihe D_{n+1}; also gehen umgekehrt nach Artikel 59. die Kegelschnitte $D_p{}^2$ von D_{n+1} in Bezug auf $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1{}^4$ durch D_n und sind deshalb die Curven $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1{}^4$ in Bezug auf D_{n+1} auch gleichartig. Sind zweitens $\bar{C}^4$ und $\bar{C}_1{}^4$ in Bezug auf D_n un-

gleichartig, so geht der Kegelschnitt D_p^2 von D_n in Bezug auf $\overline{C}^4$ und der Kegelschnitt T_p^2 von D_n in Bezug auf $\overline{C}_1^4$ durch D_{n+1} und also umgekehrt nach Artikel 59. der Kegelschnitt D_p^2 von D_{n+1} in Bezug auf $\overline{C}^4$ und nach dem Artikel 61. der Kegelschnitt T_p^2 von D_{n+1} in Bezug auf $\overline{C}_1^4$ durch D_n; d. h. es sind die Curven $\overline{C}$ und $\overline{C}_1^4$ in Bezug auf D_{n+1} ebenfalls ungleichartig. Also lässt sich mittelst des bekannten Schlusses von n auf $n+1$ obenstehende Behauptung beweisen.

Aber in Bezug auf die gegebene Curve $\overline{C}^4$ lassen sich die Punkte P von g noch auf eine zweite Weise in zwei Systemen ordnen. Nennen wir nämlich die Schnittpunkte von g mit der Curve T_p^2 irgend eines Punktes P in Bezug auf $\overline{C}^4$ die T-Punkte von P für $\overline{C}^4$, so kann man ebenso mittelst der Schreibweise

$$\ldots\ T_{-3},\ T_{-2},\ T_{-1},\ P,\ T_1,\ T_2,\ T_3\ \ldots$$

eine von P aus nach beiden Seiten hin unendlich fortlaufende Reihe von Punkten aufstellen, von welchen jeder die ihn in der Reihe begrenzenden Punkte in Bezug auf $\overline{C}^4$ zu T-Punkten hat. Und auch hier liefert eine Fortsetzung der Reihe immer wieder neue Punkte, bis sich die Reihe in zwei der Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 abschliesst. Denn, da nur die Kegelschnitte $T_{q'}^2$ von den Schnittpunkten Q' von g mit dem Wendeschnitte in Geraden zerfallen, und diese Geraden durch die entsprechenden Punkte Q von $\overline{C}^4$ gehen, so ist g kein Teil eines zerfallenden Kegelschnittes T^2 von einem Punkte P auf g, hat also kein Punkt von g in Bezug auf $\overline{C}^4$ mehr als zwei T-Punkte, und wird man deshalb bei Fortsetzung der Reihe bis zum Schlusse immer neue Punkte finden. Und bei Fortsetzung der Reihe nach irgend einer Seite wird man einen Schlusspunkt erreicht haben, wenn der Kegelschnitt T_p^2 die Gerade g berührt. Aber dann ist der Berührungspunkt nach Artikel 57. immer einer der vier Punkte Q, weshalb es auf g in Bezug auf $\overline{C}^4$ wieder zwei Reihen von Punkten T geben muss, da vier Punkte Q vorliegen. Und ebenso wie oben zeigt man auch hier, dass irgend eine andere Curve $\overline{C}^4$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sich in Bezug auf die Punkte einer nämlichen Reihe zu $\overline{C}^4$ auf gleiche Weise verhält.

Ist die Einteilung der Curven $\overline{C}^4$ durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in mit $\overline{C}^4$ gleichartige und mit $\overline{C^4}$ ungleichartige für alle Punkte von irgend einer Reihe die nämliche, so ist jetzt nur noch zu entscheiden, ob sie mit der Reihe sich ändert oder nicht. Dazu beweisen

wir einfach, dass die Voraussetzung, die Ersetzung von der einen Reihe von D-Punkten durch die andere ändere die Einteilung, unhaltbar ist.

Sind D_{n-1}, D_n, D_{n+1} drei auf einander folgende Glieder einer der beiden Reihen und also D_{n-1} und D_{n+1} die D-Punkte von D_n in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven $\bar{C}^4$ und die T-Punkte von D_n in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ ungleichartigen Curven C_1^4, so erteilen wir D_n eine unendlich kleine Bewegung auf g, wobei natürlich die Punkte D_{n-1} und D_{n+1} sich auch über unendlich kleine Strecken von g bewegen. Es fragt sich nun, ob diese drei neuen Punkte, die als D'_{n-1}, D_n', D'_{n+1} zu bezeichnen sind, in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven wieder einer der beiden D-Reihen angehören werden. Und auf diese Frage muss die Antwort im allgemeinen bejahend lauten. Denn, wenn D_n seine Lage auf g unendlich wenig ändert, so werden die Kegelschnitte D^2 von D_n in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$ und die Kegelschnitte T^2 von D_n in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ ungleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$ ihre Lage ebenfalls unendlich wenig änderen, müssen also die D-Punkte von D_n' in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$ und die T-Punkte von D_n' in Bezug auf die mit $\bar{C}^4$ ungleichartigen Curven $\bar{C}_1^4$ in unmittelbarer Nähe von D_{n-1} und D_{n+1} zu finden sein, und wird man also genötigt die Punkte D'_{n-1}, D_n', D'_{n+1} für die mit $\bar{C}^4$ gleichartigen Curven unter eine Reihe D-Punkte zu bringen, wenn nicht zufälliger Weise die T-Punkte von D_n' in Bezug auf die erste Gruppe von Curven $\bar{C}^4$ und die D-Punkte von D_n' in Bezug auf die zweite Gruppe von Curven $\bar{C}_1^4$ ebenfalls D_{n-1} und D_{n+1} unendlich nahe liegen. Aber es tritt dieses im allgemeinen nicht ein. Fiele nämlich in Bezug auf irgend eine der Curven $\bar{C}_1^4$ einer der D-Punkte von einem nicht mit einem der vier Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 zusammen getretenen Punkte D_n von g mit einem der T-Punkte von diesem Punkte D_n zusammen, so würde aus der in den Artikeln 56. und 57. angezeigten harmonischen Lage von den D-Punkten und den T-Punkten mit D_n und dem Schnittpunkte S von g mit der Polgeraden von D_n in Bezug auf $\bar{C}_1^4$ folgen, dass der andere D-Punkt von D_n mit dem anderen T-Punkte von D_n zusammenfallen müsste, und hieraus wieder, dass die ganze D-Reihe des Punktes D_n mit der T-Reihe von D_n identisch wäre. Und dies ist nicht der Fall; denn ist Q_1 einer der Endpunkte, so fällt der von Q_1 verschiedene D-Punkt von Q_1 im allgemeinen nicht mit dem von Q_1 verschiedenen T-Punkt von Q_1 zusammen. Aber selbst, wenn dies so wäre, so würde für jeden Punkt der Reihe der Unterschied zwischen D-Punkten und T-Punkten aufgehoben, aber keine Beschwerde gegen die Aufnahme von D'_{n-1}, D_n', D'_{n+1}

in eine Reihe von D-Punkten herbeigeführt sein. Nur wenn D_n mit einem der vier Punkte Q zusammenfällt, fällt einer der D-Punkte von D_n mit einem der T-Punkte von D_n in D_n zusammen, ohne dass der zweite D-Punkt mit dem zweiten T-Punkte zusammenfallen muss.

Ist nun bewiesen, dass zwei unmittelbar an einander grenzende Punkte D_n und D_n' von g der nämlichen Reihe angehören, so führt eine wiederholte Anwendung dieses Satzes zum Schluss, dass alle Punkte von g der nämlichen Reihe angehören. Und dieses ist offenbar nicht der Fall. Wir müssen daher annehmen, dass zwei einander unendlich nahe liegende Punkte D_n und D_n' verschiedenen Reihen angehören können, obgleich sie sich in Bezug auf die Einteilung der Curven C^4 auf gleiche Weise verhalten. Woraus dann endlich folgt, dass die Einteilung der Curven $\overline{C}_1^4$ ganz unabhängig ist von der Lage des Ausgangspunktes P auf g.

63. „Die Geradenpaare, welche die zerfallenden Berührungskegelschnitte $T_q{}^2$ der Punkte Q' vom Wendeschnitte K bilden, umhüllen eine Curve vierter Classe, welche in zwei Kegelschnitte zerfallen muss."

Durch irgend einen Punkt P gehen vier Gerade, welche zerfallenden Berührungskegelschnitten von Punkten Q' von K angehören, denn der Berührungskegelschnitt $T_p{}^2$ von P schneidet K in vier Punkten Q', deren Berührungskegelschnitte nach Artikel 61. durch P gehen; also ist die gesuchte Enveloppe von der vierten Classe. Aber diese Enveloppe berührt jede Doppeltangente q von $\overline{C}^4$ in ihren Berührungspunkten Q_1 und Q_2 mit $\overline{C}^4$. Da nämlich Q_1 nach Artikel 43. auf K liegt, so sind q und die Tangente q_1' an K in $Q_1' = Q_2$ Tangenten der Enveloppe und nun wird die auf q folgende Tangente der Enveloppe, da sie als Teil des Berührungsschnittes vom an Q_1 grenzenden Punkte von K durch den an Q_2 grenzenden Punkt von $\overline{C}^4$ geht und mit q einen unendlich kleinen Winkel bildet, die Tangente q beim Grenzübergange in Q_2 schneiden, d. h. die Gerade q berührt die Enveloppe in Q_2. Und da man mittelst Verwechslung von Q_1 und Q_2 ebenso beweist, dass q die gesuchte Enveloppe in Q_1 berührt, so ist jede Doppeltangente q von $\overline{C}^4$ mit den Berührungspunkten Q_1 und Q_2 ebenfalls Doppeltangente der gesuchten Enveloppe in den Punkten Q_1 und Q_2. Aber eine Curve vierter Classe mit vier Doppeltangenten muss in zwei Kegelschnitte zerfallen.

64. „Die beiden Kegelschnitte, welche berührt werden von den Geradenpaaren, die die Berührungskegelschnitte der Punkte vom

Wendeschnittte K bilden, haben mit K das Dreieck ABC zum gemeinschaftlichen Poldreieck. Sie gehen durch die vier sich selbt entsprechenden Punkte S und bilden mit K drei Kegelschnitte, die zu einander in der besonderen Beziehung stehen, dass jeder von ihnen in Bezug auf irgend einen der beiden übrigen die Polfigur der dritten ist."

Jede der drei involutorisch perspectivischen Collineationen, welche einen Eckpunkt vom Doppelpunktsdreiecke ABC von $\overline{C}^4$ zum Centrum und die Gegenseite dieses Dreiecks zur Axe haben, führen $\overline{C}^4$ und ihren Wendeschnitt K in sich selbst über. Also muss jede dieser drei Collineationen die aus zwei Kegelschnitten bestehende Enveloppe vierter Classe ebenfalls in sich selbst überführen. Hierbei können dann diese Kegelschnitte, welche weiter als K_1 und K_2 bezeichnet werden sollen, entweder in einander oder in sich selbst übergehen. Aber man weist leicht das erste als unmöglich nach. Nicht, dass es unmöglich ist zwei Kegelschnitte, welche in Bezug auf einander eine beliebige Lage haben, mittelst involutorisch perspectivischer Collineation in einander umzubilden. Vielmehr ist diese Umbildung auf sechs verschiedene Weisen möglich, und tritt dabei irgend einer der sechs Eckpunkte T (Fig. 50) des von den gemeinsamen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseites in Verbindung mit einer der sechs Seiten t des von den gemeinsamen Punkten gebildeten vollständigen Vierecks als Centrum und Axe auf. Allein es ist nicht möglich ein Dreieck zu finden, dessen Eckpunkte drei Punkte T, und dessen Seiten drei Geraden t sind. Denn bei der allgemeinen Lage der Kegelschnitte in Bezug auf einander ist die Verbindungslinie von zwei Punkten T entweder Seite des gemeinsamen Poldreiecks oder gemeinsame Tangente, und der Schnittpunkt von zwei Geraden t entweder Eckpunkt des gemeinsamen Poldreiecks oder gemeinsamer Punkt. Und wenn die Kegelschnitte einander doppelt berühren (Fig. 51) so giebt es wol ein Dreieck, dessen Eckpunkte Punkte T und dessen Seiten Gerade t sind; aber hier verlieren zwei der drei Collineationen ihren involutorischen Charakter und hat die aus den Kegelschnitten bestehende Enveloppe vierter Classe obendrein keine Lage, wobei die drei Seiten des Dreiecks auf gleiche Weise auftreten. Also werden die Kegelschnitte K_1 und K_2 in Bezug auf das Dreieck ABC eine solche Lage haben müssen, dass irgend eine der drei angewiesenen involutorisch perspectivischen Collineationen jeden der beiden Kegelschnitte in sich selbst überführt, d. h. ABC muss ein Poldreieck sein von K_1 und von K_2.

Sind $Q_1 = Q_2'$ und $Q_2 = Q_1'$ die ebenfalls auf K liegenden Berührungspunkte von $\overline{C}^4$ mit ihrer Doppeltangente q (Fig. 52.) und

q_2' und q_1' die Tangenten von K in diesen Punkten, so ist der Schnittpunkt dieser Tangenten nach Artikel 46. ein sich selbst entsprechender Punkt S der bekannten quadratischen Transformation zwischen $\bar{C}^4$ und K. Wir beweisen nun, dass jede der beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 durch diesen Punkt S geht, dass der eine dieser Kegelschnitte in S die Gerade q_1', der andere in S die Gerade q_2' berührt. Da nämlich der Berührungskegelschnitt von Q_2 aus q und q_2' besteht und also durch S geht, so geht umgekehrt der Berührungskegelschnitt von S durch Q_2 und wird SQ_2, da er in Q_2 die $\bar{C}^4$ nicht berührt, nach Artikel 54. in Q_2 den Berührungskegelschnitt von S berühren müssen. Aber, wenn der Berührungskegelschnitt von S den auch auf K liegenden unmittelbar an Q_2 grenzenden Punkt von q_1' enthält, so geht umgekehrt der in zwei Geraden zerfallende Berührungskegelschnitt des unmittelbar an Q_2 grenzenden Punktes von K durch S. Also ist S der Schnittpunkt von zwei Tangenten der Enveloppe vierter Classe, welche, da sie zu den Berührungskegelschnitten von zwei an einander grenzenden Punkten von K gehören, einander folgen, d. h. es wird die Enveloppe von q_2' in S berührt. Und nun beweist man mittelst Umtausch von Q_1 und Q_2 u. s. w., dass die Enveloppe ebenfalls von q_1' in S berührt wird. Also muss die Enveloppe in S einen Doppelpunkt mit den Doppelpunktstangenten q_1' und q_2' haben und jede der beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 durch die vier Punkte S gehen. Selbstverständlich berührt dann der eine dieser Kegelschnitte q in Q_1 und q_1' in S, der andere q in Q_2 und q_2' in S; sodass, wenn K_1 der erste, und K_2 der zweite dieser Kegelschnitte ist, sie in Bezug auf K und das Dreieck $Q_1 Q_2 S$ die in Fig. 53. angegebenen Lagenverhältnisse zeigen.

Der Beweis des letzteren Teiles unseres Satzes kann nun unmittelbar der Figur 53. entnommen werden, wenn man noch bedenkt, dass die Curve $\bar{C}^4$ vier Doppeltangenten besitzt. Es leuchtet dann sofort ein, dass die Polfigur von K_1 in Bezug auf K mit K_2 zusammenfällt; denn die vier Punkte Q_1 und die vier Punkte S haben in Bezug auf K die vier Geraden q_2' und die vier Geraden q zu Polaren und diese acht Geraden werden von K_2 berührt. Und ebenso beweist man, dass K die Polfigur von K_1 in Bezug auf K_2 und von K_2 in Bezug auf K_1 ist.

65. „Die Kegelschnitte K_1 und K_2 sind imaginär bei den Curven $\bar{C}^4$ erster Gattung und reell bei den Curven $\bar{C}^4$ zweiter Gattung.

Bei den Curven $\bar{C}^4$ erster Gattung sind die vier Punkte S und die vier Doppeltangenten, also auch die acht Berührungspunkte Q sämt-

lich imaginär. Betrachten wir nun die erste Normalcurve erster Gattung, was wie wir wissen der Allgemeinheit nicht schadet, und setzen wir K_1 reell voraus, so sind die Schnittpunkte von K_1 und K als Berührungspunkte Q von Doppeltangenten q an C^4 imaginär, und liegt K_1 deshalb entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des elliptischen Wendeschnittes K. Aber dann ist K_2 als Polfigur von K_1 in Bezug auf K auch reell und umgekehrt entweder ganz ausserhalb oder ganz innerhalb K gelegen. Und da K_1 und K_2 mit K das Dreieck ABC zum Poldreieck haben, so sind K_1 und K_2 zu K concentrische und ähnlich liegende Ellipsen; denn von ihnen ist der innerhalb K liegende Kegelschnitt selbstverständlich eine Ellipse und weil die Tangenten aus dem Centrum C an diesen imaginär sind, hat der andere imaginäre unendlich ferne Punkte, und ist dieser ausserhalb K liegende Kegelschnitt also auch eine Ellipse. Aber nun kann unmöglich K die Polfigur von K_1 in Bezug auf K_2 und von K_2 in Bezug auf K_1 sein. Denn die Polfigur von K in Bezug auf den innerhalb K liegenden Kegelschnitt — sei es K_1 — liegt wieder innerhalb von K_1, und die Polfigur von K in Bezug auf den ausserhalb K liegenden Kegelschnitt — die nun K_2 heissen muss — liegt wieder ausserhalb von K_2. Also führt die Voraussetzung dass K_1 reell sei zu Irrschlüssen und muss deshalb K_1 und dann auch K_2 imaginär sein [25]). Und dann sind auch die in zwei Gerade zerfallenden Berührungskegelschnitte der Punkte des Wendeschnittes bei einer $\overline{C}^4$ erster Gattung sämtlich imaginär, und kann man also aus keinem Punkte von K an eine Curve erster Gattung eine reelle Tangente anlegen.

Bei der Normalcurve zweiter Gattung sind die drei Curven K, K_1, K_2, da sie das von den beiden Kreispunkten und dem Punkte C gebildete Dreieck zum Poldreieck haben, gleichseitige Hyperbeln mit C als gemeinschaftlichem Mittelpunkte. Nennen wir sie H, H_1, H_2 und setzen wir nach der in Artikel 10. angegebenen Bezeichnungsweise $H_1 = H(\alpha, m)$, so ist nach Artikel 13. auch

$$H_2 = H\left(-\alpha, \frac{1}{m}\right)$$

da H_2 die Polfigur von H_1 in Bezug auf H ist. Aber es ist auch H_2 die Polfigur von H in Bezug auf H_1, also

$$H_2 = H(2\alpha, m^2)$$

25) Sind w_1 und w_2 die imaginären Kubikwurzeln der Einheit und a und b die Achsen von K, so findet man für die Achsen von K_1 und K_2 analytisch $w_1^2 a$ und $w_1 b$; $w_2 a$ und $w_2 b$, wenn K der Wendeschnitt der Normalcurve $\overline{C}^4$ erster Gattung ist.

woraus man findet, dass α entweder 60^0 oder 120^0 ist, und m entweder den Wert eins hat oder eine der imaginären Kubikwurzeln der Einheit ist. Also ist die einzige reelle Lösung — und die Curven H_1 und H_2 müssen reell sein, da zwei der vier Punkte S und vier der acht Berührungspunkte Q von Doppeltangenten q der $\bar{C}^4$ es sind — die, welche schon in Artikel 13. angewiesen ist, wobei die H_1 und H_2 mittelst Drehung von H über 60^0 um C abgeleitet werden. Von der Lage dieser drei gleichseitigen Hyperbeln in Bezug auf die Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung giebt Fig. 54. eine Vorstellung. Sie zeigt an, dass die in Geraden zerfallenden Berührungskegelschnitte der Punkte von dem Wendeschnitte bei den Curven $\bar{C}^4$ zweiter Gattung sämtlich reell sind.

66. „Die beiden Geraden durch den Punkt Q von der Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung, welche den Berührungskegelschnitt des entsprechenden Punktes Q' des Wendeschnittes bilden, schneiden die Verbindungslinie von Q mit dem Centrum C unter Winkeln von 30^0."

Aus dem vorhergehenden Artikel folgt einerseits, dass die beiden Geraden durch irgend einen Punkt Q der Lemniskate, welche den Berührungskegelschnitt des entsprechenden Punktes Q' von H (Fig. 54.) bilden, durch Q gehende Tangenten von der Combination $H_1 + H_2$ sind. Andererseits ergab sich die Lemniskate in Artikel 14. als der Ort des Schnittpunktes von den entsprechenden Tangenten von H_1 und H_2, wobei unter einander entsprechenden Tangenten von H_1 und H_2 die Tangenten zu verstehen sind, welche sich bei Drehung von H aus einer nämlichen Tangente von H entwickelt haben; dabei sahen wir dann, dass diese einander entsprechenden Tangenten einen Winkel von 60^0 mit einander bilden, welcher von den Mittelpunktsleitstrahl ihres Scheitels gehälftet wird. Unter den vier aus Q an $H_1 + H_2$ möglichen Tangenten giebt es also zwei, welche die Verbindungslinie CQ von Q mit dem Centrum C beiderseits unter Winkeln von 30^0 schneiden; aber damit ist noch nicht bewiesen, dass gerade diese zwei Tangenten aus Q den Berührungskegelschnitt von Q' bilden. Nun muss aber der Berührungskegelschnitt des Scheitels P von H die Achse CP zur Symmetrieachse haben und also aus einer Tangente von H_1 und einer Tangente von H_2 bestehen; weshalb der Berührungskegelschnitt von irgend einem Punkte Q' von H aus einer Tangente von H_1 und einer Tangente von H_2 bestehen muss. Aber nun besteht der Berührungskegelschnitt von D_1 bekanntlich aus d_1 und s_1, von welchen Geraden d_1 als Tangente von H_1 und s_1 als Tangente von H_2 zu betrachten ist. Und da diese

Tangenten einander unter einen Winkel von 60° schneiden, so reichen Continuitätsgründe zur Vollendigung des Beweises aus.

67. „Die kubische Involution auf AB, welche die Punkte A und B zu dreifachen Elementen hat, steht mit den zerfallenden Berührungskegelschnitten der Punkte des Wendeschnittes K von der Curve $\overline{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C in enger Verbindung. Ist Q' irgend ein Punkt von K, Q der entsprechende Punkt von $\overline{C}^4$ und wird Q durch CA und CB harmonisch getrennt von $\overline{Q}$, so werden die Verbindungslinien von Q mit den beiden Punkten, welche $\overline{Q}$ zu einem Tripel der auf AB angedeuteten kubischen Involution ergänzen, zusammen den Berührungskegelschnitt von Q' bilden."

Wenn A und B die imaginären Kreispunkte sind, die $\overline{C}^4$ also eine Lemniskate ist, sagt der Satz aus, dass die Senkrechte auf CQ mit den beiden durch Q gehenden geradlinigen Bestandteilen des Berührungskegelschnittes von Q' bei Bewegung von Q auf der unendlich fernen Geraden eine kubische Involution bilden, welche die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Elementen hat. Also ist der Satz für diesen besonderen Fall nur eine andere Ausdrucksweise des Satzes des vorhergehenden Artikels, da die kubische Involution welche mittelst Drehung eines regelmässigen Sechsecks von den Mittelpunktsdiagonalen auf der unendlich fernen Geraden gebildet wird, merklich die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Elementen hat[26]). Und nun wird der Satz für den Fall einer allgemeinen Curve $\overline{C}^4$ mittelst centraler Projection aus diesem besonderen Falle abgeleitet[27]).

68. „Die Berührungspunkte der Tangenten aus irgend einem Punkte P von AB an $\overline{C}^4$ liegen paarweise auf drei Geraden p durch C. Bei Bewegung von P über AB bilden die Strahlentripel p durch C eine kubische Strahleninvolution mit den dreifachen Strahlen CA und CB, welche mit der Punktreihe P auf AB projectivisch ist."

Der erste Teil des Satzes ist eine Folge des Satzes von Artikel 19. Projiciren wir nämlich die Seite AB des Dreiecks ABC der Inflexionsknoten von $\overline{C}^4$ ins Unendliche, so wird die Projection von C Mittelpunkt der Projection von $\overline{C}^4$, und nun liegen die Be-

26) Man vergleiche „Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen" von Dr. Emil Weyr.

27) Ich überlasse es geneigten Lesern hierbei mittelst [illegible] Betrachtungen die imaginäre Uebertragung des Satzes von der $\overline{C}^4$ [illegible] tung auf die Curve erster Gattung zu umgehen.

Digitized by Google

rührungspunkte der aus einem bestimmten Punkte der unendlich fernen Geraden an diese Mittelpunktscurve $\bar{C}^4$ möglichen Tangenten auf drei ihrer Durchmesser. Weiter bilden die den verschiedenen Punkten P von AB zukommenden Strahlentripel p durch C eine kubische Involution, welche zu der Punktreihe P projectivisch ist, da irgend ein Strahl p den ihm entsprechenden Punkt P und mittelst dieses die ihn zu einem Tripel ergänzenden Strahlen bestimmt. Und endlich hat die gefundene kubische Involution die Strahlen CA und CB zu dreifachen Strahlen, denn die sechs Berührungspunkte der Tangenten aus A resp. B an C fallen alle mit A resp. B zusammen.

69. „Die Tangente QR der Lemniskate in Q (Fig. 55.) bildet mit dem Leitstrahle CQ und der zu CQ in Bezug auf die Doppelpunktstangenten antiparallelen Geraden CR ein gleichschenkeliges Dreieck CQR mit der Basis CQ."

Wenn wir die Lemniskate ableiten aus dem um seine imaginäre Achse umgeschlagenen Wendeschnitte H, so haben wir es nach Artikel 22. mit der Verwandtschaft der reciproken Radien zu tun. Sind also Q und Q' einander in dieser Verwandtschaft entsprechende Punkte von der Lemniskate und von H, so bilden die Tangenten q und q' in Q und Q' an diesen einander entsprechenden Curven mit CQ nach verschiedenen Seiten gleiche Winkel[28]). Und da CQ' und q' antiparallel zu einander sind in Bezug auf die Asymptoten von H, so folgt hieraus der Satz.

Wenn man den Winkel QCD durch φ andeutet, so findet man für den Winkel RQD den Wert $90^0+3\varphi$. Hieraus kann man auch den Satz des vorhergehenden Artikels ableiten[29]).

Der Satz dieses Artikels liefert eine äusserst einfache Construction der Tangente von der Lemniskate in Q, wenn ausser diesem Punkte nur das Centrum und die Achsenrichtungen gegeben sind.[30])

70. „Der Krümmungskreis der Hyperbel H in Q' (Fig. 58.) geht mittelst der angewendeten Transformation der reciproken Radien in den Krümmungskreis der Lemniskate in Q über."

---

28) Reye, a. a. O. I. Abteilung. Seite 171.

29) „Die Lemniscate in razionaler Behandlung" von Dr. Emil Weyr, Artikel 21.

30) Steiner (gesammelte Werke, 2ter Teil, Seite 23.). Eine andere giebt Cantor in Zeitschrift für Mathematik und Physik, Teil 12, Seite 428, 1867.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den Gesetzen der Transformation der reciproken Radien und der Definition des Krümmungskreises. Wir verwenden ihn zur Bestimmung des Krümmungscentrums von der Lemniskate in Q, wenn von dieser Curve das Centrum, die Achsenrichtungen und der Punkt Q gegeben sind, und man ihre Tangente q in Q construirt hat.

Schneidet die in Q' senkrecht auf CQ gestellte Gerade q_1' die Asymptoten CX und CY von H in Q_x' und Q_y' und ist S' so bestimmt, dass

$$Q_x'S' = Q'Q_y'$$

so geht der Krümmungskreis von H in Q' durch S' und also der Krümmungskreis der Lemniskate in Q durch den entsprechenden Punkt S auf CS'. Und aus der Relation

$$CQ.CQ' = CS.CS'$$

folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke CQS und CSQ''; deshalb findet man den Punkt S, wenn man aus Q eine Senkrechte fällt auf CS' und den Krümmungskreis der Lemniskate in Q, wenn man den Kreis beschreibt, welcher durch Q und S geht und in Q die Gerade q berührt.

Der Punkt S ist der bewegliche Schnittpunkt des Krümmungskreises mit der Lemniskate; durch ihn gehen drei Krümmungskreise, da die Senkrechte in S auf CS die Lemniskate ausser S noch in drei Punkten schneidet.

71. „Eine Curve $\overline{C}^4$ ist bestimmt durch ihre Inflexionsknoten A, B, C und zwei Punkte Q. Aus diesen Bestimmungsstücken kann man die Curve Punkt für Punkt und in jedem dieser Punkte die Tangente und den Krümmungskreis linear construiren."

Wenn man eine Curve $\overline{C}^4$, wovon man die Inflexionspunkte A, B, C und zwei einfache Punkte Q kennt, einer involutorisch quadratischen Transformation mit den Fundamentalpunkten A, B, C unterwirft, so erhält man einen Kegelschnitt, welcher ABC zum Poldreieck hat und wovon man zwei Punkte Q' kennt. Da nun jeder Punkt Q' in Verbindung mit dem Poldreiecke ABC noch drei Punkte dieses Kegelschnittes kennen lässt, nämlich die drei Punkte, welche mit diesem Punkte Q' die Eckpunkte eines vollständigen Vierecks mit den drei Diagonalpunkten A, B, C bilden, so giebt es nur einen Kegelschnitt durch die beiden Punkte Q', welche ABC zum Poldreieck hat, und deshalb auch nur eine Curve $\overline{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C durch die beiden Punkte Q.

Digitized by Google

Sind Q_1 und Q_2 die gegebenen Punkte, welche die Curve $\overline{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C bestimmen, sind Q_1' und Q_2' die den Punkten Q_1 und Q_2 entsprechenden Punkte in irgend einer quadratischen Transformation mit den Fundamentalpunkten A, B, C — zum Beispiel in der hyperbolisch gleichseitigen Transformation — und ist K' der im allgemeinen vom Wendeschnitte K von $\overline{C}^4$ verschiedene Kegelschnitt durch Q_1' und Q_2', welche ABC zum Poldreieck hat, so entspricht der gegebenen Curve $\overline{C}^4$ in der angewendeten Transformation der Kegelschnitt K'. Wird nun weiter K' in Q_1' von der Geraden l_1' berührt, und ist K_1 der dieser Geraden entsprechende Kegelschnitt, so wird K_1 in Q_1 die Curve $\overline{C}^4$ berühren, weshalb die Tangente l_1 von K_1 in Q_1 zu gleicher Zeit die Tangente von der Curve $\overline{C}^4$ in Q_1 ist. Zur Construction dieser letzteren Tangente l_1 hat man also erstens mittelst des Pascal'schen Satzes von K' die Tangente l_1' in Q_1', sodann mittelst der angenommenen Transformation den der Geraden l_1' entsprechenden Kegelschnitt K_1 zu suchen — und von dieser Curve hat man ausser A, B, C und Q_1 noch einen Punkt zu kennen — endlich wieder mittelst des Pascal'schen Satzes von dieser Curve K_1 die Tangente l_1 in Q_1 zu bestimmen.[1])

Zur Construction des Krümmungscentrums von $\overline{C}^4$ in Q_1 kann man unmittelbar gelangen mittelst der bekannten Construction eines Kegelschnittes, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkte osculirt. Mittelst dieser Construction kann man nämlich erst einen Kegelschnitt K' bestimmen, welcher durch A und B geht und den der Curve $\overline{C}^4$ entsprechenden Kegelschnitt K_0' in Q_1' osculirt, nachher den Kegelschnitt K_0, welcher dem Kegelschnitte K_0' entspricht und also $\overline{C}^4$ in Q_1 osculirt, und endlich die gleichseitige Hyperbel H von gegebenen Asymptotenrichtungen, welche $\overline{C}^4$ in Q_1 osculirt. Und von dieser Curve ist der Krümmungshalbmesser von Q_1 nach Artikel 6. leicht zu finden. Zur Illustration dieser Bestimmungsweise des Krümmungscentrums führe ich die ganze Construction in Fig. 56. für den einfachen Fall der Normalcurve erster Gattung durch.

Ist die gegebene Normalcurve erster Gattung mittelst des Centrums C, der Achsenrichtungen CA und CB, des Punktes Q_4 und der Tangente q_1 in diesem Punkte bestimmt, und bedient man sich der Transformation, welche einen um C geschlagenen Kreis von beliebigem Radius CD überführt in die Curve $\overline{C}^4$ mit den Inflexions-

3) Diese Construction verdanke ich meinem Landgenossen A. N. Godefroy, Architekt in Amsterdam.

knoten A, B, C, wovon dieser Kreis der Wendeschnitt ist, so wird nach Artikel 22. der Punkt Q_1' mittelst der Polgeraden EF von Q_1 gefunden als der vierte Eckpunkt des auf den Segmenten CR und CS beschriebenen Rechtecks. Weiter ist der auf EF liegende Pol G von q_1 das Centrum der gleichseitigen Hyperbel durch die unendlich fernen Punkte A und B, welche in Q_1' den der gegebenen Curve $\overline{C}^4$ entsprechenden Kegelschnitt K' berührt; deshalb ist die in Bezug auf $Q_1'R$ und $Q_1'S$ zu $Q_1'G$ antiparallel durch Q_1' geführte Gerade q_1' die Tangente in Q_1' an diesen Kegelschnitt K'. Und da dieser Kegelschnitt K' offenbar mit $\overline{C}^4$ concentrisch ist, so kann man ihn mittelst der Punkte Q_1', Q_2', Q_3', Q_4' und der Tangente q_1' in Q_1' bestimmt denken.

Wenn es nun gilt die gleichseitige Hyperbel H_0' zu construiren, welche durch A und B geht und K' in Q_1' osculirt, so betrachten wir K' und H_0' als zu einander perspectivisch collineare Kegelschnitte mit dem Osculationspunkte Q_1' als Collineationscentrum, wobei dann die Punkte Q_3' und Q_4' von K' den Punkten A und B von H_0' entsprechen. Die Verbindungslinie von Q_1' mit dem Schnittpunkte von $Q_3'Q_4'$ und AB, d. h. die zu $Q_2'Q_4'$ durch Q_1' geführte Parallele g tritt dabei dann als Collineationsachse auf. Und da in dieser perspectivischen Collineation den Geraden $Q_3'Q_2'$ und $Q_4'Q_2'$ offenbar G_4T und G_3T entsprechen, so entspricht T dem Punkte Q_2' von K', und ist H_0', also zu betrachten als der Kegelschnitt durch A, B, T und Q_3', welchen in Q_1' die Gerade q_1' berührt. Aber diese gleichseitige Hyperbel H_0' hat ihren Mittelpunkt auf GQ_1', da GQ_1' durch Q_1' antiparallel ist zu q_1' in Bezug auf die Asymptoten, und auf der zweiten Diagonale des Asymptotenrechtecks $Q_1'T$, also in U. Deshalb hat die gleichseitige Hyperbel H_0, welche der H_0' in der angewandten quadratischen Transformation entspricht, ihren Mittelpunkt in V, welcher Punkt mittelst der Polgeraden u von U leicht bestimmt wird. Steht also endlich Q_1W senkrecht auf VQ_1 und Q_1M senkrecht auf q, so ist der gegenüber V liegende Eckpunkt M des Parallelogrammes VM, wovon VQ_3 in Grösse und Lage eine Seite, Q_1M die andere Seitenrichtung und Q_1W die eine Diagonalenrichtung, ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Diese Construction bildet das Gegenstück zu jener, welche in Artikel 70. für die Lemniskate gegeben ist.

Ich beendige diesen Aufsatz mit der Aufweisung von einigen Resultaten, welche jenen dieses Abschnitts dualistisch gegenüber stehen. Dabei vermeide ich diejenigen, welche sich auf Polaren beziehen.

72. „Die Tangenten von $\overline{K}^4$ in den sechs Schnittpunkten mit

irgend einer Geraden g berühren einen Kegelschnitt T_g^2, welche ausserdem mit $\bar{K}^4$ noch zwei Tangenten g_t' und g_t'' gemein hat.

„Die Geradenpaare g, deren Resttangentenpaare $g^{t\prime\prime}$ und g_t'' einander zu den vier durch einen Punkt gehenden Tangenten von $\bar{K}^4$ ergänzen, entsprechen einander in der tangentiellen Transformation zwischen $\bar{K}^4$ und ihrem Rückkehrschnitte K."

„Der Rückkehrschnitt ist die Enveloppe der Geraden g, deren Resttangenten zusammenfallen."

Wenn g sich um einen Punkt P dreht, so erzeugen ihre Resttangenten um $\bar{K}^4$ eine quadratische Involution, welche zerfällt, wenn P ein Punkt von $\bar{K}^4$ ist."

„Indem der Tangentenkegelschnitt T_g^2 von g um $\bar{K}^4$ die Tangenten von $\bar{K}^4$ in den Schnittpunkten mit g bestimmt, bestimmt umgekehrt $\bar{K}^4$ um T_g^2 die Tangenten t_g' und t_g'' in den Schnittpunkten mit g; d. h. die Combination von $\bar{K}^4$ mit T_g^2 bildet eine Curve sechster Classe mit acht von a, b, c verschiedenen Doppeltangenten von welchen jede einen ihrer Berührungspunkte auf g hat."

„Der Tangentenkegelschnitt zerfällt in zwei Punkte, wenn g entweder $\bar{K}^4$ oder ihren Rückkehrschnitt K berührt; bei allen anderen Lagen von g ist T_g^2 nicht zusammengesetzt."

„Die vier Tangenten aus P an $\bar{K}^4$ sind von einander unabhängig."

„Wenn T_g^2 die Gerade h berührt, so berührt umgekehrt T_h^2 die Gerade g."

„Der Ort der Punktenpaare, welche zerfallene Tangentenkegelschnitte von Punkten von K bilden, ist die Combination von zwei Kegelschnitten K_1 und K_2, welche mit K das Poldreiseit abc gemein haben, die vier sich selbst entsprechenden Geraden s berühren und zusammen mit K drei Kegelschnitte bilden, die zu einander in der besonderen Beziehung stehen, dass jede von ihnen in Bezug auf irgend einen der beiden übrigen die Polfigur der dritten ist."

„Die Kegelschnitte K_1 und K_2 sind imaginär bei den Curven $\bar{K}^4$ erster Gattung und reell bei den Curven $\bar{K}^4$ zweiter Gattung."

„Die beiden Punkte auf der Tangente g von der Normalcurve $\bar{K}^4$ zweiter Gattung, welche den Tangentenkegelschnitt der entsprechenden Tangente g' vom Rückkehrschnitte bilden, werden mit

dem Centrum C verbunden durch Gerade, welche mit dem Mittelpunktsleitstrahle des Berührungspunktes von g den Winkel von 60° bilden."

„Die kubische Involution um C, welche die Strahlen CA und CB zu dreifachen Strahlen hat, steht mit den zerfallenden Tangentenkegelschnitten der Tangenten des Rückkehrschnittes in enger Verbindung. Ist g' irgend eine Tangente von K, g die entsprechende Tangente von $\bar{K}^4$ und wird $\bar{g}$ durch A und B harmonisch getrennt von g, so werden die Schnittpunkte von g mit den beiden Strahlen, welche $\bar{g}$ zu einem Tripel der Involution ergänzen, zusammen den Tangentenkegelschnitt von g' bilden."

Anhang

Beziehung auf die Curven vierter Ordnung mit zwei Inflexionsknoten.

73. „Eine Curve C^4 mit den zwei Inflexionsknoten A, B und dem einfachen Punkte C (Fig. 57.) wird mittelst einer bestimmten involutorischen quadratischen Transformation, welche A, B, C zu Fundamentalpunkten hat, in eine durch A und B gehende Curve C^3 übergeführt, für welche zwei der durch A gehenden Tangenten a_1 und a_2 die Curve auf BC, zwei der durch B gehenden Tangenten b_1 und b_2 die Curve auf CA berühren."

Es ist dieser Satz eine unmittelbare Folge der Gesetze der angewendeten Transformation, welche a_1 und a_2, b_1 und b_2 in einander überführt.

74. „Mittelst zweier quadratischen Strahleninvolutionen in halb perspectivischer Lage kann man eine Curve C^3 durch A und B erzeugen, welche auf der willkürlich durch B gelegten Geraden BC die willkürlich durch A gelegten Geraden a_1 und a_2, auf der willkürlich durch A gelegten Geraden AC die willkürlich durch B gelegten Geraden b_1 und b_2 berührt. Der dritte Schnittpunkt F von AB mit dieser Curve liegt mit dem Punkte D von BC, der B harmonisch trennt von a_1 und a_2, und dem Punkte E von CA, der A harmonisch trennt von b_1 und b_2, in einer Geraden."

Denken wir uns um A die quadratische Strahleninvolution, wovon a_1 und a_2 ein Paar bilden, und AC ein Doppelstrahl ist, ebenso um B die quadratische Strahleninvolution, wovon b_1 und b_2 ein Paar bilden, und BC ein Doppelstrahl ist, und bringen wir diese beiden Involutionen so mit einander in projectivische Verwandtschaft, dass der Doppelstrahl AC der ersten dem Paare b_1 und b_2 der zweiten, das Paar a_1 und a_2 der ersten dem Doppelstrahle BC der zweiten

und das die Verbindungslinie AB der Scheitel aufnehmende Paar der ersten, dem diese Verbindungslinie BA ebenso enthaltende Paare der zweiten entspricht, so erzeugen diese dann in sogenannter halb perspectivischen Lage verkehrenden Strahleninvolutionen eine Curve vierter Ordnung mit den zwei Punkten A und B als Doppelpunkten, welche aus der Geraden AB und der oben im Satze angewiesenen Curve C^3 besteht.

Sind p_1 und p_2 (Fig. 58.) die Strahlen irgend eines Paares der Involution um A und p_1' und p_2' die Strahlen des entsprechenden Paares der Involution um B, so ist P der dritte Diagonalpunkt des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits. Dieser Punkt P beschreibt bei der Erzeugung von C^3 eine Gerade. Da nämlich zwei concentrische Strahleninvolutionen nur ein Strahlenpaar gemein haben, so enthält die Strahleninvolution um A nur ein Strahlenpaar das von einer willkürlich angenommenen Geraden AP durch A harmonisch von AB getrennt wird; also entspricht einer willkürlich angenommenen Geraden' AP nur eine Gerade BP, und umgekehrt einer willkürlich angenommenen Geraden BP nur eine Gerade AP, woraus folgt, dass der Ort von P ein durch A und B gehender Kegelschnitt ist. Aber dieser Kegelschnitt enthält die Gerade AB, da die AB aufnehmenden Paare der Strahleninvolutionen um A und B einander entsprechen, und AP und BP in diesem Falle in AB hineinfallen. Also ist der Ort von P eine Gerade. Aber aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits folgt, dass P in D (Fig. 57) liegt, wenn man für die Strahlenpaare p_1, p_2 und p_1', p_2', die Strahlen a_1, a_2 und den Doppelstrahl BC, dass P in E liegt, wenn man für sie den Doppelstrahl AC und die Strahlen b_1 und b_2 annimmt. Und andrerseits lehren Grenzbetrachtungen, dass P mit dem dritten Schnittpunkte F von AB und der erzeugten Curve zusammenfällt, wenn man die Strahlenpunkte p_1, p_2, und p_1', p_2' zu den die AB aufnehmenden Paaren specialisirt. Also liegen D, E, F auf der Geraden, welche der Ort der Punkte P ist.

75. „Die Berührungspunkte der sechs Tangenten, die aus irgend einem Punkte C an eine Curve C^4 mit zwei Inflexionsknoten A und B möglich sind, liegen auf einem Kegelschnitte."

Die erste Polare von C^4 für ihren Punkt C schneidet C^4 in zwölf Punkten; zwei von diesen liegen in A auf der Tangente dieser Polare in A neben einander, zwei andere liegen in B auf der Tangente dieser Polare in B neben einander und noch zwei andere liegen in C auf der gemeinschaftlichen Tangente von dieser Polare mit C^4 neben einander; die sechs übrigen sind die Berührungspunkte der von C ausgehenden Tangenten an C^4. Nun wird der Satz dieses Artikels — und zur Bewährung dieser Behauptung kann man die in Artikel 51. angeführten Gründe wiederholen — bewiesen sein,

Google

sobald gezeigt ist, dass die erst aufgezählten sechs der zwölf Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte liegen, dass es also einen durch A, B, C gehenden Kegelschnitt giebt, welcher in A, B und C die erste Polare von C^4 für C berührt.

Da die Tangente in A an der ersten Polaren von C^4 für C die Gerade ist, welche C harmonisch trennt von den Doppelpunktstangenten von C^4 in A, so entspricht dieser Tangente in der in Art. 73. angewendeten Transformation die Gerade AD. Ebenso entspricht der Tangente in B an der ersten Polare von C^4 für C die Gerade BE. Endlich entspricht der Tangente in C an C^4 die Gerade CF. Aber AD, BE, CF sind durch die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC gehende Gerade, welche die Gegenseiten dieses Dreiecks in den Punkten einer Geraden schneiden; nach Artikel 20. schneiden die Geraden, welche AD, BE, CF entsprechen, die Gegenseiten des Dreiecks also auch in drei Punkten einer Geraden, und dieses beweist, dass es einen Kegelschnitt giebt, welcher in A, B und C die erste Polare von C^4 für C berührt, und die sechs Berührungspunkte der von C an C^4 möglichen Tangenten deshalb auch Punkte sind eines Kegelschnittes.

76. „Die Curven C^4, welche mit einander die Inflexionsknoten A, B mit den Doppelpunktstangenten gemein haben, bilden einen Büschel, d. h. die Inflexionsknoten A, B, die Doppelpunktstangenten und ein einfacher Punkt bestimmen eine einzige Curve vierter Ordnung von der verlangten Beschaffenheit."

Alle Curven C^4, welche A und B zu Inflexionsdoppelpunkten haben, und in A (Fig. 59.) die Doppelpunktstangenten a_1, a_2, in B die Doppelpunktstangenten b_1, b_2 besitzen, haben in jedem der beiden Punkte A und B acht [1]), in A und B zusammen also sechszehn Punkte mit einander gemein. Und endlich geht durch irgend einen Punkt P der Ebene nur eine dieser Curven C^4. Wenn nämlich die Geraden a und b die Geradenpaare a_1, a_2 und b_1, b_2 harmonisch trennen von P, so werden zwei der Curven C^4, welche durch P

1) Es kann dies auf verschiedene Weisen gezeigt werden. Wenn zwei Curven in P einen Doppelpunkt gemein haben, und die Doppelpunktstangenten der einen Curve von jenen der anderen verschieden sind, so gilt P schon für vier gemeinschaftliche Punkte der beiden Curven; denn die zwei Aeste der einen Curve schneiden doch die zwei Aeste der anderen Curve. Und nun vermehrt sich die Anzahl der in P angehäuften gemeinsamen Punkte um zwei, wenn die Curven auch die Doppelpunktstangenten gemein haben, und nochmals um zwei, wenn diese Doppelpunkstangenten beide Inflexionstangenten sind.

gehen, in P berührt vom Kegelschnitte durch A, B, P, welche in A von a und in B von b berührt wird; also werden zwei der Curven C^4, welche durch P gehen, in dem nächst auf P folgenden Punkte — und da diese Schlussweise von Punkt zu Punkt fortzusetzen ist — ganz und gar coincidiren.[2])

77. „Mittelst zweier quadratischen Strahleninvolutionen kann man eine Curve C^4 erzeugen, welche die willkürlich gegebenen Punkte A und B zu Inflexionsdoppelpunkten, die willkürlich durch A geführten Geraden b_1 und b_2 zu Doppelpunktstangenten und den willkürlich gegebenen Punkt P zu einem einfachen Punkte hat."

Denken wir uns um A die quadratische Strahleninvolution, welche das Paar a_1, a_2 und den Doppelstrahl AB enthält, ebenso um B die quadratische Strahleninvolution, welche das Paar b_1, b_2 und den Doppelstrahl BA enthält, und bringen wir diese Involutionen so mit einander in perspectivische Verwandtschaft, dass der Doppelstrahl AB und das Paar b_1, b_2, das Paar a_1, a_2 und der Doppelstrahl BA, das die Gerade AP enthaltende Paar und das die Gerade BP enthaltende Paar einander entsprechen, so erzeugen diese beiden projectivischen Strahleninvolutionen offenbar die verlangte Curve C^4. Wirklich ist diese Erzeugungsweise nicht verschieden von jener, welche man erhält, wenn man auf die Erzeugungsweise der C^3 von Artikel 74. die in Artikel 73. angeführte quadratische Transformation anwendet.

78. „Jede Curve C^4 mit zwei Inflexionsknoten kann als eine Curve mit einem Mittelpunkte und zwei Symmetrieachsen projicirt werden."

---

2) Also ist die Differentialgleichung dieser Curvenfamilie in $\frac{dy}{dx}$ vom ersten Grade. Ist die Verbindungslinie der beiden Inflexionsknoten durch $z=0$ und sind die beiden Geraden, welche diese Verbindungslinie harmonisch trennen von einem der beiden Paare von Doppeltangenten, durch

$$x=0 \quad \text{und} \quad y=0$$

gegeben, so ist

$$x^2y^2+z^2(ax^2+by^2)+\mu z^4=0$$

worin μ einen willkürlichen Parameter vorstellt, die Gleichung der Curvenfamilie. Und projicirt man nun die Inflexionsknoten in senkrecht auf einander stehenden Richtungen in's Unendliche, so ist

$$x^2y^2+ax^2+by^2+\mu=0$$

die Gleichung der Projection. Also giebt Differentiation wirklich

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(y^2+a)}{y(x^2+b)}.$$

Digitized by Google

Wir unterscheiden hierbei wieder zwei Fälle, und betrachten nach einander eine C^4 mit zwei reellen und eine C^4 mit zwei conjugirt-imaginären Inflexionsdoppelpunkten.

Sind die Inflexionsknoten A und B reell, so können die Paare von Doppelpunktstangenten jede für sich entweder reell oder conjugirt imginär sein[1]). Unabhängig hiervon ist aber der dritte Diagonalpunkt C (Fig. 60.) des von den Deppelpunktstangenten gebildeten Vierecks immer reell. Denn dieser Punkt C ist der Schnittpunkt der Geraden, welche AB harmonisch trennen von den Paaren a_1, a_2 und b_1, b_2, und diese beiden Geraden AC und BC sind reell, da sie eine reelle Gerade von zwei conjugirt imaginären Geraden harmonisch trennen[2]). Nun kann man die Curve central so projiciren, dass die Projectionen A' und B' von A und B in senkrecht aufeinander stehenden Richtungen in's Unendliche verschwinden, wobei dann die Projection C' von C Mittelpunkt und die Geraden $C'A'$ und C, B' Symmetrieachsen der Projection werden. Es wird dann nämlich die Projection von Fig. 60. die in Fig. 61. gegebene Form annehmen. Und hieraus folgt dann, dass die beiden quadratischen Strahleninvolutionen aus in Bezug auf $C'A'$ und $C'B'$ symmetrischen Strahlenpaaren bestehen, und die vier Schnittpunkte von zwei einander entsprechenden Paaren also die Eckpunkte sind eines Rechtecks mit den Seitenrichtungen $C'A'$ und $C'B'$ und dem Schnittpunkte C' der Diagonalen. Projiciren sich aber die beiden Strahleninvolutionen derweise, dann ist offenbar C' Mittelpunkt, und $C'A'$ und $C'B'$ sind Symmetrieachsen der Projection der Curve.

Der Grund dafür, dass jede Curve C^4 mit zwei reellen Inflexionsknoten A und B als eine um zwei senkrechte Achsen symmetrische Mittelpunktscurve C^4 projicirt werden kann, ist nach dem vorhergehenden hierin zu suchen, dass die von den einander entsprechenden Strahlenpaaren der Involutionen A und B gebildeten vollständigen Vierseite den Punkt C zum gemeinschaftlichen dritten Diagonalpunkt haben. Dies ist auch leicht aus Fig. 60. zu erkennen. Die beiden Diagonalen D_1D_2 und E_1E_2 des Vierecks $a_1b_1a_2b_2$

3) Dass die Paare von Tangenten conjugirt-imaginäre Geraden sind, falls sie überhaupt imaginär sind, ist der Analysis zu entnehmen. Der Punkt C ist der dritte Eckpunkt des in der vorhergehenden Note schon angewendeten Coordinatendreiecks.

4) Auch dieses Resultat ist der Analysis zu entlehnen.

Google

werden nämlich jede für sich von den beiden Strahleninvolutionen in zwei Punktinvolutionen geschnitten, die identisch sind; denn die Involution auf D_1D_2 hat die Doppelpunkte C und D, jene auf E_1E_2 die Doppelpunkte C und E. Und da nun AC die Strahlenpaare der Involution um A, und BC die Strahlenpaare der Involution um B harmonisch trennt von AB, ist F der dritte Diagonalpunkt von jedem vollständigen Vierseite, dessen Seiten zwei einander entsprechende Strahlenpaare dieser Involution sind.

Wenn die Doppelpunkte A und B conjugirt-imaginär sind, so sind es auch die Doppelpunktstangenten. Da aber zwei conjugirt-imaginäre Gerade einen reellen Schnittpunkt haben, so können nicht a_1 und b_1 zu a_2 und b_2 conjugirt sein, sondern es muss einer Doppeltangente durch A, eine Doppeltangente durch B conjugirt sein. Aber dann sind von den vier Punkten D_1, D_2, E_1, E_2 (Fig. 60.) auch zwei nicht auf einer nämlichen Seite des Vierseits $a_1 a_2 b_1 b_2$ liegende Punkte, z. B. die Punkte D_1D_2 reell, und die andern dann E_1, E_2 conjugirt-imaginär. Und hieraus folgt wieder, dass C als Punkt, welcher auf D_1D_2 die Punkte D_1 und D_2 harmonisch trennt von AB, reell ist. Da nun dieser reelle Punkt C der dritte Diagonalpunkt ist von allen vollständigen Vierseiten, deren Seiten zwei einander entsprechende Paare sind von den Involutionen um A und B, so besitzt die Curve C^4 mit den imaginären Inflexionsknoten A und B neben jedem reellen Punkte P auf CP einen zweiten reellen Punkt P', der von C und AB harmonisch von P getrennt wird. Und deshalb wird man die Curve C^4 central nur so zu projiciren haben, dass die Projectionen A' und B' mit den imaginären Kreispunkten der neuen Ebene zusammenfallen, um in der Projectionscurve eine Curve C zu erhalten, die in der Projection C' von C einen Mittelpunkt hat. Aber hiermit ist noch nicht nachgewiesen, dass die Projectionscurve Achsen hat. Ist C (Fig. 62.) der Mittelpunkt, und sind D_1 und D_2 die reellen Schnittpunkte der Doppelpunktstangenten dieser Projectionscurve, so erkennt man $D_1 D_2$ und ihre Mittelsenkrechte CE unmittelbar als Symmetrieachsen von dieser Curve; da ein Umklappen der Figur um irgend eine dieser beiden Geraden eine neue Curve liefert, welche mit der vorhergehenden, ausser sechszehn Schnittpunkten in den imaginären Kreispunkten noch die acht Schnittpunkte mit den beiden Geraden gemein hat und also mit ihr zusammenfällt.

Wir nennen die Curven C^4 mit zwei reellen Inflexionsknoten wieder die Curven erster Gattung, die Curven C^4 mit zwei conjugirt-imaginären Inflexionsknoten die Curven zweiter Gattung dieser Species. Es sind dann von dieser Species die Mittelpunktscurven wieder

Google

als Normalcurve erster und als Normalcurve zweiter Gattung zu bezeichnen.

79. „Es giebt drei verschiedene Arten von Normalcurven C^4 erster Gattung und nur eine Art von Normalcurven zweiter Gattung."

Die Normalcurven C^4 erster Gattung teilen sich in drei Arten, jenachdem die beiden reellen Inflexionsknoten Knotenpunkte, oder einer von beiden ein Knotenpunkt, und der andere ein conjugirter Punkt, oder aber beide conjugirte Punkte sind. Sind die Inflexionsknoten Knotenpunkte, so ist die Curve ihrer Gestalt nach nicht von der ersten Normalcurve C^4 erster Gattung (Fig. 22.) verschieden; nur geht sie nicht durch den Mittelpunkt C, den conjugirten Punkt von jener Curve. Die zweite Art von Normalcurven C^4 erster Gattung mit einem conjugirten Inflexionsknoten A und einem Inflexionsknoten B mit reellen Doppelpunktstangenten ist in Fig. 63. vorgeführt; es giebt die Figur von ihr zwei verschiedene Formen C_1 und C_2 an, die bei Parameteränderung durch die zweite Normalcurve C^4 hindurch in einander übergehen. Und die dritte Art von Normalcurven C^4 erster Gattung mit zwei Inflexionsknoten A und B, deren Doppelpunktstangenten sämtlich imaginär sind, giebt Fig. 64. an[5]).

Es giebt nur eine Art von Normalcurven C^4 zweiter Gattung, da bei imaginären Inflexionsknoten keine Unterschiede in den Doppelpunktstangenten obwalten können. Von ihr giebt Fig. 65. zwei verschiedene Formen C_1 und C_2 die bei Parameteränderung durch die Lemniskate hin in einander übergehen können. Diese Curve ist bekannt als das Oval von Cassini[6]).

---

5) Die Gleichung der Curve ist

$$x^2y^2+ax^2+by^2=\mu$$

Sind a und b beide negativ, so hat man es mit der ersten, haben a und b verschiedene Zeichen, so hat man es mit der zweiten, sind a und b beide positiv, so hat man es mit der dritten Art der Normalcurven C^4 erster Gattung zu tun.

6) Die Gleichung der Curve ist

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)+\mu a^4=0$$

Ist die Curve C^4 (Fig. 59.) bestimmt durch die Inflexionsknoten A, B, die Inflexionsdoppeltangenten a_1, a_2 und b_1, b_2 in diesen Punkten und den Punkt P, so hat der Kegelschnitt, welchen in A, B und P die erste Polare von P in Bezug auf C_4 berührt, den Punkt P' zum Pole von AB. An der Normalcurve C^4 zweiter Gattung angepasst, findet man aber, dass der Kreis, welcher diese Curve in den unendlich fernen Kreispunkten und in P berührt, seinen Mittelpunkt hat im Punkte P', welcher in der (Fig. 62.) um D_1D_2

umgelegten Transformation der reciproken Radien mit der Potenz CD_2 dem Punkte P entspricht. So findet man weiter, dass der Ort dieser Mittelpunkte für die bei den verschiedenen Punkten der Curve

$$(x^2+y^2)^2+2a_1(y^2-x^2)+\mu a^4=0$$

vorkommenden Kreise die Curve

$$(x^2+y^2)^2+\frac{2a^2}{\mu}(y^2-x^2)+\frac{ab}{\mu}=0$$

ist; für diese Curve liegen die Doppeltrennpunkte D_1 und D_2^c in einer Entfernung $\frac{a}{\mu}\sqrt{\mu}$ von C u. s. w.

Aus der letzteren Betrachtung entnehmen wir, dass die Normale in irgend einem Punkte P von einer Ovale von Cassini den Punkt P' enthält, welcher P in der angedeuteten umgelegten Transformation von reciproken Radien entspricht. Dieses Resultat gilt auch für den besonderen Fall der Lemniskate.

In der letzten Bemerkung ist die einfachste Lösung der Aufgabe enthalten: in einem Punkt P von einer durch diesen Punkt P und die beiden Doppelbrennpunkte bestimmten Ovale von Cassini die Normale und die Tangente zu construiren. Ist nämlich D_1 einer der Doppelpunkte und C der Mittelpunkt, so bestimmt man den Punkt P' mittelst der beiden Relationen

$$\angle D_1CP' = \angle PCD_1 \quad \text{und} \quad CP.CP' = CD_1^2;$$

dann ist PP' die Normale in P an der Curve u. s. w. Bei der Lemniskate ist also die Einhüllende der Verbindungslinie des Lemniskatenpunktes Q mit dem Punkte von dem Wendeschnitte, welcher dem Q entsprechenden Punkte C diametral gegenüberliegt zu gleicher Zeit die Evolute der Lemniskate; sie ist eine Curve $C^6{}_6$ sechster Ordnung und sechster Classe von der Gleichung

$$(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})\sqrt{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}=\tfrac{2}{3}a\sqrt{2}$$

(man vergleiche „die Lemniskate in rationaler Behandlung von Dr. Emil Weyr. Art. 20).

Es wird auch leicht geometrisch erkannt, dass die Evolute der Lemniskate von der sechsten Classe ist. Ist P ein gegebener Punkt und l irgend eine Gerade durch P, so wird der Kegelschnitt, welcher in der um die Brennpunktenachse umgelegte Transformation der reciproken Radien der Geraden l entspricht., l in zwei Punkten schneiden. Also ist der Ort der einander entsprechenden Punkte, deren Verbindungslinien durch P gehen, eine durch C und die imaginären Doppelpunkte der Lemniskate gehende Curve dritter Ordnung, welche ausser diesen Punkten noch sechs Punkte mit der Lemniskate gemein hat.

VIII.

Beitrag zur Lehre von der Bewegung eines festen Körpers in einer incompressibeln Flüssigkeit.

Von

Fr. Kötter.

Bekanntlich hat Dirichlet die Bewegung vollständig bestimmt welche ein irgend wie bewegter fester kugelförmiger Körper in einer ihn umgebenden incompressibeln reibungslosen Flüssigkeit hervorruft. Es ergiebt sich, dass man den Druck, welchen die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, ansehen kann als die Resultante zweier Kräfte, nämlich des hydrostatischen Druckes und einer Kraft, deren Angriffspunkt der Mittelpunkt der Kugel ist, deren Grösse proportional, und deren Richtung entgegengesetzt der Beschleunigung dieses Punktes ist. Es folgt hieraus unmittelbar, dass, wenn äussere Kräfte nicht wirken, und die Masse der Kugel homogen ist, der Mittelpunkt der Kugel in gerader Linie mit constanter Geschwindigkeit fortschreitet.

Ein ähnliches scheinbar bisher nicht veröffentlichtes Gesetz gilt auch dann, wenn die Massenverteilung der Kugel nicht homogen ist. Aus dem über den Druck Gesagten kann man, ohne auf den hydrodynamischen Ausgangspunkt zurückzugehen, mit den Hifsmitteln der gewöhnlichen Mechanik folgern, dass bei beliebiger Massenverteilung ein gewisser zwischen Schwerpunkt und Mittelpunkt gelegener Punkt, wenn äussere Kräfte nicht vorhanden sind, geradlinig mit constanter Geschwindigkeit sich bewegt. Dass wir beim Beweise dieses Gesetzes, welchem die folgenden Seiten gewidmet sind, auf den hydro-

dynamischen Ausgangspunkt zurückgreifen, hat erstens den Zweck, dasselbe für eine ganze Reihe von Körpern darzutun, und zweitens den Zweck, den innern Grund desselben klarer hervortreten zu lassen. Wir werden zeigen, dass das fragliche Theorem und etliche andere damit im Zusammenhang stehende dann gelten, wenn die Gestalt des Körpers zwei sich senkrecht schneidende Symmetrieachsen besitzt, in denen sich je zwei Paare Symmetrieebenen unter rechtem Winkel schneiden. Solche Körper sind z. B. der Würfel, das regelmässige Oktaeder, die Kugel, der Körper, dessen Oberfläche die Gleichung hat:

$$x^4 + y^4 + z^4 + a^2(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) = A^2$$

u. a. m. Um uns künftig unnütze Weitläufigkeiten zu ersparen, werden wir derartige Körper beliebiger Massenverteilung dadurch bezeichnen, dass wir sagen, ihre Gestalt sei im hydrodynamischen Sinne regelmässig oder trage den hydrodynamischen Charakter der Kugel.

Für die modernen Methoden [1]) zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen eines beliebigen Körpers in einer idealen Flüssigkeit ist der Umstand von besonderer Bedeutung, dass die lebendige Kraft der Flüssigkeit sich ebenso wie diejenige des Körpers darstellen lässt als homogene quadratische Function der Geschwindigkeitscomponenten $u v w$, welche der Anfangspunkt eines in dem Körper festen Coordinatensystems nach dessen Achsen besitzt, und der drei Rotationscomponenten $p q r$ des Körpers um diese Achsen. Besitzen nämlich, wie wir annehmen wollen, die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte ein Potential, so sind bei passend gewähltem Anfangszustand die Componenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, dessen Coordinaten in dem bezeichneten Coordinatensystem $x y z$ sind, die Ableitungen einer Function φ nach $x y z$. Als Function der Zeit t betrachtet, ist dieselbe eine lineare Function der sechs Grössen $u v w \; p q r$:

$$u \varphi_1 + v \varphi_2 + w \varphi_3 + p \varphi_4 + q \varphi_5 + r \varphi_6$$

deren Coefficienten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$ zwar von $x y z$, nicht aber von der Zeit t abhangen. Der Charakter der Functionen ist durch die geometrische Gestalt des Körpers bedingt, wird aber durchaus nicht durch dessen Massenverteilung beeinflusst. Die lebendige Kraft der Flüssigkeit, deren Dichtigkeit ϱ sein möge, erhalten wir durch das dreifache Integral

$$\frac{\varrho}{2} \int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right)$$

1) Kirchhoff: Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. Borchardts Journal Bd. 71. 1869.

welches über den ganzen unendlichen Raum zu erstrecken ist mit Ausnahme desjenigen Teiles, welcher von dem festen Körper ausgefüllt wird; die Grenzen des Integrals sind also in jedem Augenblick dieselben. Daraus erhellt dann unmittelbar, dass die lebendige Kraft wirklich die angegebene Form hat. Bezeichnet man nun mit T die gesamte lebendige Kraft, d. h. also die Summe derjenigen des Körpers und derjenigen der Flüssigkeit, mit X, Y, Z die Componentensummen und mit $M_x\, M_y\, M_z$ die Drehungsmomente sämtlicher auf die Flüssigkeit wie auf den festen Körper wirkenden äusseren Kräfte, so erhält man das folgende, zuerst von Kirchhoff in voller Allgemeinheit entwickelte System von Differentialgleichungen für die Bewegung des gegebenen Körpers:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) = q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v} + X$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) = r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w} + Y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) = p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u} + Z$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} + M_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} + M_y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} + M_z$$

Dasselbe stimmt in seiner Form wesentlich mit demjenigen überein, welches die Bewegung eines Körpers im leeren Raume darstellt. Wie man nun bei dem letzterwähnten Problem die Bewegung auf ein im Raume festes Coordinatensystem beziehen kann, so lassen sich auch in dem hydrodynamischen Problem für die Componentensummen und Drehungsmomente in Bezug auf drei im Raume feste Achsen Ausdrücke in den Bewegungs- und Lageelementen des Körpers ableiten. Wir bezeichnen die neuen Coordinatenachsen als ξ, η, ζ Achse, mit Ξ, H, Z die Componentensummen nach diesen Achsen und mit $\alpha_i\, \beta_i\, \gamma_i$ die Richtungscosinus der Achsen der beiden Systeme zu einander in der Weise, wie sie durch das nachstehende Schema verdeutlicht wird:

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

Die drei Gleichungen, welche den translatorischen Gleichungen für den leeren Raum entsprechen, lauten dann:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right) = \Xi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right) = H$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right) = Z$$

Auch diese Gleichungen stimmen in ihrer Form mit den entsprechenden des zur Vergleichung herangezogenen einfacheren Problems wesentlich überein; gewöhnlich werden in diesem Falle die letztangeführten in etwas anderer Form aufgeführt, welche die einfache mechanische Bedeutung der Grössen besser hervortreten lässt, deren Differentialquotienten nach der Zeit auf der linken Seite stehen. Diese Grössen sind bekanntlich die mit der Masse des im leeren Raum bewegten Körpers multiplicirten Componenten der Geschwindigkeit seines Schwerpunktes. Deswegen liefern für die Bewegung im leeren Raum diese Gleichungen eine klarere Einsicht in das Wesen der fortschreitenden Bewegung als die erstgenannten Gleichungen. Anders bei der Bewegung in der Flüssigkeit; dort haben im allgemeinen die Grössen

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w}$$

u. s. w. nicht mehr eine so einfache Bedeutung, und daher bieten diese Gleichungen nicht mehr den Vorteil wie vorher. Zwar liefern sie in gewissen einfachen Fällen, z. B. wenn keine Kraft oder nur die Schwere wirkt, je ein Integral, dafür bringen sie aber auch schon frühzeitig die Richtung der Achsen selbst in die Gleichungen; deshalb empfiehlt es sich bei dem hydrodynamischen Problem, namentlich in dem Falle, dass keine äusseren Kräfte wirken, zunächst bei dem bewegten Coordinatensystem stehen zu bleiben, wie es die Forscher auf diesem Gebiete bisher getan haben. In dem speciellen Falle, welchen wir jetzt ins Auge gefasst haben, lassen sich für den leeren Raum sämtliche Integrale des Systems von 6 Differentialgleichungen für $u\,v\,w\,p\,q\,r$ finden. Bei dem hydrodynamischen Problem lassen sich, wenn die Form des festen Körpers völlig willkürlich bleibt, nur drei und zwar t nicht explicite enthaltende Integrale finden. Clebsch[1] hat aber gezeigt, dass, wenn ein weiteres von t

[1] Mathematische Annalen. Bd. 3. pag. 238—262. 1871.

freies Integral bekannt wäre, sich mit Hülfe von Jacobi's Theorem des letzten Multiplicators ein fünftes derartiges Integral und dann auch das sechste, t enthaltende Integral finden lasse. Die Frage, unter welchen Umständen das fehlende vierte Integral durch eine constant zu setzende homogene lineare oder quadratische Function geliefert wird, beantwortet der genannte Forscher dahin, dass diese Möglichkeit an gewisse Relationen zwischen den Coefficienten der Function T geknüpft ist. Die Erfüllung der für den ersten Fall nötigen Bedingungen hatte Kirchhoff[1]) schon vorher durch die vereinfachende Annahme erreicht, dass der Körper sowol in Gestalt wie in Massenverteilung den Charakter eines Rotationskörpers hat, d. h. zwei Paare von senkrecht auf einander stehenden Symmetrieebenen besitzt, deren Schnittlinien zusammenfallen. Das Integral, welches sich in diesem Falle ausser den drei erwähnten finden lässt, drückt aus, dass der Körper mit constanter Geschwindigkeit um seine Achse rotirt. Den zweiten Fall, dessen Lösung in einem speciellen Fall Herr Weber[2]) auf Thetafunctionen zweier Variablen zurückgeführt hat, welche lineare Functionen der Zeit sind, lässt sich ansehen als die Bewegung gewisser Körper, deren Gestalt und Massenverteilung drei senkrecht auf einander stehende Symmetrieebenen besitzt.

Der Umstand, dass der Teil der lebendigen Kraft, welcher von dem festen Körper selbst herrührt, schon von vornherein eine gewisse einfache Form hat, lässt voraussetzen, dass schon die Annahme gewisser Symmetrien der Form hinreichen werde, den Ausdruck für die lebendige Kraft zu vereinfachen. Wir wollen die Richtigkeit dieser Voraussetzung an dem Beispiel der Körper dartun deren Gestalt den Charakter der Kugel hat. Zu dem Ende wählen wir das Coordinatensystem so, dass die y und die z Achse mit je einer der beiden Symmetrieachsen zusammenfallen. Auf den Teil der lebendigen Kraft, welcher von der Bewegung der Flüssigkeit herrührt, hat nur die Gestalt, nicht aber die Massenverteilung des festen Körpers Einfluss; es lassen sich also auf diesen Teil dieselben Ueberlegungen anwenden, welche Kirchhoff zur Vereinfachung des Ausdrucks der lebendigen Kraft des gesamten Systems bei Rotationskörpern gebraucht. Berücksichtigen wir zunächst, dass die Gestalt des Körpers in Bezug auf die z Achse den Character einer Rotationsfläche hat, so erhalten wir für den fraglichen Teil der lebendigen Kraft T den Ausdruck

1) Vergl. auch Köpcke: Mathematische Annalen. Bd. 12. pag. 387—402. 1877.

2) Mathematische Annalen. Bd. 14. pag. 173. 1879.

$$T_f = c_{11}(u^2+v^2)+c_{33}w^2+c_{44}(p^2+q^2)+c_{66}r^2+2c_{15}(uq-vp)$$

Da aber auch in Bezug auf die y Achse die Gestalt des festen Körpers den Charakter einer Rotationsfläche hat, so muss

$$c_{15}=0, \quad c_{11}=c_{33}, \quad c_{44}=c_{66}$$

sein. Wir können daher den Teil der lebendigen Kraft, welcher von der Flüssigkeit herrührt, schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\{M'(u^2+v^2+w^2)+L(p^2+q^2+r^2)\}$$

Derselbe stimmt also genau überein mit der lebendigen Kraft eines homogenen kugelförmigen festen Körpers von der Masse M' und dem Trägheitsmoment L, welcher mit dem gegebenen Körper derart fest verbunden ist, dass der Mittelpunkt der Kugel mit dem geometrischen Mittelpunkt des Körpers zusammen fällt. Es braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden, dass diese Eigenschaft selbstverständlich unabhängig von der Wahl des in dem gegebenen Körper festen Coordinatensystems ist. Wir können uns daher die gesamte lebendige Kraft vorstellen als die lebendige Kraft eines einzigen festen Körpers, dessen Masse besteht aus der Masse M des gegebenen Körpers und der Masse M', welche wir künftig als mitgeführte Masse bezeichnen wollen.

Der Schwerpunkt des ganzen Systems, von welchem wir jetzt sehr wol reden können, ist leicht aufzufinden; er teilt die Verbindungslinie des Schwerpunktes des gegebenen Körpers und des Schwerpunktes der mitgeführten Masse, d. h. des Mittelpunktes, nach dem Verhältniss der beiden Massen. Sind die Coordinaten des Massenmittelpunktes für den gegebenen Körper a, b, c, so hat also der Schwerpunkt des ganzen Systems die Coordinaten

$$\alpha = \frac{M}{M+M'}a, \quad \beta = \frac{M}{M+M'}b, \quad \gamma = \frac{M}{M+M'}c$$

In demselben Sinne ist man nach den bisherigen Entwicklungen berechtigt von Hauptträgheits-Achsen des ganzen Systems in Bezug auf seinen Schwerpunkt zu sprechen. Wählen wir nun diese Linien zu Coordinatenaxen, so nimmt die lebendige Kraft des ganzen Systems die Form an:

$$\tfrac{1}{2}\{M(u^2+v^2+w^2)+P_1p^2+Q_1q^2+R_1r^2\}$$

In unserm Falle bietet die Bezugnahme auf ein im Raume festes Coordinatensystem dieselben Vorteile wie bei der Bewegung im leeren Raum; denn die Ausdrücke

$$\frac{\partial T}{\partial u}\alpha_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\alpha_2 + \frac{\partial T}{\partial w}\alpha_3, \quad \frac{\partial T}{\partial u}\beta_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\beta_2 + \frac{dT}{\partial w}\beta_3,$$
$$\frac{\partial T}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\gamma_2 + \frac{\partial T}{dw}\gamma_3$$

nehmen hier die einfachere Form an:

$$(M+M_1)(u\alpha_1+\alpha v_2+w\alpha_3), \quad (M+M_1)(u\beta_1+v\beta_2+w\beta_3),$$
$$(M+M_1)(u\gamma_1+v\gamma_2+w\gamma_3)$$

Die zweiten Factoren dieser Ausdrücke sind die Componenten der Geschwindigkeit nach den Achsen des im Raume festen Coordinatensystems für den Anfangspunkt des beweglichen Systems und können also, wenn die Coordinaten des letzteren ξ, η, ζ sind, geschrieben werden $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$.

Für die fortschreitende Bewegung des Körpers haben wir also die folgenden Gleichungen

$$(M+M')\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Xi, \quad (M+M')\frac{d^2\eta}{dt^2} = H, \quad (M+M')\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z$$

deren Inhalt sich folgendermaassen in Worten aussprechen lässt:

„Bei der Bewegung eines festen Körpers, dessen Gestalt den hydrodynamischen Charakter einer Kugel hat, in einer incompressibeln reibungslosen unendlichen Flüssigkeit beschreibt ein gewisser zwischen seinem Mittelpunkt und seinem Schwerpunkt gelegener Punkt dieselbe Bahn, welche der Schwerpunkt eines aus der eigenen und der mitgeführten Masse gebildeten Körpers unter Einfluss derselben äusseren Kräfte im leeren Raum beschreiben würde."

Wirken speciell gar keine äusseren Kräfte, so ist

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$$

Wir erhalten also folgende Erweiterung des in der Einleitung erwähnten Theorems von Dirichlet:

„Welches auch immer die Massenverteilung innerhalb eines Körpers von Kugelgestalt sein möge, stets lässt sich auf der Verbindungslinie von Schwerpunkt und Mittelpunkt ein Punkt finden, welcher mit constanter Geschwindigkeit in gerader Linie fortschreitet."

Ist der Körper und die ihn umgebende Flüssigkeit der Schwere unterworfen, so muss, damit die Flüssigkeit im Unendlichen ruhe,

durch eine dort aufgestellte Fläche ein gewisser Druck ausgeübt werden, welcher dem hydrostatischen Druck gleich ist. Dieser Druck würde im Stande sein, die durch die constante beschleunigende Kraft hervorgerufene Wirkung aufzuheben, wenn der ganze Raum mit Flüssigkeit erfüllt wäre; es ist also die Resultante sämtlicher auf den flüssigen Teil des Systems wirkenden Kräfte gleich dem Gewicht derjenigen Masse, welche den von dem festen Körper eingenommenen Raum auszufüllen im Stande wäre, oder gleich dem Gewicht der sogenannten verdrängten Masse, welche wir M'' nennen wollen. Ihr Angriffspunkt ist der Mittelpunkt des Körpers, ihre Richtung derjenigen der Schwere entgegengesetzt. Geben wir der ζ Achse die Richtung der Schwere, so ist

$$\Xi = H = 0 \qquad Z = g(M - M'') = 0$$

und die Gleichungen der Bewegung lauten:

$$(M + M')\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \qquad (M + M')\frac{d^2\eta}{ds^2}$$

$$(M + M')\frac{d^2\zeta}{dt^2} = g(M - M'')$$

„In einer schweren incompressibeln Flüssigkeit bewegt sich also ein Punkt eines schweren Körpers, dessen Gestalt den Charakter der Kugel hat, gerade so, wie sich der Schwerpunkt eines festen Körpers von der Masse $(M + M')$ im leeren Raum unter Einfluss der constanten beschleunigenden Kraft $g(M - M'')$ bewegen würde; d. h. in einer Parabel. M ist die eigene Masse des Körpers, M' die mitgeführte und M'' die verdrängte Masse der Flüssigkeit."

Die rotatorische Bewegung des Körpers erkennt man leichter unter Beibehaltung des im Körper festen Coordinatensystems. Dieselbe wird bei der speciellen Form, welche die lebendige Kraft in unserem Falle hat, gegeben durch die Gleichungen:

$$P_1 \frac{dp}{dt} = (R_1 - Q_1)qr + M_x$$

$$Q_1 \frac{dq}{dt} = (P_1 - R_1)rp + M_y$$

$$R_1 \frac{dr}{dt} = (Q_1 - P_1)pq + M_z$$

Sind die Drehungsmomente der äusseren Kräfte bekannt, so ist das Problem der Rotation ebenfalls identisch mit einem derartigen Probleme für den leeren Raum. Wirken speciell gar keine äusseren

Digitized by Google

Kräfte, so rotirt der Körper in der Flüssigkeit um den Schwerpunkt des ganzen Systems in derselben Weise wie ein fester Körper im leeren Raum um seinen Schwerpunkt rotirt. Vereinigen wir das mit dem über die fortschreitende Bewegung Gesagten, so erhalten wir das Theorem:

„Wirken keine äusseren Kräfte, so bewegt sich auch ein nicht homogener fester Körper regelmässiger Gestalt in einer incompressiblen Flüssigkeit, wie sich ein gewisser durch Gestalt und Massenverteilung des gegebenen bedingter Körper im leeren Raum bewegen würde. Die Rolle des Schwerpunktes spielt dabei ein Punkt, welcher die Verbindungslinie von Schwerpunkt und Mittelpunkt nach dem Verhältniss der mitgeführten und der eigenen Masse teilt."

In Bezug auf die fortschreitende Bewegung eines festen schweren Körpers wird durch das Vorhandensein einer schweren Flüssigkeit keine andere Aenderung der Bewegung bewirkt, als dass die Constante der Beschleunigung verringert wird. Die Rotation des festen Körpers in einer schweren Flüssigkeit folgt jedoch nicht so einfachen Gesetzen, wie die Rotation im leeren Raum. Bekanntlich rotirt ein frei beweglicher Körper im leeren Raum um seinen Schwerpunkt gerade so, als ob gar keine äusseren Kräfte wirkten. Es beruht das darauf, dass die äusseren Kräfte — hier lediglich die Schwere der einzelnen Teile des festen Körpers — eine Resultante haben, welche durch den Schwerpunkt des festen Körpers geht, und also in Bezug auf keine durch diesen Punkt gehende Linie ein Drehungsmoment haben kann. Bei der Bewegung in einer Flüssigkeit wirken jedoch zwei Kräfte entgegengesetzter Richtung, deren Angriffspunkte verschieden sind, nämlich im Schwerpunkte des Körpers sein eigenes Gewicht, im geometrischen Mittelpunkt der hydrostatische Auftrieb, welcher gleich dem Gewichte der verdrängten Masse ist. In Bezug auf das zu Grunde gelegte Coordinatensystem möge der Schwerpunkt die Coordinaten

$$\frac{M'}{M+M'}a,\quad \frac{M'}{M+M'}b,\quad \frac{M'}{M+M'}c$$

haben; dann hat der Mittelpunkt die Coordinaten

$$-\frac{M}{M+M'}a,\ -\frac{M}{M+M'}b,\ -\frac{M}{M+M'}c$$

und die Drehungsmomente in Bezug auf die im Körper festen Achsen sind:

$$g\,\frac{M(M'+M'')}{M+M'}\,(c\gamma_2-b\gamma_3)$$

$$g\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(a\gamma_3-c\gamma_1)$$

$$g\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(b\gamma_1-a\gamma_2).$$

Die Rotation des Körpers um den Coordinatenanfangspunkt gehorcht also dem durch folgende Gleichungen dargestellten Gesetz:

$$P_1\frac{dp}{dt}=(R_1-Q_1)qr+g\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(c\gamma_2-b\gamma_3)$$

$$Q_1\frac{dq}{dt}=(P_1-R_1)rp+g\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(a\gamma_3-c\gamma_1)$$

$$R_1\frac{dr}{dt}=(Q_1-P_1)pq+g\frac{M(M'+M'')}{M+M'}(b\gamma_1-a\gamma_2)$$

Durch Gleichungen von derselben Form ist aber die Rotation eines schweren Körpers im leeren Raum bestimmt, welchen man in einem von seinem Schwerpunkt verschiedenen Punkt befestigt hat. Wir haben demnach das Theorem:

„Der Schwerpunkt der mitgeführten und der eigenen Masse eines in einer schweren incompressiblen Flüssigkeit frei beweglichen schweren Körpers von regelmässiger Gestalt aber beliebiger Massenverteilung bewegt sich wie der Schwerpunkt eines festen Körpers im leeren Raum in einer Parabel. Während aber im leeren Raum die Rotation eines festen Körpers um seinen Schwerpunkt so beschaffen ist als ob gar keine äusseren Kräfte wirkten, rotirt der Körper in der schweren Flüssigkeit um den genannten Punkt in derselben Weise, wie im leeren Raume ein gewisser schwerer Körper, von welchem ein vom Schwerpunkt verschiedener Punkt befestigt ist.

Fassen wir das Gesagte noch einmal zusammen, so ergiebt sich, dass der Einfluss der Flüssigkeit auf die Bewegung eines festen Körpers regelmässiger Gestalt in ihr, abgesehen von der Modification der äusseren Kräfte nach dem Gesetz des Archimedes, aufgefasst werden kann als eine Vermehrung der Masse und der Trägheitsmomente, verbunden mit einer Verlegung des Schwerpunktes und des Systems der Hauptträgheitsachsen. Das gilt selbstverständlich auch dann noch, wenn der feste Körper durch irgend welche Vorrichtungen an der freien Bewegung gehindert ist, wenn er z. B. gezwungen ist, sich rotationslos in gerader Linie zu bewegen, oder wenn er sich lediglich um eine feste Achse drehen kann. In den beiden genannten Fällen ist sogar die Möglichkeit, den Einfluss der Flüssigkeit auf die Bewegung des Körpers in der genannten Weise zu beschreiben,

nicht an die Bedingung der regelmässigen Gestalt geknüpft, sondern gilt, wie Herr C. Neumann [1]) nachgewiesen, hat für beliebige Körper, sobald nur vorausgesetzt werden darf, dass der von der Flüssigkeit erfüllte Raum einfach zusammenhangend ist. Es mag dem Verfasser dieser Abhandlung zum Schluss die Bemerkung gestattet sein, dass dasselbe auch noch bei einem höheren Grade von Freiheit der Bewegung gilt, nämlich bei der Rotation um einen festen Punkt. Wenn keine äussere Kraft oder nur die Schwere wirkt, so ist das Problem der Rotation eines beliebigen Körpers im wesentlichen identisch mit dem entsprechenden Problem für den leeren Raum; das Vorhandensein der Flüssigkeit bewirkt einerseits eine Vermehrung der Trägheitsmomente und eine Drehung des Systems der Hauptträgheitsachsen für den Rotationsmittelpunkt, andererseits nach dem Gesetz des Archimedes eine Verminderung des Gewichtes und eine Verlegung des Schwerpunktes.

Berlin, 1887.

---

1) C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig 1883. pag. 79 und 84.

Digitized by Google

X.

Principien der n dimensionalen Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

---

§. 1. Anordnungen.

Die Lage eines Punkts variire mit n (vorbehaltlich erklärter Bestimmung) unabhängigen Grössen, die wir als Coordinaten bezogen auf n orthogonale Axen auffassen. Sind diese Coordinaten sämtlich Functionen eines Parameters, so erzeugt der Punkt eine Linie s.

Bei Normirung der Eigenschaften dieser Linie lassen wir uns von folgenden, in der Raumcurventheorie gemachten Erfahrungen leitet.

1) Fast alle allgemeinen Bestimmungen lassen sich mit Anwendung einer einzigen Coordinate, welche vermöge ihrer beliebigen Lage alle übrigen vertreten kann, zum Ausdruck bringen. In gegenwärtiger Darstellung sind auch die wenigen Ausnahmen vermieden. Wir werden jeden Punkt durch eine Coordinate, jede Richtung durch den Richtungscosinus bezüglich auf eine Axe bezeichnen; ΣN soll, wo keine Summationsgrenzen dabei stehen, und N Function von Grössen, die von der Lage jener Axe abhangen, ist, die Summe aller Analogen bezüglich auf alle n Axen, und

$$| N_1 N_2, \ldots N_n |$$

die Determinante des Systems bedeuten, dessen erste Horizontalreihe allein ausgeschrieben ist, während die übrigen als Analoga daraus hervorgehen.

2) Die Raumcurventheorie hat gezeigt, dass die allgemeinen Probleme sich sehr vereinfachen, wenn man das Bogenelement und

Digitized by Google

mit ihm alle Lineargrössen vorerst eliminirt. Die Elimination vollziehen wir, indem wir die Curve nicht als Ort eines variabeln Punktes, sondern als Einhüllende einer Tangentenschar auffassen und die Tangenten durch gleichgerichtete vom Anfangspunkt ausgehende Strahlen ersetzen. Da alsdann die actuellen Tangenten, Normalen u. s. w. nicht vorkommen, so werden wir (abgesehen von einer vorbereitenden Betrachtung) der Kürze wegen die gleichgerichteten Strahlen so nennen.

3) Gleichwie in der Raumcurventheorie wenden wir den Krümmungswinkel τ als Parameter an und bezeichnen die Differentialquotienten einer Function N nach τ durch

$$N', \; N'', \; \dots \; N^{(k)}$$

Die Grösse τ ist dann der vom Endpunkt der auf dem Tangentenstrahl abgetragenen Strecke $= 1$ erzeugte Bogen.

4) Es lässt sich leicht bemerken, dass alle Glieder einer Reihe schon durch Anfangs- und Endglied

$$N_p, \; \dots \; N_q$$

kenntlich sind, wenn N_q zugleich als allgemeines Glied aufgefasst werden kann. Ist $q < p$, so hat die Reihe kein Glied, und ihre Summe ist null.

§. 2. Osculirende lineare Gebilde.

Ein Gebilde B osculirt in $m$ter Ordnung ein Gebilde A im gemeinsamen Punkte P, wenn ein Punkt auf A im einfach unendlich kleinen Abstand von P einen unendlich kleinen Abstand mehr als $m$ter Ordnung von B hat.

So osculirt in 1. Ordnung die Tangente, in 2. Ordnung die Schmiegungsebene, in 3. Ordnung der Schmiegungsraum (für 4 Dimensionen) die Curve, weil der Nachbarpunkt des Berührungspunkts auf der Curve bzhw. um eine Unendlichkleine 2., 3., 4. Ordnung von den genannten linearen Gebilden entfernt ist.

„Die osculirende lineare $m$dehnung E_m ist der Schnitt von $n-m$ $(n-1)$dehnungen einzeln ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$| f \dots f^{(\lambda-1)} \quad \xi - x \quad f^{(\lambda+1)} \dots f^{(n-1)} | = 0 \tag{1}$$

$$(\lambda = m, \; \dots \; n-1) \tag{2}$$

wo ξ den erzeugenden Punkt von E_m, x den gemeinsamen Punkt von E_m und der Curve s, und f den Richtungscosinus der Tangente an s im Punkte x bezeichnet".

Um dies zu beweisen, sei ξ_1 ein Punkt der Curve für den Bogen $s+\partial s$. Dann ist dessen normaler Abstand von der linearen $(n-1)$ dehnung (1)

$$h\lambda = | f \dots f^{(\lambda-1)} \quad \xi_1 - x \quad f^{(\lambda+1)} \dots f^{(n-1)} | : M \qquad (3)$$

wo M die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Coefficienten der Analogen von $\xi_1 - x$ bedeutet. Entwickelt man ξ_1 nach dem taylorschen Satze, so erhält man:

$$\xi_1 - x = \frac{\partial x}{\partial s} \partial s + \dots \frac{\partial^\lambda x}{\partial s^\lambda} \frac{\partial s^\lambda}{\lambda !} + R \frac{\partial s^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}$$

wo R ein endlicher Mittelwert von $\frac{\partial^{\lambda+1} x}{\partial s^{\lambda+1}}$ bei Variation von s bis $s+\partial s$ ist. Da nun $\frac{\partial x}{\partial s} = f$, so wird $\xi_1 - x$ von der Form:

$$\xi_1 - x = \alpha f + \dots \alpha_{\lambda-1} f^{(\lambda-1)} + R \frac{\partial s^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes in Gl. (3) heben sich die λ Reihenglieder als proportional den vorhergehenden Verticalreihen der Determinante, und es bleibt nur der Rest, nämlich:

$$h\lambda = \frac{\partial s^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \left| f \dots f^{(\lambda-1)} R f^{(\lambda+1)} \dots f^{(n-1)} \right| : M$$

Nun ist nach der Bestimmung (2) $\lambda + 1 > m$, folglich sämtliche $h\lambda$ unendlich klein mehr als m ter Ordnung, folglich auch der Abstand von ξ_1 und E_m, soweit überhaupt die genannten $(n-1)$ dehnungen einen m dehnigen Schnitt haben.

Nachdem hiermit der analytische Ausdruk der Osculirenden festgestellt ist, verschieben wir E_m bei unveränderter Stellung so, dass der Punkt x in den Anfangspunkt rückt, und bezeichnen mit der osculirenden linearen m dehnung E_m die durch die Gleichungen

$$| f \dots f^{(\lambda-1)} \xi f^{(\lambda+1)} \dots f^{(n-1)} | = 0 \quad (\lambda = m, \dots n-1)$$

ausgedrückte.

Diese $n-m$ Gleichungen werden erfüllt durch die Werte

$$\xi = f, \quad \dots \quad f^{(m-1)}$$

sowie durch jeden linearen Complex derselben; umgekehrt ist E_m bestimmt durch die m Strahlen $f, \dots f^{(m-1)}$.

Liegt irgend ein Strahl in E_m, so hat sein Richtungscosinus die Form

$$\alpha f + \ldots \alpha_{m-1} f^{(m-1)}$$

wo $\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}$ Invarianten bezeichnen.

§. 3. Orthogonales begleitendes Axensystem.

Innerhalb E_m gibt es auf E_{m-1} im Anfangspunkt nur eine bestimmte Normale, deren Richtungscosinus f_m sei. Bestimmt ist sie dadurch, dass sie auf den $m-1$ Strahlen $f, \ldots f^{(m-2)}$ senkrecht steht. Die Bedingungen sind also einerseits:

$$\Sigma f f_m = 0; \quad \ldots \quad \Sigma f^{(m-2)} f_m = 0 \tag{4}$$

andrerseits, sofern sie in E_m liegen soll:

$$M_m f_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} f^{(\lambda)} \tag{5}$$

wo M_m sich durch die Bedingung

$$\Sigma f_m^2 = 1 \tag{6}$$

bestimmt, nachdem über den willkürlichen Factor der A verfügt ist.

Führt man den Wert (5) in die Gl. (4) ein und setzt

$$\varrho_{x,\lambda} = \Sigma f^{(x)} f^{(\lambda)} \tag{7}$$

so erhält man:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} \varrho_{0,\lambda} = 0; \quad \ldots \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} \varrho_{m-2,\lambda} \tag{8}$$

Fügt man zu diesen $m-1$ Gleichungen als $m$te die Gl. (5), so gibt die Auflösung:

$$M_m f_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \cdots & \varrho_{0,m-2} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \cdots & \varrho_{m-1,m-2} & f^{(m-1)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Identificirt man diese Gleichung mit Gl. (5), so drückt sie die Werte von $A_{\lambda,m}$ in Unterdeterminanten aus. Von diesen Coefficienten haben die zwei letzten besondere Bedeutung. Sei deshalb

$$K_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \cdots & \varrho_{0m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \cdots & \varrho_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$H_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \dots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-2,0} & \dots & \varrho_{m-2,m-3} & \varrho_{m-2,m-1} \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$G_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \dots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-3,0} & \dots & \varrho_{m-3,m-3} & \varrho_{m-3,m-1} \\ \varrho_{m-1,0} & \dots & \varrho_{m-1,m-3} & \varrho_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Dann ist

$$A_{m-1,m} = K_{m-1}; \quad A_{m-2,m} = -H_m \tag{13}$$

Nach Gl. (6) hat man zur Bestimmung von M_m:

$$M_m^2 = \Sigma(M_m f_m)^2 = \sum_{x=0}^{x=m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{x,m} A_{\lambda,m} \varrho_{x,\lambda}$$

Die Gl. (8) und (9) geben:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} \varrho_{x,\lambda} = \begin{cases} 0 & (x < m-1) \\ K_m & (x = m-1) \end{cases} \tag{14}$$

folglich ist

$$M_m^2 = A_{m-1,m} K_m = K_m K_{m-1} \tag{15}$$

Der Strahl f_m steht als Normale von E_{m-1} auf den Strahlen f, $f_2, \dots f_{m-1}$ senkrecht. Dies successive auf $f_2, f_3, \dots f_n$ angewandt ergibt, dass die n Strahlen $f \equiv f_1, f_2, \dots f_n$ ein orthogonales System bilden. Wir nennen dasselbe gleichwie in der Raumcurventheorie das begleitende Axensystem, den Strahl f_m die $m$te begleitende Axe, so dass f_1 die Tangente, f_2 die Hauptnormale, f_3 die Binormale, f_4 die Trinormale u. s. w. darstellt.

§. 4. Differentialformel für die Richtungscosinus der begleitenden Axen.

Differentiirt man Gl. (5) nach τ, so hat das Resultat die Form:

$$f_m' = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} B_\lambda f^{(\lambda)} \tag{16}$$

und der letzte Coefficient den Wert:

$$B_m = \frac{A_{m-1,m}}{M_m} = \frac{K_{m-1}}{M_m} \tag{17}$$

Nach Gl. (9) ist

$$M_m \Sigma f^{(m-1)} f_m = K_m \tag{18}$$

Differentiirt man die Gl. (4) nebst dieser, so kommt:

$$\Sigma f^{(\varkappa)} f_m' + \Sigma f^{(\varkappa+1)} f_m = \begin{cases} 0 & (\varkappa = 0, \ldots m-2) \\ \left(\frac{K_m}{M_m}\right)' & (\varkappa = m-1) \end{cases}$$

und zwar ist nach Gl. (4) (18)

$$\Sigma f^{(\varkappa+1)} f_m = \begin{cases} 0 & (\varkappa = 0, \ldots m-3) \\ \frac{K_m}{M_m} & (\varkappa = m-2) \end{cases} \tag{19}$$

$$\text{und sei} = \left(\frac{K_m}{M_m}\right)' - L \quad \text{für} \quad \varkappa = m-1$$

Dann hat man:

$$\Sigma f^{(\varkappa)} f_m' = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} B_\lambda \varrho_{\varkappa,\lambda} = \begin{cases} 0 & (\varkappa = 0, \ldots m-3) \\ -\frac{K_m}{M_m} & (\varkappa = m-2) \\ L & (\varkappa = m-1) \end{cases}$$

Zu diesen m Gleichungen kommt als $(m+1)$te die Gl. (16); dann ist die Coefficientendeterminante nach Gl. (9)

$$= M_{m+1} f_{m+1}$$

und die Auflösung des Gleichungssystems lautet:

$$M_{m+1} f_{m+1} B_\lambda =$$

$$\begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \ldots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-2} & \varrho_{0,m-1} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{\lambda-1,0} & \ldots & \varrho_{\lambda-1,m-3} & \varrho_{\lambda-1,m-2} & \varrho_{\lambda-1,m-1} & f^{(\lambda-1)} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{K_m}{M_m} & L & f_m' \\ \varrho_{\lambda+1,0} & \ldots & \varrho_{\lambda+1,m-3} & \varrho_{\lambda+1,m-2} & \varrho_{\lambda+1,m-1} & f^{(\lambda+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m,0} & \ldots & \varrho_{m,m-3} & \varrho_{m,m-2} & \varrho_{m,m-1} & f^{(m)} \end{vmatrix}$$

das ist für $\lambda = m$ nach Gl. (17):

$$\frac{K_{m-1} M_{m+1}}{M_m} f_{m+1} =$$

$$\begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \ldots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-2} & \varrho_{0,m-1} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \ldots & \varrho_{m-1,m-3} & \varrho_{m-1,m-2} & \varrho_{m-1,m-1} & f^{(m-1)} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{K_m}{M_m} & L & f_m' \end{vmatrix}$$

$$= K_m f_m' - L f_m - \frac{K_m}{M_m} N_m F_m \tag{20}$$

wo

$$N_m F_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \dots & \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-1} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \dots & \varrho_{m-1,m-3} & \varrho_{m-4,m-1} & f^{(m-1)} \end{vmatrix} \tag{21}$$

gesetzt ist, nnd F_m durch die Gleichnng

$$\Sigma F_m^2 = 1$$

als Richtnngscosinns eines Strahles bestimmt werden soll.

Multiplicirt man Gl. (20) mit f_m, so gibt die Snmme der Analogen:

$$0 = -L - \frac{K_m}{M_m} N_m \Sigma f_m F_m \tag{22}$$

nnd da nach Gl. (21) (11)

$$N_m \Sigma f_m F_m = \frac{H_m K_m}{M_m} \tag{23}$$

ist:

$$L = -H_m \left(\frac{K_m}{M_m}\right)^2 \tag{24}$$

Jetzt lantet Gl. (20):

$$f_m' = \frac{K_{m-1} M_{m+1}}{K_m M_m} f_{m+1} - \frac{H_m K_m}{M_m^2} f_m + \frac{N_m}{M_m} F_m \tag{25}$$

Vom Strahle F_m ist einerseits ans Gl. (21) zn ersehen, dass er auf den Strahlen $f, \dots f^{(m-3)}$ nnd $f^{(m-1)}$, mithin auch anf denjenigen, deren Richtungscosinns linearo Complexe derselben sind, senkrecht steht. Solche Complexe sind aber nach Gl. (4) $f_1, f_2, \dots f_{m-2}$.

Andrerseits zeigt Gl. (4), dass die Strahlen

$$f_{m+1}, \dots f_n$$

auf allen Strahlen senkrecht stehen, deren Richtnngscosinns lineare Complexe von

$$f, f', \dots f^{(m-1)}$$

sind. Mithin anch anf dem Strahle F_m.

Demnach steht F_m auf allen hegleitenden Axen senkrecht ausser f_m nnd f_{m-1}. Folglich hat es die Form

$$F_m = \alpha f_m + \beta f_{m-1}$$

wo die Invarianten α, β die Gleichnng

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

erfüllen, nnd zwar erhält man einzeln:

$$\alpha = \Sigma f_m F_m; \quad \beta = \Sigma f_{m-1} F_m \tag{26}$$

Entwickelt man f_m und f_{m-1} nach Gl. (5), so kommt:

$$M_m N_m \alpha = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} A_{\lambda,m} N_m \Sigma f^{(\lambda)} F_m = - A_{m-2,m} K_m$$

$$M_{m-1} N_m \beta = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-2} A_{\lambda,m-1} N_m \Sigma f^{(\lambda)} F_m = - A_{m-2,m-1} K_m$$

also nach Gl. (13):

$$\alpha = \frac{H_m K_m}{M_m N_m}; \quad \beta = - \frac{K_m K_{m-2}}{M_{m-1} N_m}$$

daher wird

$$N_m F_m = K_m \left(\frac{H_m}{M_m} f_m - \frac{K_{m-2}}{M_{m-1}} f_{m-1} \right) \tag{27}$$

und nach Gl. (25)

$$f_m' = \frac{K_{m-1} M_{m+1}}{K_m M_m} f_{m+1} - \frac{K_m K_{m-2}}{M_m M_{m-2}} f_{m-1}$$

oder nach Gl. (15)

$$f_m' = \frac{\sqrt{K_{m+1} K_{m-1}}}{K_m} f_{m+1} - \frac{\sqrt{K_m K_{m-2}}}{K_{m-1}} f_{m-1} \tag{28}$$

Sei, um nachträglich N_m zu berechnen,

$$N_m F_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} C_\lambda f^{(\lambda)} \tag{29}$$

dann ist C_λ als Coefficient von $f^{(\lambda)}$ in Gl. (21) bekannt, aus welchem man ersieht, dass

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} C_\lambda \varrho_{\varkappa,\lambda} = \begin{cases} 0 & (\lambda = 0, \ldots m-3, m-1) \\ - K_m & (\lambda = m-2) \end{cases} \tag{30}$$

ist. Daher wird

$$N_m^2 = \Sigma (N_m F_m)^2 = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} C_\varkappa C_\lambda \varrho_{\varkappa,\lambda}$$
$$= - C_{m-2} K_m = G_m K_m \tag{31}$$

und nach Einsetzung der Werte von M_m, M_{m-1}, N_m in Gl. (27)

$$F_m = \frac{H_m f_m - \sqrt{K_m K_{m-2}} f_{m-1}}{\sqrt{G_m K_{m-1}}} \tag{32}$$

woraus beiläufig die Identität:

$$G_m K_{m-1} = H_m^2 + K_m K_{m-2} \tag{33}$$

Sei ferner zur Abkürzung

$$P_m = \frac{\sqrt{K_{m+1} K_{m-1}}}{K_m} \tag{34}$$

dann lautet Gl. (28):

$$f_m' = P_m f_{m+1} - P_{m-1} f_{m-1} \tag{35}$$

und zwar ist ist $P_0 = 0$. Multiplicirt man mit f_m und summirt von $m = 1$ an, so kommt:

$$\sum_{k=1}^{k=m} f_k f_k' = P_m f_m f_{m+1} \tag{36}$$

§. 5. Krümmungen.

In der Raumcurventheorie werden die Krümmungen durch die Contingenzwinkel der Tangente und Schmiegungsebene gemessen Will man diese osculirenden linearen Gebilde E_1, E_2 durch ihre Normalen ersetzen, so zeigt sich, dass die Normale der Tangente nur dann gleiche Winkel mit dieser erzeugt, wenn sie sich längs der Schmiegungsebene bewegt. Die Hauptnormale entspricht dieser Bedingung nicht: indem sie sofort aus der Schmiegungsebene heraustritt, bildet sie einen andern Contingenzwinkel, nämlich den, welcher die Totalkrümmung bestimmt. Für ebene Curven sind beide Winkel gleich, weil die osculirende Ebene fest ist. Ebenso erzeugt die Normale der Schmiegungsebene gleiche Winkel mit letzterer, wei der osculirende Raum fest ist.

Wenden wir dies auf Curven in der festen linearen n dehnung an, deren osculirende lineare Gebilde $E_1, \ldots E_{n-1}$ variabel sind, so haben wir zwei Begriffe zu unterscheiden: Krümmungen schlechthin und Totalkrümmungen, welche wir nun folgendermassen definiren.

Deviation des Strahles f_m heisst der Winkel zwischen den Normalen auf der osculirenden linearen $(m-1)$dehnung E_{m-1} und ihrer Consecutiven innerhalb E_m. Sie sei bezeichnet durch $\partial\tau_{m-1}$. Die Grössen

$$\frac{\partial\tau_m}{\partial s}, \quad \frac{\partial\tau_m}{\partial\tau} = \tau_m', \quad \tau_m$$

heissen die $m$te Krümmung, das $(m-1)$te Krümmungsverhältniss, der $m$te Krümmungswinkel.

Der Contingenzwinkel des Strahles f_m, d. h. der Winkel zwischen dem Strahle und seinem Consecutiven, sei bezeichnet durch $\partial\sigma_{m-1}$. Die Grössen

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial s}, \quad \frac{\partial \sigma_m}{\partial \tau} = \sigma_m', \quad \sigma_m$$

heissen die $m$te Totalkrümmung, das $(m-1)$te Totalkrümmungsverhältniss, der $m$te Totalkrümmungswinkel.

Es ist nun zuerst die Deviation von f_m als Winkel zwischen den zwei Strahlen

$$f_m \quad \text{und} \quad f_m + \varphi_m \partial \tau$$

zu berechnen. Sofern letzterer in E_m liegt, muss sein Richtungscosinus die Form (5) haben. Man kann daher setzen:

$$(M_m + \pi_m \partial \tau)(f_m + \varphi_m \partial \tau) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{\lambda,m} + \delta_\lambda \partial \tau) f^{(\lambda)} \tag{37}$$

Dann gibt die Quadratsumme der Analogen:

$$(M_m + \pi_m \partial \tau)^2 = M_m^2 + 2M_m \pi_m \partial \tau =$$
$$\sum_{x=0}^{x=m-1} (A_{x,m} + \delta_x \partial \tau) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{\lambda,m} + \delta \lambda \partial \tau) \varrho_{x,\lambda}$$
$$= \sum_{x=0}^{x=m-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{x,m} A_{\lambda,m} + 2\delta_x A_{\lambda,m} \partial \tau) \varrho_{x,\lambda}$$

woraus, da der Wert von M_m^2 bekannt ist:

$$M_m \pi_m = \delta_{m-1} K_m \tag{38}$$

Die zweite Bedingung ist, dass der Strahl $f_m + \varphi_m \partial \tau$ auf den Consecutiven der $m-1$ Strahlen

$$f^{(\mu)} \quad (\mu = 0, \ldots m-2)$$

d. i. auf den Strahlen

$$f^{(\mu)} + f^{(\mu+1)} \partial \tau \quad (\mu = 0, \ldots m-2)$$

senkrecht steht. Es muss also sein

$$0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{\lambda,m} + \delta_\lambda \partial \tau)(\varrho_{\lambda,\mu} + \varrho_{\lambda,\mu+1} \partial \tau)$$
$$= \partial \tau \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (A_{\lambda,m} \varrho_{\lambda,\mu+1} + \delta_\lambda \varrho_{\lambda,\mu}) \quad (\mu = 0, \ldots m-2)$$

das ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} \delta_\lambda \varrho_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu = 0, \ldots m-3) \\ -K_m & (\mu = m-2) \end{cases}$$

Eine $m$te Gleichung erhält man aus (37) nach Subtraction des von $\partial \tau$ freien Teils, nämlich:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} \delta_\lambda f^{(\lambda)} = \pi_m f_m + M_m \varphi_m$$

und nach Auflösung des Systems, dessen Coefficientendeterminante $= M_m f_m$ ist:

$$\delta_\lambda M_m f_m = \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \dots \varrho_{0,m-3} & \varrho_{0,m-2} & f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{\lambda-1,0} & \dots \varrho_{\lambda-1,m-3} & \varrho_{\lambda-1,m-2} & f^{(\lambda-1)} \\ 0 & \dots 0 & -K_m & \pi_m f_m + M_m \varphi_m \\ \varrho_{\lambda+1,0} & \dots \varrho_{\lambda+1,m-3} & \varrho_{\lambda+1,m-2} & f^{(\lambda+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{m-1,0} & \dots \varrho_{m-1,m-3} & \varrho_{m-1,m-2} & f^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

das ist für $\lambda = m - 1$

$$\delta_{m-1} M_m f_m = K_{m-1}(\pi_m f_m + M_m \varphi_m) + K_m M_{m-1} f_{m-1}$$

Nach Gl. (30) aber ist

$$\delta_{m-1} M_m = \pi_m \frac{M_m^2}{K_m} = \pi_m K_{m-1}$$

folglich

$$K_{m-1} M_m \varphi_m + K_m M_{m-1} f_{m-1} = 0$$

woraus:

$$\varphi_m = -\frac{\sqrt{K_m K_{m-2}}}{K_{m-1}} f_{m-1} \tag{39}$$

Demnach ist die Deviation von f_m

$$\partial \tau_{m-1} = \sqrt{\Sigma (\varphi_m \partial \tau)^2} = \frac{\sqrt{K_m K_{m-2}}}{K_{m-1}} \partial \tau \tag{40}$$

und das $(m-1)$te Krümmungsverhältniss

$$\tau_m' = \frac{\sqrt{K_{m+1} K_{m-1}}}{K_m} \tag{41}$$

Führt man diesen Wert in die Differentialformel (28) ein, so lautet sie:

$$\partial f_m = f_{m+1} \partial \tau_m - f_{m-1} \partial \tau_{m-1} \tag{42}$$

und um Anfang und Ende der Reihe sichtbar zu machen:

$$\begin{aligned} \partial f_1 &= f_2 \partial \tau_1 \\ \partial f_2 &= f_3 \partial \tau_2 - f_1 \partial \tau_1 \\ &\vdots \\ \partial f_{n-1} &= f_n \partial \tau_{n-1} - f_{n-2} \partial \tau_{n-2} \\ \partial f_n &= \qquad - f_{n-1} \partial \tau_{n-1} \end{aligned}$$

Digitized by Google

Hieraus ergeben sich nach der Formel

$$\partial\sigma_{m-1} = \sqrt{\Sigma\partial f_m^2}$$

die Totalkrümmungsverhältnisse:

$$\sigma'_{m-2}{}^2 = \tau_m'^2 + \tau'_{m-1}{}^2 \tag{43}$$

einzeln:

$$\begin{aligned} \sigma_0'^2 &= \tau_1'^2 \qquad = 1 \\ \sigma_1'^2 &= \tau_2'^2 + \tau_1'^2 \\ &\vdots \\ \sigma'_{n-2}{}^2 &= \tau'_{n-1}{}^2 + \tau'_{n-2}{}^2 \\ \sigma'_{n-1}{}^2 &= \tau'_{n-1}{}^2 \end{aligned}$$

und in inverser Entwickelung:

$$\tau'_m{}^2 = \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^{m-k-1} \sigma'_k{}^2 \tag{44}$$

woraus zwischen allen Totalkrümmungen die Relation hervorgeht:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \sigma_k'^2 = 0 \tag{45}$$

Die Formel (42) stimmt mit der in der Theorie der dreifach gekrümmten Curven (Grun. Arch. LXV. p. 337 Gl. (9)) auf anderm Wege hergeleiteten überein. Dass sie für jede Dimensionszahl gilt, ist erst jetzt bewiesen.

§. 6. Reduction der Invarianten.

Die nn Invarianten $\varrho_{x,\lambda}$ reduciren sich zunächst wegen $\varrho_{x,\lambda} = \varrho_{\lambda,x}$ auf $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Ferner erhält man durch Differentiation der Gl. (7), wenn man der Kürze wegen

$$\varrho_{x,x} = \varrho_x$$

setzt:

$$\varrho_k^{(2h)} = (2h)_h \varrho_{k+h} + 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h-1} (2h)_\lambda \varrho_{k+\lambda,k+2h-\lambda} \tag{46}$$

$$\varrho_k^{(2h+1)} = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (2h+1)_\lambda \varrho_{k+\lambda,k+2h+1-\lambda} \tag{47}$$

Diese 2 Relationen reichen hin das in das Quadrat geordnete System (10) auf die n Werte der positiven Diagonale und deren Differentialquotienten linear zurückzuführen. Die erstere Formel enthält nur ϱ von gerader, die letztere von ungerader Indexsumme. Die Auflösung des erstern Gleichungssystems lautet:

$$\varrho_{k,k+2h} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (-1)^{h+\lambda} \frac{h}{h+\lambda} (h+\lambda)_{2\lambda}\, \varrho_{k+h-\lambda}^{(2\lambda)} \tag{48}$$

Zum Beweise setzen wir für den Differentialquotienten den **Wert** (46) ein, dann kommt:

$$\begin{aligned}
\varrho_{k,k+2h} &= \sum_{\lambda=0} (-1)^{h+\lambda} \frac{h}{h+\lambda} (h+\lambda)_{2\lambda} \Big\{ (2\lambda)_\lambda\, \varrho_{k+h} \\
&\qquad + 2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} (2\lambda)_\mu\, \varrho_{k+h-\lambda+\mu,\; k+h+\lambda-\mu} \Big\} \\
&= (-1)^h \varrho_{k+h} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (-h)_\lambda (h)_\lambda \\
&\qquad + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=h} (-1)^{h-\mu} \frac{h}{h+\mu} \varrho_{k+h-\mu,k+h+\mu} \sum_{\lambda=\mu}^{\lambda=h} (-h-\mu)_{\lambda-\mu} (h+\mu)_{\lambda+\mu}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
1 = (1+x)^{-h-\mu}(1+x)^{h+\mu} &= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=h+\mu} (-h-\mu)_\lambda (h+\mu)_\varkappa\, x^{\varkappa+\lambda} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\varkappa=\lambda}^{\varkappa=h+\mu+\lambda} (-h-\mu)_\lambda (h+\mu)_{\varkappa-\lambda}\, x^\varkappa \\
&= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} x^\varkappa \sum_{\lambda=0,\, \varkappa-h-\mu}^{\lambda=\varkappa} (-h-\mu)_\lambda (h+\mu)_{\varkappa-\lambda} \\
&= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} x^\varkappa \sum_{\lambda=\mu,\, \varkappa-h}^{\lambda=\varkappa+\mu} (-h-\mu)_{\lambda-\mu} (h+\mu)_{h-\varkappa+\lambda}
\end{aligned}$$

also der Coefficient von $x^{h-\mu}$

$$\sum_{\lambda=\mu}^{\lambda=h} (-h-\mu)_{\lambda-\mu} (h+\mu)_{\lambda+\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu < h) \\ 1 & (\mu = h) \end{cases} \tag{49}$$

insbesondere für $\mu = 0$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (-h)_\lambda (h)_\lambda = 0 \quad (h > 0)$$

Hiernach wird Gl. (48) identisch erfüllt.

Aus der Lösung von Gl. (46) ergibt sich leicht die von Gl. (47). Sei

$$\varrho_{k,k+2h+1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} b_\lambda\, \varrho_{k+h-\lambda}^{(2\lambda+1)}$$

woraus durch Differentiation:

$$\varrho_{k+1,k+2h+1} + \varrho_{k,k+2h+2} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} b_\lambda\, \varrho_{k+h-\lambda}^{(2\lambda+2)}$$

Führt man zur Linken die Werte aus Gl. (48) ein, so ergibt sich:

$$b_\lambda = (-1)^{h+\lambda} \frac{1}{2} \frac{2h+1}{2\lambda+1} (h+\lambda)_{2\lambda}$$

Demnach ist

$$\varrho_{k,k+2h+1} = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=h} (-1)^{h+\lambda} \frac{2h+1}{2\lambda+1} (h+\lambda)_{2\lambda}\, \varrho_{k+h-\lambda}{}^{(2\lambda+1)} \tag{50}$$

Ferner sind die folgenden Anfangswerte bekannt.

Tabelle für $\varrho_{\varkappa,\lambda}$

$\varkappa$ \ λ	0	1	2	3
0	1	0	−1	0
1	0	1	0	
2	−1	0		
3	0			

woraus:

$$K_1 = 1; \quad K_2 = 1 \tag{51}$$

Sind nun $\tau'_2, \tau'_3, \ldots \tau'_{m-1}$ gegeben, und man setzt

$$p_m = \tau_2' \tau'_3 \ldots \tau'_{m-1}$$

so wird nach Gl. (41)

$$p_m{}^2 = \frac{K_m}{K_{m-1}}$$

daher

$$K_m = (p_3 p_4 \ldots p_m)^2$$

oder direct

$$K_m = (\tau'_2{}^{m-2} \tau'_3{}^{m-3} \ldots \tau'_{m-1})^2 \tag{52}$$

Ferner lässt sich Gl. (10) schreiben:

$$K_m = K_{m-1}\, \varrho_{m-1} + Q_m \tag{53}$$

wo Q_m aus Elementen besteht, deren 2 Indices eine Summe $< 2m-2$ haben, die sich sämtlich nach Gl. (48) (50) auf

$$\varrho_0, \quad \varrho_1, \quad \ldots \quad \varrho_{m-2}$$

und deren Differentialquotienten reduciren lassen. Sind also alle K bis K_m und alle Elemente der Diagonale bis ϱ_{m-2} bekannt, so ergibt sich ϱ_{m-1} durch Gl. (53). Die vorausgesetzten ϱ aber erhält man successive durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} K_3 &= K_2 \varrho_2 \\ K_4 &= K_3 \varrho_3 + Q_4 \\ &\vdots \\ K_m &= K_{m-1} \varrho_{m-1} + Q_m \end{aligned}$$

Das Resultat lautet:

Durch die Krümmungsverhältnisse bis τ'_{m-1} sind alle Elemente der Determinante, welche K_m ausdrückt, bestimmt und lassen sich nach den Gl. (52) (53) (48) (50) daraus berechnen.

§. 7. Curven constanter Krümmungsverhältnisse und constanter Krümmungen.

Sind alle $n-2$ Krümmungsverhältnisse $\tau_2', \dots \tau'_{n-1}$ constant, so sind nach §. 7. auch alle ϱ, mithin alle Coefficienten A constant.

Sei nun die lineare $(n-1)$dehnung E_{n-1} fest, mithin die Curve nur $(n-2)$fach gekrümmt. Dann kann man deren Normale zu einer Coordinatenaxe nehmen, während die $n-1$ übrigen in E_{n-1} fallen. Diese Normale hat aber die Richtung des Strahles f_n; folglich sind alle Analogen von f_n bezüglich auf Axen innerhalb E_{n-1} null, und Gl. (9) ist nach Substitution von n für m homogen linear in

$$f, \quad \dots \quad f^{(n-1)}$$

Hier ist indes n die beliebige Dimensionszahl, die der ganzen Rechnung zugrunde liegt. Man kann dafür auch $n+1$ schreiben. Dann geht die Annahme, dass E_{n-1} fest sei, in die ursprüngliche Voraussetzung einer festen linearen $n$dehnung E_n über, und die Specialisirung ist keine mehr. Wir haben gemäss Gl. (9), worin $m=n+1$ zu setzen ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \dots & \varrho_{0,n-1} & f \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varrho_{n-1,0} & \dots & \varrho_{n-1,n-1} & f^{(n-1)} \\ \varrho_{n,0} & \dots & \varrho_{n,n-1} & f^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{54}$$

und da nach Gl. (48) (50) für constante ϱ

$$\varrho_{k,k+2h} = (-1)^h \varrho_{k+h}; \quad \varrho_{k,k+2h+1} = 0 \tag{55}$$

ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & 0 & \dots & f \\ 0 & \varrho_1 & 0 & -\varrho_2 & \dots & f' \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & 0 & \dots & f'' \\ 0 & -\varrho_2 & 0 & \varrho_3 & \dots & f''' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{56}$$

An dieser Gleichung bemerkt man, dass der Coefficient jedes $f^{(n-2k-1)}$ null ist. In jedem Terme der Entwickelung einer beliebigen Determinante $|\varrho_{x,\lambda}|$ ist nämlich die Summe der Indices $\Sigma x + \Sigma \lambda$ eine gerade Zahl. Tritt nun an die Stelle von $\varrho_{x,n}$ wie in

(54) $f^{(\varkappa)}$, so muss für ungerades $n-\varkappa$ auch mindestens ein Element jedes Terms der Unterdeterminante eine ungerade Indexsumme haben, d. i. nach Gl. (55) null sein, woraus das Gesagte folgt.

Hiernach wird Gl. (56) für gerade $n = 2\nu$:

$$\begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & \dots & 0 & f \\ 0 & \varrho_1 & 0 & \dots & (-1)^{\nu+1}\varrho_\nu & 0 \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & \dots & 0 & f'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^\nu\varrho_\nu & 0 & (-1)^{\nu+1}\varrho_{\nu+1} & \dots & 0 & f^{(2\nu)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (57)$$

für ungerade $n = 2\nu+1$:

$$\begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & \dots & (-1)^{\nu+1}\varrho_\nu & 0 \\ 0 & \varrho_1 & 0 & \dots & 0 & f' \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & \dots & (-1)^\nu\varrho_{\nu+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^\nu\varrho_{\nu+1} & 0 & \dots & 0 & f^{(2\nu+1)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (58)$$

Die vollständigen Integrale beider Gleichungen sind von der Form

$$f = \Sigma C e^{A\tau}$$

wo die C ganze Functionen von τ oder constant, die A constant und durch bekannte Gleichungen bestimmt sind.

Da nun f die Grenzen ± 1 nicht überschreiten kann, so können die A nur rein imaginär oder null und ungleich, die C nur constant sein. Sei $A = \pm i\alpha$; dann sind die α für gerade $n = 2\nu$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \varrho_1 & 0 & \dots & (-1)^{\nu+1}\varrho_\nu & 0 \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & \dots & 0 & -\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^\nu\varrho_\nu & 0 & (-1)^{\nu+1}\varrho_{\nu+1} & \dots & 0 & (-1)^\nu\alpha^{2\nu} \end{vmatrix} = 0 \qquad (59)$$

für ungerade $n = 2\nu+1$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\alpha \begin{vmatrix} \varrho_0 & 0 & -\varrho_1 & \dots & (-1)^\nu\varrho_\nu & 0 \\ 0 & \varrho_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & \dots & (-1)^{\nu+1}\varrho_{\nu+1} & 0 \\ 0 & -\varrho_2 & 0 & \dots & 0 & -\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^\nu\varrho_\nu & 0 & (-1)^{\nu+1}\varrho_{\nu+1} & \dots & 0 & (-1)^\nu\alpha^{2\nu} \\ 0 & (-1)^\nu\varrho_{\nu+1} & 0 & \dots & \varrho_{2\nu} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (60)$$

Die Integrationsconstanten C müssen der Gleichung

$$\Sigma f^2 = 1$$

entsprechen. Doch genügt es ein specielles System von nn Werten der C aufzustellen, da die allgemeine Lösung durch Coordinatentransformation daraus hervorgeht. In einfachster Form können wir setzen für $n = 2\nu$:

$$f = c_\lambda \cos(\alpha_\lambda \tau), \quad c_\lambda \sin(\alpha_\lambda \tau) \quad (\lambda = 1, \ldots \nu) \tag{61}$$

für $n = 2\nu + 1$:

$$f = c_0, \quad c_\lambda \cos(\alpha_\lambda \tau), \quad c_\lambda \sin(\alpha_\lambda \tau) \quad (\lambda = 1, \ldots \nu) \tag{62}$$

und die Bedingung

$$c_1^2 + \ldots c_\nu^2 = 1, \quad \text{resp.} \quad c_0^2 + \ldots c_\nu^2 = 1$$

durch beliebige Anordnung erfüllen.

Sollen nun sämtliche Krümmungen constant sein, so kommt bei unveränderter Bestimmung des begleitenden Axensystems nur noch die Gleichung hinzu:

$$s' = r = \text{const}$$

und man erhält die Coordinatenwerte bzhw. für gerade und ungerade n:

$$x = \frac{rc_\lambda}{\alpha_\lambda} \sin(\alpha_\lambda \tau), \quad -\frac{rc_\lambda}{\alpha_\lambda} \cos(\alpha_\lambda \tau) \tag{63}$$

$$x = rc_0 \tau, \quad \frac{rc_\lambda}{\alpha_\lambda} \sin(\alpha_\lambda \tau), \quad -\frac{rc_\lambda}{\alpha_\lambda} \cos(\alpha_\lambda \tau) \tag{64}$$

$$\lambda = 1 \quad \ldots \quad \nu$$

Eine Curve, deren erste m Krümmungen constant nicht null, deren übrige Krümmungen null sind, heisse Spirale $m$ter Ordnung.

Eine Spirale $m$ter Ordnung (für $m < n-1$) ist nur ein Specialfall einer Spirale $(n-1)$ter Ordnung, in den dieselbe übergeht, wenn man E_{m+1} fest annimmt, wobei $\tau'_{m+1}, \ldots \tau'_{n-1}$ verschwinden. Das Coordinatenaxensystem behält beliebige Stellung, doch lassen sich $m+1$ Axen in E_{m+1} legen und so die übrigen Coordinaten entbehrlich machen.

Eine Spirale jeder Ordnung ist, wie die Gleichung zeigt, sich selbst in allen Teilen congruent und lässt sich in sich selbst verschieben.

Eine Spirale $m$ter Ordnung, welche mit einer Curve s einen Punkt und in diesem alle begleitenden Axen und alle Krümmungen

bis zur $m$ten gemein hat, heisse $m$te Krümmungsspirale von s für jenen Punkt. Sie repräsentirt demnach die m ersten momentanen Krümmungen von s durch ihre constanten Krümmungen.

Die Aufgabe der Construction aller Krümmungsspiralen einer gegebenen Curve für jeden ihrer Punkte ist im Vorstehenden gelöst: man hat erst aus den Krümmungen der gegebenen Curve nach §. 6. die ϱ, aus diesen die α zu berechnen und diesen gemäss die Spirale zu bestimmen, endlich die Spirale in die erforderliche Lage zu bringen.

Die Bestimmung der α ergibt für die kleinsten Dimensionszahlen Folgendes.

Für $n = 2$ wird Gl. (63):

$$1 \cdot - \alpha^2 = 0$$

woraus als Spirale 1. Ordnung:

$$x = r\cos\tau, \qquad r\sin\tau$$

das ist ein Kreis.

Für $n = 3$ wird Gl. (64):

$$(\varrho_2 - 1)\,\alpha(\alpha^2 - \varrho_2) = 0$$

woraus als Spirale 2. Ordnung:

$$x = r\tau\cos\beta, \quad r\sin\beta\cos(\sqrt{\varrho_2}\,\tau), \quad r\sin\beta\sin(\sqrt{\varrho_2}\,\tau)$$

das ist eine Schraubenlinie.

Für $n = 4$ wird Gl. (63):

$$(\varrho_3 - \varrho_2^2)\{\varrho_2 - 1)\alpha^4 + (\varrho_2 - \varrho_3)\alpha^2 + \varrho_3 - \varrho_2^2\} = 0$$

Sind $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ die Wurzeln, so wird die Spirale 3. Ordnung:

$$x = \frac{r}{\alpha_1}\cos\beta\sin(\alpha_1\tau), \quad -\frac{r}{\alpha_1}\cos\beta\cos(\alpha_1\tau),$$

$$\frac{r}{\alpha_2}\sin\beta\sin(\alpha_2\tau), \quad -\frac{r}{\alpha_2}\sin\beta\cos(\alpha_2\tau)$$

Jede dieser Spiralen lässt sich auch als Krümmungsspirale einer beliebig mehrfach gekrümmten Curve verwenden.

XI.

Zur Theorie der Schliessungsprobleme.

Von

Emil Oekinghaus.

Die aus der Verbindung der elliptischen Integrale und Functionen hervorgehenden Schliessungstheoreme gewinnen ein um so höheres Interesse, als jeder zur Erforschung dieser eigenartigen Gebilde eingeschlagene Weg neue Gesichtspunkte eröffnet.

Der hier gewählte Weg nimmt seinen Ausgangspunkt von der auf das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Art sich beziehenden Relation von Lagrange, da ihre die Amplituden dieser Integrale enthaltenden Ausdrücke Producte von Wurzelwerten bestimmter Gleichungen darstellen, welche jene Relation in eine Kegelschnitts- oder höhere Gleichung transformiren. Die Ausführung dieses Grundgedankens führt auf manche bemerkenswerte Beziehungen namentlich confocaler Ellipsen, sowie auch zu einer neuen Methode der geometrischen Addition der elliptischen Integrale, welche vielleicht einige Aufmerksamkeit verdient. Da die Integrale der Pendelbewegung sich zwanglos in der Untersuchung verwenden liessen, so haben wir sie in den Kreis der Schliessungstheoreme hier aufgenommen.

I.

Ein Punkt in der Ebene einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ist, sei durch die Polarcoordinaten $R(\alpha)$ bestimmt. Wir ziehen die beiden Tangenten an die Curve und bezeichnen die Coordinaten der Berührungspunkte xy vermittelst Einführung der excentrischen Winkel φ allgemein durch

$$x = r\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi$$

Da nun

$$-\operatorname{tg}\tau = \frac{b^2x}{a^2y} = \frac{y - R\sin\alpha}{x - R\cos\alpha}$$

ist, so erhält man durch Einsetzen obiger Substitutionen aus letzter Formel die Beziehung

1) $$a\sin\alpha\cos\varphi + b\cos\alpha\sin\varphi = \frac{ab}{R}$$

also die Gleichung

2) $$b^2(R^2\cos\alpha^2 - a^2)\operatorname{tg}\varphi^2 + abR^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi + a^2(R^2\sin\alpha^2 - b^2) = 0$$

Da Ausdrücke wie $\sin\varphi_1\sin\varphi_2$, $\cos\varphi_1\cos\varphi_2$ später häufig zu berechnen sind, so bemerken wir hier, dass aus der Gleichung

$$a\operatorname{tg}\varphi^2 - b\operatorname{tg}\varphi + c = 0$$

die genannten Formen aus folgenden Relationen

$$\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \frac{a}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}$$

sich ergeben. Aus diesen oder auch den nachfolgenden Gleichungen

$$(a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2)\sin\varphi^2 - 2\frac{ab^2}{R}\cos\alpha\,.\,\sin\varphi + \frac{a^2b^2}{R^2} - a^2\sin\alpha^2 = 0$$

$$(a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2)\cos\varphi^2 - 2\frac{a^2b}{R}\sin\alpha\,.\,\cos\varphi + \frac{a^2b^2}{R^2} - b^2\cos\alpha^2 = 0$$

finden sich demnach leicht die Formeln

$$\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{\frac{a^2b^2}{R^2} - a^2\sin\alpha^2}{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2}$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 = \frac{\frac{a^2b^2}{R^2} - b^2\cos\alpha^2}{a^2\sin\alpha^2 + b^2\cos\alpha^2}$$

Das genannte Additionstheorem

$$\int\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} \pm \int\frac{d\varphi_2}{\Delta\varphi_2} = \int\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

basirt nun auf der Formel von Lagrange oder Euler:

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1\sin\varphi_2\varDelta(\sigma) = \cos\sigma$$

und der Zweck unserer Untersuchungen gründet sich auf die Substitution der obigen Formen von $\sin\varphi\cos\varphi$ etc. in diese Relation. Daraus geht eine Polargleichung für $R(\alpha)$ hervor, deren Curve die Eigenschaft besitzt, dass die von jedem ihrer Punkte an die Ellipse gezogenen Tangenten in ihren den Berührungspunkten entsprechenden excentrischen Winkeln der Fundamentalrelation genügen. Wir betrachten hierbei den Modulus k und die Amplitude σ als im allgemeinen constante Grössen.

Die Endgleichung ist nun

3) $a^2b^2 - b^2R^2\cos\alpha^2 + (a^2b^2 - a^2R^2\sin\alpha^2)\varDelta\sigma = (a^2R^2\sin\alpha^2 + b^2R^2\cos\alpha^2)\cos\sigma$

und stellt in der hier gewählten Form eine Ellipse dar, auf welche Curve wir uns im Folgen beschränken werden. Für die Hyperbel wäre einfach das Vorzeichen von $\varDelta\sigma$ umzukehren.

Ueber k^2 steht die Verfügung frei, demnach können wir

$$k^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

setzen, welcher Wert geometrisches Interesse hat.

Die Ellipsengleichung

4) $$\frac{X^2}{a^2\dfrac{1+\varDelta\sigma}{1+\cos\sigma}} + \frac{Y^2}{b^2\dfrac{1+\varDelta\sigma}{\varDelta\sigma+\cos\sigma}} = 1$$

welche wir abgekürzt

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

chreiben, hat nun die Eigenschaft

$$A^2 - B^2 = c^2$$

woraus folgt, dass beide Ellipsen confocal sind. Da sich aus dieser Eigenschaft manches Bemerkenswerte entwickeln lässt, so wollen wir bei diesem Specialfall von confocalen Ellipsen etwas verweilen.

Wir können die Amplitude σ auf folgende Weise bestimmen:

Man setze in der Gleichung $Y = b$, das entsprechende X findet man leicht durch folgende Formel ausgedrückt:

5) $$X = a\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma$$

Google

Wegen

$$\frac{B^2}{b^2} = \frac{1 + \varDelta\sigma}{\varDelta\sigma + \cos\sigma}$$

hat man auch

$$\frac{B^2 - b^2}{B^2} = \frac{1 - \cos\sigma}{1 + \varDelta\sigma}$$

und da

$$\frac{A^2}{a^2} = \frac{1 + \varDelta\sigma}{1 + \cos\sigma}$$

so folgt durch Multiplication der letzten Formeln

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{a^2}\,\frac{B^2 - b^2}{B^2}$$

d. i. wegen $A^2 - B^2 = c^2$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{a^2}\,\frac{A^2 - a^2}{A^2 - c^2}$$

$$\cos\sigma = \frac{2a^2A^2 - a^2c^2 - A^4}{A^4 - a^2c^2}$$

$$\varDelta\sigma = \frac{-2A^2c^2 + A^4 + a^2c^2}{A^4 - a^2c^2}$$

Aus den Axen zweier confocalen Ellipsen bestimmt sich demnach in vorstehender Art die Amplitude σ, welche vermittelst 5) leicht construirt werden kann. Beschreibt man nämlich um die 1. Ellipse den einschliessenden Kreis vom Radius a, so ergibt sich aus dem Dreieck Oax sofort die halbe Amplitude.

Bemerkt man ferner, dass für die Lage des oben gewählten Punktes XY d. i. Xb eine Amplitude φ verschwindet, so wird die zweite zu σ, welche man findet, wenn von dem genannten Punkte die zweite Tangente gezogen wird.

Da jede Tangente an die 1. Ellipse die umschliessende confocale 2mal schneidet, so können von den neuen Durchschnittspunkten wiederholt Tangenten gezogen werden. Wir wollen annehmen, dass das entstehende Polygon sich nach ein- oder mehrfachen Umläufen schliesst. Die analytischen Bedingungen für den ersten Fall sind nun bekanntlich an folgende Relationen geknüpft:

Für ein n Eck hat man, wenn man beachtet, dass der $(n+1)$te Berührungspunkt mit dem ersten zusammenfällt

$$F_{(2)} - F_{(1)} = F_{(\sigma)}$$
$$F_{(3)} - F_{(2)} = F_{(\sigma)}$$

6)

6)

$$F_{(4)} - F_{(3)} = F_{(\sigma)}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_{(n)} - F_{(n-1)} = F_{(\sigma)}$$

$$F_{(n+1)} - F_n = F_{(\sigma)}$$

$$\overline{F_{n+1} - F_{(1)} = nF_{(\sigma)}}$$

nnd da

$$F_{(n+1)} - F_{(1)} = 4K$$

so resultirt

$$n F_{(\sigma)} = 4K$$

worans

$$F_{(\sigma)} = \frac{4K}{n}$$

also

$$\operatorname{cn} \frac{4K}{n} = \frac{2a^2 A^2 - a^2 c^2 - A^4}{A^4 - a^2 c^2} \quad \text{folgt}$$

Um einige Anwendungen zn geben, wollen wir $n = 3$ setzen, nnd haben demnach die Bedingungsgleichung zu snchen, unter welcher das Tangentendreieck der 1. Ellipse zum Sehnendreieck der 2. confocalen wird.

Znnächst ist

$$F_{(\sigma)} = \tfrac{4}{3}K, \quad \sigma = \operatorname{am} \tfrac{4}{3}K$$

Setzt man nnn in der Definitionsgleichung

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn}(u+v) = \operatorname{cn}(u+v)$$

$$u = v = \tfrac{4}{3}K$$

$$\tfrac{8}{3}K = 4K - \tfrac{4}{3}K$$

so erhält man

$$\operatorname{cn} \tfrac{4}{3}K^2 - \operatorname{su} \tfrac{4}{3}K^2 \operatorname{dn} \tfrac{4}{3}K = \operatorname{cn} \tfrac{4}{3}K$$

Man kann die Werte von $\operatorname{cn} \sigma$, $\varDelta\sigma$ leicht berechnen, sie sind

$$\operatorname{cn} \tfrac{4}{3}K = \frac{2A^2 a^2 - A^4 - a^2 c^2}{A^4 - a^2 c^2}$$

$$\operatorname{dn} \tfrac{4}{3}K = \frac{-2A^2 c^2 + A^4 + a^2 c^2}{A^4 - a^2 c^2}$$

so dass durch diese Formeln die obige Gleichung übergeht in

$$A^8 - 4a^2 A^6 + 6a^2 c^2 A^4 - 4a^2 c^4 A^2 + a^4 c^4 = 0$$

nnd setzt man

$$\frac{A^2}{a^2} = z, \qquad \frac{c}{a} = k$$

so ergibt sich

$$z^4 - 4z^3 + 6k^2z^2 - 4k^2z^2z + k^4 = 0$$

Die Lösung der Aufgabe, zu einer gegebenen Ellipse, deren Excentricität durch $k = \frac{c}{a}$ bestimmt ist, eine zweite confocale zu finden, von der Eigenschaft, dass das dem ersten umbeschriebene Tangentendreieck zum Sehnendreieck der zweiten wird, hängt von der Auflösung einer biquadratischen Gleichung ab, deren eine Wurzel $z = \frac{A^2}{a^2}$ die grosse Achse der gesuchten Ellipse bestimmt. Zur Auflösung der obigen Gleichung bemerken wir, dass die quadratische Invariante gleich 0 ist. Der Wurzelwert ist demnach leicht zu berechnen. Uebrigens kann noch eine andere Gleichung eingeführt werden, wenn man die obige als dio Gleichung der Wurzelquadrate der neuen ansieht. Für $x = \frac{A}{a}$ folgt nämlich, wie leicht nachzuweisen ist,

$$x^4 - 2x^3 + 2k^2x - k^2 = 0$$

Setzt man

$$x = y + \tfrac{1}{2}$$

so folgt

$$y^4 - \tfrac{3}{2}y^2 - (1 - 2k^2)y - \tfrac{3}{16} = 0$$

Nimmt man $k^2 = \frac{1}{2}$ an, so wird sehr einfach

$$\frac{A}{a} = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{3}{4} + \sqrt{\tfrac{3}{4}}}$$

Wir benutzen für dcn vorliegenden Fall das Additionstheorem der elliptischen Integrale dcr 2. Art, um eine Relation abzuleiten. Wir haben der Reiho nach zunächst allgemein

$$
\begin{aligned}
E_{(2)} - E_{(1)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2, \\
E_{(3)} - E_{(2)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_2 \sin\varphi_3, \\
E_{(4)} - E_{(3)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_3 \sin\varphi_4, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E_{(n)} - E_{(n-1)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_n \\
E_{(n+1)} - E_{(n)} &= E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \sin\varphi_n \sin\varphi_{n+1} \\
\hline
E_{(n+1)} - E_{(1)} &= nE_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma \Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

und da

$$E_{(n+1)} - E_{(1)} = 4E$$

worin E das vollständige Integral nnd demnach $4E$ der Umfang der Ellipse für $a = 1$ ist, so folgt

9) $$4E = nE_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma\, \Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

Hieraus geht hervor, dass $\Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ eine constante Grösse ist.

Man hat also, da

$$\sin\varphi_{n+1} = \sin\varphi_1$$

10) $$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4 \ldots$$
$$\ldots \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_n + \sin\varphi_n \sin\varphi_1 = C$$

Diese Relation zwischen den Amplituden der Integrale besteht für alle Tangenten- nnd Sehnenvielecke zweier confocalen Ellipsen.

Für das Dreieck ist die Constante C leicht zn ermitteln, nämlich

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_1 = -\sin\sigma^2$$

demnach ist

$$4E = 3E^{(\sigma)} + k^2 \sin\sigma^3$$

Man hat bei diesen Bestimmnngen besonders anf die Vorzeichen der Functionen zu achten. Nimmt man $\sin\varphi_1$ negativ. so wird $\sin\varphi_2$ positiv, $\sin\varphi_3$ negativ.

Da $\sin\varphi = \frac{x}{a}$ ist, so kann die oben gefnndene Formel auch durch

$$\Sigma x_1 x_2 = C$$

dargestellt werden.

Wie vorhin für das Dreieck, so gelten für das 4, 6, n Eck die allgemeinen Formeln

$$\operatorname{cn}\frac{4K}{n} = \frac{-A^4 + 2A^2a^2 - a^2c^2}{A^4 - a^2c^2},$$

11) $$\operatorname{dn}\frac{4K}{n} = \frac{A^2 - 2A^2c^2 + a^2c^2}{A^4 - a^2c^2},$$

$$F_{(\sigma)} = \frac{4K}{n}, \quad \sigma = \operatorname{am}\frac{4K}{n}$$

Für das Viereck werden diese Gleichungen sehr einfach.

Die Bedingungsgleichung ist

$$A^4 - 2A^2a^2 + a^2c^2$$

woraus

$$A^2 = a(a+b).$$

Digitized by Google

Construirt man demnach zu einer Ellipse, deren Halbachsen a und b sind, eine zweite confocale, so lässt sich für den Fall, dass die grosse Halbachse der zweiten durch $A = \sqrt{a(a+b)}$ bestimmt ist, der äussern Ellipse ein Parallelogramm einzeichnen, welches der innern umgezeichnet ist.

Da $E_{(\sigma)} = E$ ist, so folgt

$$\Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = 0$$

Die Anwendung der Formeln auf das 8 Eck führt auf die Bestimmung von $\mathrm{dn}\,\frac{K}{2}$, welcher Ausdruck bekanntlich gleich $\sqrt{z'}$ ist. Die Bedingungsgleichung führt demnach auf die Relation

$$\left(\frac{A}{a}\right)^4 (1-\sqrt{k'}) - 2k^2\left(\frac{A}{a}\right)^2 + k^2(1+\sqrt{k'}) = 0$$

woraus

$$\left(\frac{A}{a}\right)^2 = (1+\sqrt{k'})\sqrt{1+k'}(\sqrt{1+k'}-\sqrt{k'})$$

Da $k = \frac{c}{a}$ ist, so folgt

$$k' = \frac{b}{a}$$

Die Relation 9) geht nun über in

$$4E = 8E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma\, \Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

Aus einer speciellen Lage des Achtecks folgt aber, dass

$$\Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = 4\sin\sigma$$

weshalb

$$E = 2E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma^2$$

Die analytischen Bedingungen für Tangenten- und Sehnensechsecke confocaler Ellipsen basiren auf den Formeln

12)
$$\mathrm{cn}\,\tfrac{2}{3}K = \frac{-A^4 + 2A^2a^2 - a^2c^2}{A^4 - a^2c^2},$$
$$\mathrm{dn}\,\tfrac{2}{3}K = \frac{A^4 - 2A^2c^2 + a^2c^2}{A^4 - a^2c^2}$$

Setzt man nun, um eine Relation zwischen den letzten Grössen zu finden, in der Formel 7)

$$u = v = \tfrac{2}{3}K, \quad \tfrac{4}{3}K = 2K - \tfrac{2}{3}K$$

so wird man erhalten

$$\operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K^2 - \operatorname{sn}\tfrac{2}{3}K^2 \operatorname{dn}\tfrac{2}{3}K = -\operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K$$

ans welcher nach einigen Entwickelnngen

$$\operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K - (1 - \operatorname{cn}\tfrac{2}{3}K)\operatorname{dn}\tfrac{2}{3}K = 0$$

hervorgeht.

Nach Substitution der Werte aus 12) erhält man also ans der letzten eine Bedingungsgleichung, die wir wie folgt schreiben

$$\left(\frac{A}{a}\right)^8 - \tfrac{4}{3}(1+k^2)\left(\frac{A}{v}\right)^6 + 2k^2\left(\frac{A}{a}\right)^4 - \frac{k^4}{3} = 0$$

Setzen wir

$$\left(\frac{A}{a}\right)^2 = z$$

so ist

$$z^4 - \tfrac{4}{3}(1+k^2)z^3 + 2k^2z^2 - \frac{k^4}{3} = 0$$

Wie beim Dreieck, so beruht auch beim Sechseck die Bestimmnng der Axenverhältnisse auf der Auflösung einer biquadratischen Gleichung.

Für die Ellipsenbogen besteht nach 9) die Relation

$$4E = 6E_{(\sigma)} - k^2 \sin^2\sigma\, \Sigma \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

Da aber, wie auch hier an einer speciellen Lage des Sechsecks deutlich wird, die Constante

$$C = 2\sin\sigma^2$$

ist, so hat mau

$$2E = 3E_{(\sigma)} - k^2 \sin\sigma^3$$

II.

In dem bisher Entwickelten hatten wir die Annahme gemacht, dass der Modulus $k = \frac{c}{a}$ sei. Im Fulgenden lassen wir diese Constante nnbestimmt, so dass die allgemeine Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2 \dfrac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}} + \frac{y^2}{b^2 \dfrac{1+\Delta\sigma}{\Delta\sigma+\cos\sigma}} = 1$$

für alle Fälle gilt. Beide Curven haben gleiche Achsenrichtnngen und gemeinsamen Mittelpnukt.

Demnach bestimmen sich die Achsen der 2. Ellipse ans

$$13)\qquad A^2 = a^2\,\frac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma},\quad B^2 = b^2\,\frac{1+\Delta\sigma}{\Delta\sigma+\cos\sigma}$$

Auch hier suchen wir die Abscissen X zu bestimmen, deren Ordinate $= b$ ist. Man findet

$$X = a\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma$$

Sind demnach 2 concentrische Ellipsen gleicher Achsenrichtungen gegeben, so ist damit auch die Amplitude σ der Relation

$$\int\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} - \int\frac{d\varphi_2}{\Delta\varphi_2} = \int\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

bekannt. Eliminirt man in 13) $\Delta\sigma$, so kommt schliesslich

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{a^2}\,\frac{B^2-b^2}{B^2}$$

woraus

$$\cos\sigma = \frac{a^2B^2 - A^2(B^2-b^2)}{a^2B^2+A^2(B^2-b^2)}$$

Ferner folgt aus

$$\frac{A^2}{a^2} = \frac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}$$

die Beziehung

$$2\,\frac{A^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 - 1 = \sqrt{1-k^2\sin\sigma^2}$$

woraus

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2(A^2-a^2)}{a^2(A^2-k^2a^2)}$$

Aus der Verbindung beider Formeln für $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\sigma^2$ resultirt eine Relation für k^2, nämlich

$$k^2 = \frac{a^2B^2-b^2A^2}{a^2(B^2-b^2)}$$

Da also k und $\cos\sigma$ durch die Achsen beider Ellipsen bestimmbar sind, so gewinnt man auch für

$$\Delta\sigma = \sqrt{1-k^2\sin\sigma^2}$$

die Formel

$$\Delta\sigma = \frac{A^2(B^2+b^2)-a^2B^2}{A^2(B^2-b^2)+a^2B^2}$$

Die Schliessungsprobleme für 2 Ellipsen, welche bei gleichen Achsenrichtungen denselben Mittelpunkt haben, sind demnach an folgende Formeln geknüpft:

Für ein n Eck, welches der äussern Ellipse ein-, der innern umgezeichnet ist, gelten, von welchem Punkte der einen oder andern man auch beginnen möge, die Relationen

$$F_{(\sigma)} = \frac{4K}{n} \quad \text{für} \quad 1 \text{ Umlauf,}$$

$$F_{(\sigma)} = 4\,\frac{Ku}{n} \quad \text{für} \quad u \text{ Umläufe.}$$

Im ersten Fall hat man also

$$\sigma = \text{am}\,\frac{4K}{n}$$

$$\text{cn}\,\frac{4K}{n} = \frac{a^2B^2 - A^2(B^2-b^2)}{a^2B^2 + A^2(B^2-b^2)},$$

14) $$\text{dn}\,\frac{4K}{n} = \frac{A^2(B^2+b^2) - a^2B^2}{A^2(B^2-b^2) + a^2b^2},$$

$$k^2 = \frac{a^2B^2 - b^2A^2}{a^2(B^2-b^2)}, \quad k'^2 = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{A^2-a^2}{B^2-b^2}$$

und analog für den 2. Fall.

Bei der Anwendung auf 3, 4, n Ecke hat man also die Beziehungen zu suchen, welche für verschiedene Werte von $\frac{4K}{n}$ oder $\frac{4K}{n}u$ in Form von Gleichungen bestehen. Vermittelst Substitution obiger Ausdrücke in diese Beziehungen gehen neue hervor, welche das Abhängigkeitsverhältniss der Achsen beider Ellipsen definiren.

Indem man dann den Modulus k oder a und b beliebig annimmt, gewinnt man manche interessante Ergebnisse, deren einige wir hier mitteilen.

Ist z. B. $k = 0$, so folgt aus der letzten Formel

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

Sobald also die Ellipsen ähnlich sind, gehen die elliptischen Functionen in Kreisfunctionen und damit

$$\text{cn}\,\frac{4K}{\pi} \quad \text{in} \quad \cos\frac{2\pi u}{n}$$

über. Daher ist hierfür

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{B^2-b^2}{b^2}$$

oder

$$\cos \tfrac{1}{2}\sigma = \frac{b}{B} = \frac{a}{A} = \cos \frac{\pi u}{n}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so schliesst sich bei ähnlichen in ihren Achsen gleichgerichteten concentrischen Ellipsen das Polygon wie auch der Anfangspunkt gewählt werden möge.

Hieraus geht hervor, dass die obige für Kreispolygone gültige Formel sich auch auf Ellipsen der oben definirten Art ausdehnen lässt. Die excentrischen Winkel stehen dann in folgender Beziehung zu einander.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3 \ldots = \sigma$$

woraus für die Curven einfache constructive Bestimmungen hervorgehen.

Für das Sechseck gilt nun im allgemeinen Fall

$$F(\sigma) = \tfrac{2}{3}K$$

weshalb wir jetzt die Formel

$$\frac{1}{\operatorname{cn} \frac{2}{3}K} - \frac{1}{\operatorname{dn} \frac{2}{3}K} = 1$$

anzuwenden haben. Substituiren wir die in 14) berechneten Ausdrücke in die letzte Formel, so resultirt die elegante Relation

$$\frac{1}{\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} - 1} + \frac{1}{\frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - 1} = \frac{1}{\frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} + 1}$$

als Bedingungsgleichung für die Achsen zweier gleichliegenden concentrischen Ellipsen, wenn jedes Sehnensechseck der äussern zum Tangentensechseck der innern wird.

Aus der letzten Relation folgt nun

$$\frac{A^2}{a^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{b^2}{B^2}} + 2}{\left(3 + \frac{b^2}{B^2}\right)\sqrt{1 - \frac{b^2}{B^2}}}$$

vermittest welcher für bestimmte Werte der kleinen Halbachsen b und B, die entsprechenden für die grossen Halbachsen berechnet werden können. Falls also $\frac{A}{a}$ constant bleibt, kann a nach Belieben gewählt werden. Es gibt also unendlich viele Ellipsen, welche den obigen Bedingungen genügen.

Digitized by Google

Sofern

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

ist, wird man für beide jetzt ähnliche Ellipsen die Formeln

$$A^2 = \tfrac{4}{3}a^2, \quad B^2 = \tfrac{4}{3}b^2$$

haben, welche für $a = b$ in bekannte Kreisrelationen übergehen.

Die Formeln für das Dreieck, also für $n = 3$ gehen aus der Substitution der Formeln 14) in 7) hervor. Die schliessliche Reduction der Gleichung führt auf

$$A^4(B^2-b^2)^2 - 2a^2A^2B^2(B^2+b^2) + a^4B^4 = 0$$

worin A, B und a, b die Halbachsen der beiden entsprechenden Ellipsen sind.

Aus dieser folgt die einfache Relation

$$\frac{a}{B} + \frac{b}{B} = 1$$

welche eine bemerkenswerte geometrische Construction zulässt.

Wie man sieht, stellt sie die Gleichung einer Geraden in rechtwinkeligen Coordinaten vor. Demnach hat man folgenden Satz:

Zieht man in einer festen Ellipse, deren Halbachsen A und B sind, eine die Scheitelpunkte XY verbindende Gerâde, so existiren für alle auf dieser Geraden

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} = 1$$

liegenden variabeln Punkte ab entsprechende Ellipsenschaaren, welchen die Eigenschaft zukommt, dass der festen Ellipse

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

Dreiecke einbeschrieben werden können, welche den mit den Halbachsen ab variabeln Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

umbeschrieben sind.

Die Amplitude des Integrals $\int \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma)}$ wird jetzt durch

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{2}\frac{a}{A}}$$

ausgedrückt.

Digitized by Google

Für das Viereck wird, um wieder zu den allgemeinen Formeln zurückzukehren

$$\sigma = \operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = 1,$$

$$k^2 = -\frac{A^4}{a^4} + \frac{2A^2}{a^2}$$

woraus

$$\frac{A^2}{a^2} = 1 + k'$$

oder

$$\frac{a}{A} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}$$

Vermittelst eines die äussere Ellipse einschliessenden Kreises ist $\frac{a}{A}$ durch den excentrischen Winkel ψ, also durch

$$\frac{a}{A} = \sin\psi$$

bestimmt, und da

$$\frac{1}{\sqrt{1+k'}} = \operatorname{sn}\frac{K}{2}$$

ist, so folgt

$$\psi = \operatorname{am}\frac{K}{2}$$

Da $\sigma = 90^0$ ist, so sind die Radien nach den Berührungspunkten der tangirenden Sehnenvierecke einander conjugirt.

Für das Achteck ist die Bedingungsgleichung

$$\frac{b}{B}\sqrt{\frac{1-\frac{a^2}{A^2}}{1-\frac{b^2}{B^2}}} = \frac{a}{A}\left(\frac{\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}-1}{\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}+1}\right)^2$$

Setzt man

$$\frac{a^2}{A^2} = n, \qquad \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} + 1 = y$$

so ergibt die Entwickelung für y eine Gleichung 5. Grades.

Um die Verhältnisse für ein Zehneck darzustellen, erinnern wir an die bekannte Relation (Durège S. 185)

$$\operatorname{cn}\tfrac{2}{5}K = \operatorname{cn}\tfrac{2}{5}K\sqrt{\frac{\operatorname{dn}\frac{2}{5}K-\operatorname{cn}\frac{2}{5}K}{1+\operatorname{dn}\frac{2}{5}K}}$$

$$+\operatorname{sn}\tfrac{2}{5}K\operatorname{dn}\tfrac{2}{5}K\sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}\frac{2}{5}K}{1+\operatorname{dn}\frac{2}{5}K}}$$

Gemäss der Formeln 14) ist nun

$$\operatorname{cn}\tfrac{2}{5}K = \frac{a^2B^2-A^2(B^2-b^2)}{a^2B^2+A^2(B^2-b^2)}$$

$$\operatorname{dn}\tfrac{2}{5}K = \frac{A^2(B^2+b^2)-a^2B^2}{A^2(B^2-b^2)+a^2B^2}$$

Führt man dieso Ansdrücke in obige Formel ein, so resnltirt

$$\frac{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{B^2}}} = \frac{2\frac{a^2}{A^2}\left(-\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}+1\right)}{\left(\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}+1\right)}$$

welche Relation ebenfalls anf eine biquadratische Gleichung führt.

Wäre

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

so würde folgen

$$16\frac{a^4}{A^4}-20\frac{a^2}{A^2}+5 = 0$$

wie es sein mnss.

Die allgemeinen Formeln geben noch zn einer interessanten Betrachtnng Veranlassung. Sie enthalten nämlich eine eigentümliche Methode der geometrischen Constrnction des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Art, nnd zwar wird dieselbe dnrch Kreis und Ellipse vermittelt. Denn setzen wir in

$$\int\frac{d\varphi_2}{\Delta\varphi_2} = \int\frac{d\sigma}{\Delta\sigma} - \int\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}$$

die Amplituden σ und φ_1 nnd den Modulus k als gegeben, φ_2 als gesncht vorans, so hat man zunächst in den ans 14) hervorgehenden Formeln, wenn $a = b$ gesetzt wird:

$$k'^2 = \frac{A^2-a^2}{B^2-a^2}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{A^2}{B^2}\,\frac{B^2-a^2}{a^2}$$

B^2 zueliminiren. Für $\frac{A^2}{a^2} = y$ kommt dann

$$y^2 - y(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2) + k^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = 0$$

woraus demnach 2 Werte für $\frac{A^2}{B^2}$ hervorgehen, welche beide wir berücksichtigen werden. Für das obere Zeichen geht nach einigen Umformungen des Wurzelausdrucks die Beziehung

$$\frac{A}{a}=\frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}+\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma}$$

und für das untere die Excentricität

$$\frac{C}{B}=\frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}-\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma}=\varepsilon$$

hervor.

Der Radius a des Kreises kann willkürlich gewählt werden, die erste Formel lässt demnach A leicht finden, daher ist auch B nach einer der obigen Formeln bekannt. Wird nun die Ellipse mit den Halbachsen AB construirt, so kann für jede Amplitude φ_1 die der obigen Relation entsprechende Amplitude φ_2 bestimmt werden. Wir ziehen nämlich an den Kreispunkt K, welcher der Amplitude φ_1 entspricht, eine Tangente $K_1 E$ bis zur Ellipse, und von E aus eine zweite EK_2 an den Kreis, der Berührungspunkt ergibt im zugehörigen Winkel φ_2 die gesuchte Amplitude.

Die Construction ändert sich nicht wesentlich, wenn man die innere Ellipse unverändert, dagegen die äussere in einen Kreis übergehen lässt. Unter diesen Umständen wird also $A=B$, und die jetzt gültigen Relationen für das Additionstheorem sind

$$k^2=\frac{c^2}{a^2}\frac{A^2}{A^2-b^2}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2=\frac{A^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}$$

Eliminirt man hierin $\frac{A^2}{a^2}$ und setzt

$$\frac{c^2}{a^2}=y$$

so resultirt schliesslich

$$y^2-y(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2)+k^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2=0$$

woraus, wie vorhin

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}-\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma}=\varepsilon$$

$$\frac{A}{a}=\frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}-\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma}$$

folgt.

Bei bestimmten a folgt aus der ersten Formel die Excentricität der gesuchten Ellipse, und aus der zweiten ergibt sich der Kreisradius. Die Amplituden der Integrale werden dann wie vorhin gefunden, wenn die excentrischen Winkel auf bekannte Art eingetragen worden sind.

Die beiden Ellipsen haben, wie man sieht, die gleiche Excentricität, so dass die entwickelten Constructionen in einer gewissen Dualität zu einander stehen.

Man kann endlich auch die Formeln in ihrer Allgemeinheit beibehalten, wodurch beide Curven Ellipsen bleiben. Legt man der ersten bestimmte Achsen a und b bei, so ergibt sich wie früher aus der allgemeinen Gleichung

$$y^2 - y(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2) + k^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2 = 0$$

der Wurzelwert

$$\frac{A}{a} = \frac{\sqrt{1+k\sin\sigma}+\sqrt{1-k\sin\sigma}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma}$$

oder auch

$$\frac{A^2}{a^2} = 1 + \frac{\sqrt{1-k^2\cos\sigma^2}}{2\cos\frac{1}{2}\sigma^2}$$

und ferner ist

$$\frac{B^2}{b^2} = \frac{1+\sqrt{1-k^2\sin\sigma^2}}{\cos\sigma+\sqrt{1-k^2\sin\sigma^2}}$$

wie auch aus der Ellipsengleichung ohne Rechnung hervorgeht.

Aus diesen Relationen finden sich die Achsen der umschliessenden Ellipse, wodurch die Construction der Amplituden in vorhin angegebenem Sinne durchgeführt werden kann.

Die zuerst angegebene Methode ist die einfachere, da die Amplituden sofort in den Kreis eingetragen werden können. Durch goniometrische Zusammenziehung der Formeln kann die Construction der Achsen A, B ebenfalls erleichtert werden. Die bekannte Jacobi'sche Construction des Additionstheoremes findet in dem Vorstehenden ihr Analogon auf Ellipsen und Hyperbeln, je nachdem man das eine oder andere Zeichen von $\pm\Delta(\sigma)$ berücksichtigt. Sollen die Kegelschnitte confocal sein, so ist im ersten Falle die Excentricität der Ellipse durch den Modulus $k = \frac{c}{a}$, $k' = \frac{b}{a}$ bedingt, und da alsdann $A^2 - B^2 = c^2$ sein muss, so wird die Construction von B leicht, wenn A gefunden ist.

III.

Die folgenden Untersnchungen gehen von der transformirten Gleichung

$$a \sin\alpha \cos\varphi + b \cos\alpha \sin\varphi = \frac{ab}{R}$$

welche wir Anfangs aufgestellt haben, aus, um

$$\sin\varphi = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi^2}{2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi^2}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi^2}{2}}$$

darin zu substituiren.

Das Resultat ist die Gleichung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2(b + R\sin\alpha) - 2\frac{Rb}{a}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi + b - R\sin\alpha = 0$$

Wir beziehen dieselbe anch jetzt wieder anf die Gleichnng

$$\cos\frac{\varphi_1}{2} \mp \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi^2}{2}\varDelta\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \cos\frac{\sigma}{2}$$

$$\int\frac{d\,\frac{\varphi_1}{2}}{\varDelta\,\frac{\varphi_1}{2}} \pm \int\frac{d\,\frac{\varphi_2}{2}}{\varDelta\,\frac{\varphi_2}{2}} = \int\frac{d\frac{1}{2}\sigma}{\varDelta\frac{1}{2}\sigma}$$

indem wir die Entwickelnngen aus I. benntzen.

Znnächst hat man

$$b + y + (b - y)\varDelta\sigma = \frac{2}{a}\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}\,\cos\tfrac{1}{2}\sigma$$

woraus

$$x^2 . \frac{4b^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 + y^2(4\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 - (1 - \varDelta\tfrac{1}{2}\sigma)^2) - 2bk^2\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 . y = b^2\left(1 + \varDelta\frac{\sigma}{2}\right)^2$$

Demnach gilt anch im gegenwärtigen Falle, worin anstatt φ die halbe Amplitnde vorkommt, die Gleichnng eines Kegelschnitts, welcher indessen mit der 1. Ellipse nicht mehr concentrisch ist. Indem man also von einem beliebigen Punkte desselben 2 Tangenten an die nmschlossene Ellipse zieht, geben die hierdnrch bekannten excentrischen Winkel φ_1 nnd φ_2 diejenigen Amplitnden $\frac{1}{2}\varphi_1$ und $\frac{1}{2}\varphi_2$ an, welche der obigen Additionsgleichnng genügen, sofern folgende Bedingungen erfüllt sind.

Die Gleichung des genannten Kegelschnitts ist:

$$\frac{\dfrac{x^2}{a^2(1+\varDelta\frac{1}{2}\sigma)}}{4\cos\frac{1}{2}\sigma^2-(1-\varDelta\frac{1}{2}\sigma)^2} + \frac{\left(y-\dfrac{bk^2\,\mathrm{siu}\,\frac{\sigma^2}{2}}{4\cos\frac{\sigma^2}{2}-\left(1-\varDelta\frac{\sigma}{2}\right)^2}\right)^2}{\dfrac{4b^2\left(1-\varDelta\frac{\sigma}{2}\right)^2\cos\frac{\sigma^2}{2}}{\left(4\cos\frac{\sigma}{2}^2-\left(1-\Delta\frac{\varrho}{2}\right)^2\right)^2}} = 1$$

oder abgekürzt

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{(y-m)^2}{B^2}=1$$

Wir führen ein

$$C^2=B^2-A^2$$

demnach hat man

$$C^2=(1+\varDelta)^2\,\frac{4\,c^2\cos\frac{\sigma^2}{2}-a^2(1-\varDelta)^2}{\left(4\cos\frac{\sigma^2}{2}-(1-\varDelta)^2\right)^2}$$

$$\frac{A^2}{B^2}=\frac{a^2}{4b^2}\,\frac{4\cos\frac{1}{2}\sigma^2-(1-\varDelta)^2}{\cos\frac{1}{2}\sigma^2}$$

woraus

$$\frac{(1-\varDelta)^2}{\cos\frac{1}{2}\sigma^2}=\frac{4(a^2B^2-b^2A^2)}{a^2B^2}.$$

Da nun aus

$$A^2=\frac{a^2(1+\varDelta)^2}{4\cos\frac{1}{2}\sigma^2-(1-\varDelta)^2}$$

folgt

$$\frac{(1+\varDelta)^2}{\cos\frac{1}{2}\sigma^2}=\frac{4b^2}{B^2}\cdot\frac{A^4}{a^4}$$

so resultirt aus den letzten Formeln

$$\left(\frac{1-\varDelta}{1+\varDelta}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\,\frac{(a^2B^2-b^2A^2)}{A^4}$$

$$\varDelta=\frac{A^2b-a\sqrt{a^2B^2-b^2A^2}}{A^2b+a\sqrt{a^2B^2-b^2A^2}}$$

Daher ergibt sich aus

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma=\tfrac{1}{2}\,\frac{B}{b}\cdot\frac{a^2}{A^2}(1+\varDelta$$

unter Einführung des Wertes von $\varDelta$

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{a^2B}{A^2b+a\sqrt{a^2B^2-b^2A^2}}$$

Wird endlich noch

$$\frac{2bA^2}{Ba^2}\cos\tfrac{1}{2}\sigma - 1 = \Delta$$

quadrirt und $\cos\sigma$ der obigen Formel darin substitnirt, so resultirt

$$k^2 = \frac{4abA^2\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2}^2}{(A^2b + a\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2})^2 - a^4B^2}$$

oder auch

$$k^2 = \frac{4ab\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2}}{A^2b^2 + 2ab\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2} - a^2b^2}.$$

Bei Benntznng der bisherigen Formeln folgt für m endlich noch

$$m = \frac{\sqrt{a^2B^2 - b^2A^2}}{a},$$

wodnrch alles gegeben ist.

Wir wollen die sich hier darbietende Gelegenheit benntzen, die obigen Integrale mit den aus der Pendelbewegung in Verbindung zn bringen. Demnach sind in dem Zeitintegral

$$t = m\int\frac{d\tfrac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2a}{h}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}}$$

die Constanten nnd Amplitnden den obigen gleich zn setzen.

Wie bekannt, ist a der Kreisradius, oder die Pendellänge und h die vom tiefsten Punkte an genommene Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, welche grösser, gleich und kleiner als $2a$ sein kann. Also folgt durch Gleichsetzen der beiden Moduli unter der Voraussetznng, dass $a = b$:

$$\frac{2a}{h} = \frac{4aC}{A^2 + 2aC - a^2}$$

woraus

$$h = \frac{B^2 - (C-a)^2}{2C}$$

Ferner ist

$$\cos\frac{\sigma}{2} = \frac{aB}{A^2 + aC}$$

Die Relation

$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\varphi_1}{\Delta\tfrac{1}{2}\varphi_1} + \int\frac{d\tfrac{1}{2}\varphi_2}{\Delta\tfrac{1}{2}\varphi_2} = \int\frac{d\tfrac{1}{2}\sigma}{\Delta\tfrac{1}{2}\sigma}$$

geht nnn in

$$t_1 + t_2 = t$$

Digitized by Google

über, wonach die Tangenten von jedem Punkte der den Kreis umschliessenden oder schneidenden Ellipse auf dem Kreise Bogen gleicher Zeitdauer begrenzen.

Wählt man die Geschwindigkeitshöhe vom Kreismittelpunkt an, setzt demnach

$$H = h - a,$$

so wird die obige Bedindungsgleichung einfacher

$$H = \frac{A^2 - a^2}{2C}$$

welche H auf's einfachste constructiv bestimmt.

Wir fassen das Entwickelte, wie folgt, zusammen:

Man zeichne eine Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

und zwar so, dass B grösser als A sei; um den obern Brennpunkt C, welcher also in der B-Achse liegt, construire man einen kleinen Kreis vom Radius a.

In diesem Kreise lassen wir einen schweren Punkt oscilliren und bestimmen seine Geschwindigkeitshöhe nach der Formel

$$H = \frac{A^2 - a^2}{2C}$$

Auf der Ordinate des Brennpunktes lässt sich eine Strecke

$$FG = \sqrt{A^2 - a^2}$$

ohne weiteres auftragen, verbindet man nun G mit dem zweiten Brennpunkt F', und zieht die auf GF' senkrecht stehende GH bis zum Durchschnitt mit der verticalen B-Achse, so ist FH die Geschwindigkeitshöhe des schweren Punktes im Kreis, und die Ellipse hat die schon genannte Eigenschaft, dass die von jedem ihrer Punkte an den Kreis gezogenen beiden Tangenten Bogen des Kreises einschliessen, welche der schwere Punkt stets in derselben Zeit durchläuft.

In Bezug auf Oscillationen können wir anstatt der Geschwindigkeitshöhe auch den Winkel α einführen, der dem Kreispunkt entspricht, wo die Bewegung von der Ruhe aus beginnt. Diesen Winkel können wir mit σ durch die Gleichung $\alpha = \sigma$ in Beziehung bringen, Man bemerke, dass, wenn eine der obigen Tangenten horizontal-also senkrecht zur B-Achse ist, die andere den Winkel σ bestimmt.

Digitized by Google

Man findet leicht

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{B^2-(C-a)^2}{4aC}$$

oder

$$\frac{A^2}{a^2}+\frac{2C}{a}\cos\alpha = 1$$

und ferner ist

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{B}{a}}{\frac{A^2}{a^2}+\frac{C}{a}}$$

Die Elimination von a ergibt aus der entsprechenden Gleichung eine Wurzel

$$a = \frac{A^2}{C}$$

demnach ist

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{B}{2C}$$

Bei diesem Fall der Bewegung schneidet die Ellipse den Kreis, und das Kriterium der Oscillationen basirt auf der Ungleichung

$$a > B-C$$

während bei vollen Umläufen

$$a < B-C$$

ist. Der Kreis liegt dann ganz im Innern der Ellipse. Wenn aber

$$a = B-C$$

ist, so berühren sie sich von innen und die entsprechende Bewegung geht in die asymtotische über, wonach der schwere Punkt den oberen Kreispunkt erst nach unendlicher Zeit erreicht.

Um nun auch für die Parabel die entsprechenden Verhältnisse aufzustellen, erinnern wir daran, dass der Parameter p der Ellipse durch

$$p = \frac{A^2}{B}$$

ausgedrückt wird, daher geht die Formel

$$H = \frac{A^2-a^2}{2C}$$

in $H = q$ über.

Digitized by Google

Will man die directen Formeln benutzen, so ist zu setzen (siehe oben)

$$\frac{q}{a} = \frac{2-k^2}{k^2}, \quad k^2 = \frac{2a}{h}$$

also ist

$$h = a + q \quad \text{oder} \quad H = q$$

woraus folgt, dass bei der Parabel die Geschwindigkeitshöhe stets den Scheitelpunkt der Parabel zur obern Grenze hat.

Wie bei der Ellipse, so schliessen auch bei der Parabel die von ihr an den Kreis gezogenen Tangenten Bogen gleicher Zeitdauer ein.

Es braucht wol kaum der Bemerkung, dass das Vorstehende auch auf die Hyperbel Anwendung findet. Setzt man die B-Achse vertical voraus, und zeichnet um den untern Brennpunkt den Kreis, so geht aus der Formel

$$h = \frac{(C+a)^2 - B^2}{2C}$$

die Bemerkung hervor, dass für

$$a \gtreqless C - B$$

wonach der Kreis den untern Zweig der Hyperbel entweder schneidet oder ihn berührt, oder nicht berührt, die Bewegungen entsprechend oscillatorisch, oder asymptotisch, oder circulär wird.

Nehmen wir an, dass der Kegelschnitt den Kreis ohne Berührung einschliesst, und ziehen von einem Punkte A des erstern eine Tangente APB an den letztern bis zum Durchschnitt B des Kegelschnitts, von B wiederum eine Tangente $BP'C$ an den Kreis, vom Schnittpunkt C von neuem eine dritte Tangente und so fort und bezeichnen die Berührungspunkte t mit $PP_1P_2 \ldots P_n$, so wird, wenn bei dieser Tangentenziehung die Punkte PP_1P_2 in bestimmten regelmässigen Zeitintervallen auf einander folgen, der hiermit gleichsinnig im Kreise sich bewegende schwere Punkt der Reihe nach mit diesen Berührungspunkten zusammenfallen. Letztere schreiten also mit dem schweren Punkte gleichförmig fort.

In bestimmten Fällen, die wir gleich noch in Kürze darlegen wollen, kann P_n mit P zusammenfallen, was nach einmaligem oder mehrmaligem Umlauf geschehen kann. Die Tangentenfolge schliesst sich demnach zu einem Polygon, dessen Existenz an bestimmte aus den Constanten der Kegelschnittsgleichung abzuleitende Bedingungen geknüpft ist.

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass sie, wie schon gezeigt, alle **Fälle**, also Ellipse, Parabel und Hyperbel umfasst, da der Coefficient $4\cos\frac{1}{2}\sigma^2-(1-\varDelta\frac{1}{2}\sigma)^2$ entweder kleiner, gleich oder grösser als **Null** sein kann. Eine grössere Einfachheit erzielt man in den **Formeln**, wenn $a=b$ oder $A=B$ angenommen wird. Da

$$\tfrac{1}{2}\sigma = \operatorname{am}\frac{2}{n}K$$

so ist **für** das Dreieck, also $n=3$, die Bedingung

$$A^4b^2-a^2(a^2B^2-b^2A^2)=2a^2bA^2B$$

zu **erfüllen**.

Soll das Polygon ein Viereck sein, so hat man die einfache **Relation**

$$\operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sqrt{k'}$$

zu **benutzen**, und setzt man noch $a=b$, so ist

$$\operatorname{dn}\frac{K}{2}=\frac{A^2-aC}{A^2+aC}=\sqrt{k'}$$

$$k^2=\frac{4aC}{A^2+2aC-a^2}$$

Die Bedingung wird also

$$\left(\frac{A^2-aC}{A^2+aC}\right)^4+\frac{4aC}{A^2+2aC-a^2}=1$$

Die übrigen Fälle werden formell etwas complicirter.

Für die Hyperbel hat man $-A^2$ statt A^2 zu setzen und zu **beachten**, dass je nach der Lage des Vieleks der eine oder auch beide **Aeste** der Curve zur Verwendung kommen.

Wie man sieht, geht die Gleichung für

$$4\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2=(1-\varDelta\tfrac{1}{2}\sigma)^2$$

in die einer Parabel über:

$$\frac{4b^2}{a^2}\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2.x^2=2bk^2\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2.y+b^2(1+\varDelta\tfrac{1}{2}\sigma)^2$$

Aus der Bedingungsgleichung folgt, dass die Amplitude σ vom **Modulus** k abhängt, denn es ergibt sich

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{k^2}{4-k^2},\quad \sin\tfrac{1}{2}\sigma^2=\frac{8(2-k^2)}{(4-k^2)^2},\quad \varDelta\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{4-3k^2}{4-k^2}$$

Die Parabelgleichnng wird also znr folgenden

$$x^2 = \frac{4a^2}{b} \cdot \frac{2-k^2}{k^2}\left(y + \frac{2-k^2}{k^2} \cdot b\right)$$

Bezeichnen wir den Parameter mit $p = 2q$, so ist, wenn

$$m = \frac{2-k^2}{k^2} b$$

$$q = \frac{a^2}{b} \; \frac{2-k^2}{k^2}$$

die Gleichung auch

$$x^2 = 4q(y+m)$$

wo

$$\frac{m}{q} = \frac{b^2}{a^2}$$

Für den Kreis ist sehr einfach

$$x^2 = 4q(y+q)$$

demnach fällt das Kreiscentrnm in den Brennpnnkt der Parabel.

Für das Dreieck erhält man nach der Formel

$$\frac{1}{\operatorname{cn} \frac{2}{3} K} - \frac{1}{\operatorname{dn} \frac{2}{3} K} = 1$$

$$\frac{1}{4-k^2} + \frac{1}{4-3k^2} = 1$$

worans

$$k^2 = \frac{12 - 4\sqrt{2}}{7}$$

Die Anwendung der allgemeinen Formeln anf 4, 5 nnd n Ecke, welche der einen Cnrve ein-, der andern umgezeichnet sind, hat nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeiten mehr, weshalb wir anf weitere Erörterungen dieser Verhältnisse nicht weiter hier eingehen. Dagegen bemerken wir im Anschlnss an früheres noch folgendes:

Führt man in

$$a \operatorname{tg} \varphi^2 + b \operatorname{tg} \varphi + c = 0$$

die Relation

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi^2}$$

ein, so folgt

$$((a+c)^2 - b^2) \operatorname{tg} 2\varphi^2 + 2b(a-c) \operatorname{tg} 2\varphi + 4ac = 0$$

Aehnlich wie im Vorigen die halbe Amplitude gewählt werden konnte, so steht jetzt die doppelte zur Verfügung, so dass die Fundamentalrelation nun in die folgende

$$((a+c)^2-b^2)+4\,ac\,\varDelta\sigma = ((a-c)^2+b^2)\cos\sigma$$

transformirt wird. Indem wir nun die Constanten der genannten Gleichung hier einführen und die Bedingungsgleichung für das Additionstheorem gehörig ordnen, resultirt eine Curve 4. Grades

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{2(\varDelta\sigma-\cos\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sin\frac{1}{2}\sigma^2}\,\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{y^4}{b^4}-\frac{2(1+\varDelta\sigma)}{\sin\frac{1}{2}\sigma^2}\,\frac{x^2}{a^2}-\frac{2(1+\varDelta\sigma)}{\sin\frac{1}{2}\sigma^2}\,\frac{y^2}{b^2}$$
$$+\frac{2(1+\varDelta\sigma)}{\sin\frac{1}{2}\sigma^2}=0$$

welche die Eigenschaft besitzt, dass die von jedem ihrer Punkte an die Ellipse gezogenen Tangenten in ihren den Berührungspunkten entsprechenden concentrischen Winkeln $\varphi_1\,\varphi_2$ der Relation

$$\int\frac{d\,2\varphi_1}{\varDelta(2\varphi_1)}+\int\frac{d\,2\varphi_2}{\varDelta(2\varphi_2)}=\int\frac{d\sigma}{\varDelta\sigma}$$

genügen.

IV.

Um noch einige analoge Verhältnisse zu discutiren, verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Brennpunkt des Kegelschnitts, bezeichnen die Polarcoordinaten des Punktes, von welchem Tangenten zur Curve gezogen werden, mit $R(\alpha)$ und die bezüglichen Polarwinkel der Berührungspunkte mit Θ und Θ', dieselben bestimmen sich aus der folgenden Gleichung

$$\left(\left(\frac{p}{R}+c\,\cos\alpha\right)^2-\sin\alpha^2\right)\operatorname{tg}\Theta^2-\sin 2\alpha.\operatorname{tg}\Theta$$
$$+\left(\frac{p}{R}+e\cos\alpha\right)^2-\cos\alpha^2=0$$

darin bedeuten p und c bezüglich Parameter und numerische Excentricität.

Wie früher verbinden wir die als Amplituden aufgefassten Wurzeln Θ mit der Relation

$$\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2}}\pm\int\frac{d\Theta_1}{\sqrt{1-k^2\sin\Theta^2}}=\int\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin\sigma^2}}$$

und führen in der damit verknüpften Fundamentalrelation

$$\cos\Theta\cos\Theta' \mp \sin\Theta\sin\Theta'\Delta(\sigma) = \cos\sigma$$

die aus der ersten Gleichung sich ergebenden Werte von $\cos\Theta\cos\Theta'$ etc. ein, man findet

$$\left(\frac{p}{R}+e\cos\alpha\right)^2 - \sin\alpha^2 - \left(\left(\frac{p}{R}+e\cos\alpha\right)^2 - \cos\alpha^2\right)\Delta\sigma = \cos\sigma$$

Wir setzen

$$R\cos\alpha = x,\quad R\sin\alpha = y$$

wodurch man erhält

$$x^2(e^2(1+\Delta\sigma)+\Delta\sigma+\cos\sigma)-y^2(1+\cos\sigma)+2pe(1+\Delta\sigma)x+p^2(1+\Delta\sigma)=0$$

Für die Hyperbel besteht die Formel

$$x^2\left(\frac{\Delta\sigma-\cos\sigma}{1-\Delta\sigma}+e^2\right)-y^2\frac{1+\cos\sigma}{1-\Delta\sigma}+2pex+p^2=0$$

für die Ellipse

$$x^2\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)+y^2\frac{1+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-2pex-p^2=0$$

Letzte Gleichung schreiben wir

$$\left(x-\frac{pe}{\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{\frac{1+\Delta\sigma}{1+\cos\sigma}\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)} = \frac{p^2}{\frac{1+\Delta\sigma}{\Delta\sigma+\cos\sigma}\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)^2}$$

die definitive Form der Gleichung

$$\frac{\left(x-\frac{pe}{\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2}\right)^2}{\frac{p^2(\Delta\sigma+\cos\sigma)}{(1+\Delta\sigma)\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)^2}}+\frac{y^2}{\frac{p^2(\Delta\sigma+\cos\sigma)}{(1+\cos\sigma)\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma}-e^2\right)}}=1$$

Schreiben wir dieselbe

$$\frac{(x-m)^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

so erhalten wir wie früher einen Kegelschnitt als geometrischen Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangenten, deren Polarwinkel der Definitionsgleichung genügen.

Es ist nun

$$A^2 = \frac{p^2(\Delta\sigma + \cos\sigma)}{(1+\Delta\sigma)\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2\right)^2}$$

$$B^2 = \frac{p^2(\Delta\sigma + \cos\sigma)}{(1+\cos\sigma)\left(\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2\right)}$$

$$m = \frac{pe}{\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2}$$

Die Amplitude lässt sich auf folgendem Wege ermitteln. Nehmen wir $x = a + c$, so verschwindet für diese Abscisse eine Amplitude Θ, wodurch die andere zu σ wird. Entwickelt man y, so findet sich

$$y = a(1+e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma = (a+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma$$

Damit ist die gesuchte Amplitude σ leicht geometrisch bestimmbar.

Wir geben noch diejenigen analytischen Verhältnisse an, welche durch Combiniren der letzten Formeln hervorgehen. Um zunächst eine Verbindung zwischen A und m abzuleiten, führen wir

$$\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} - e^2 = \frac{pe}{m}$$

in A^2 ein, und erhalten zunächst

$$A^2 = \frac{p^3(\Delta\sigma+\cos\sigma)m^2}{(1+\Delta\sigma)p^2e^2}$$

und da

$$\frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\Delta\sigma} = e^2 + \frac{pe}{m}$$

so wird

$$A^2 = m^2 + p\frac{m}{e}$$

die gesuchte einfache Relation. Vermittelst dieser kann bei gegebenen A die Abscisse m des Mittelpunktes der zweiten Ellipse leicht bestimmt werden.

Führen wir in der Formel für $\frac{pe}{m}$ B^2 ein, so folgt zunächst

$$B^2 = p^2\frac{(\Delta\sigma+\cos\sigma)m}{(1+\cos\sigma)pe} \quad \text{oder} \quad \frac{B^2e}{pm} = \frac{\Delta\sigma+\cos\sigma}{1+\cos\sigma}$$

Aus

$$A^2 = \frac{(\Delta\sigma + \cos\sigma)m^2}{(1+\Delta\sigma)e^2}$$

folgt aber

$$\Delta\sigma\left(\frac{e^2A^2}{m^2} - 1\right) = \cos\sigma - \frac{e^2A^2}{m^2}$$

Die Elimination von $\Delta\sigma$ aus den letzten Formeln führt nun auf

$$\frac{B^2e}{pm}(1+\cos\sigma) = \cos\sigma + \frac{\cos\sigma - \frac{e^2A^2}{m^2}}{\frac{e^2A^2}{m^2} - 1}$$

woraus

$$B^2 = \frac{pmeA}{m^2 - A^2e^2}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma^2$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{B^2}{A^2}\,\frac{m^2 - A^2e^2}{pme}$$

$$\cos\sigma = \frac{A^2pme + A^2B^2e^2 - m^2B^2}{A^2pme - A^2B^2e^2 + m^2B^2}$$

Substituiren wir diesen Wert von $\cos\sigma$ in

$$\cos\sigma - \frac{e^2A^2}{m^2} = \Delta\sigma\left(\frac{e^2A^2}{m^2} - 1\right)$$

so resultirt

$$\Delta\sigma = \frac{-A^2pme + A^2B^2e^2 + m^2B^2}{A^2pme - A^2B^2e^2 + m^2B^2}$$

und endlich ergibt sich hieraus der Modulus k, wenn wir in

$$\Delta\sigma = \sqrt{1 - k^2\sin\sigma^2}$$

$\sin\sigma$ durch $\cos\sigma$ nach einer der obigen Formel bestimmen, nämlich

$$k^2 = \frac{m}{p}\,\frac{B^2e - pm}{A^2e - m^2}$$

Damit ist auch der Modulus des Integrals durch die Achsen der Kegelschnitte und m bekannt, dasselbe gilt bezüglich der Functionen von σ. Ist dagegen σ und k als gegeben vorausgesetzt, so werden die gesuchten Achsen A und B durch die Formeln für A^2 und B^2 und die Entfernung des Mittelpunktes des zweiten vom Brennpunkt des ersten durch die Formel für m ermittelt.

Die Anwendung der entwickelten Formeln auf ein- und umbe-

schriebene Vielecke ist nun keinen Schwierigkeiten unterworfen, wenn man die Gleichungen in der folgenden Fassung aufstellt:

$$\mathrm{cn}\,\frac{4K}{n}=\frac{A^2pmc+A^2B^2c^2-m^2B^2}{A^2pmc-A^2B^2c^2+m^2B^2}$$

$$\mathrm{dn}\,\frac{4K}{n}=\frac{-A^2pmc+A^2B^2c^2+m^2B^2}{+A^2pmc-A^2B^2c^2+m^2B^2}$$

$$k^2=\frac{m}{p}\,\frac{B^2c-pm}{A^2c^2-m^2}$$

$$A^2=m^2+\frac{pm}{c}$$

Für das Viereck hat man demnach

$$\mathrm{cn}\,\frac{4K}{n}=0,\quad \text{d. i.}$$

$$A^2pmc+A^2B^2c^2=m^2B^2$$

als Bedingungsgleichung zwischen den Achsenverhältnissen der beiden Ellipsen. Die Relationen werden einfacher, wenn Bedingungen eingeführt werden, z. B. dass

$$\frac{c}{a}=\frac{C}{A}$$

also die Excentricitäten gleich seien. Für $c \overline{\gtrless} 1$ wird die 2. Curve zur Hyperbel, da B^2 und in Folge dessen m negativ wird.

Die einfachste Gestalt gewinnen die Relationen für $k=0$.

Es wird nämlich

$$\frac{B^2}{b^2}=\frac{m}{c}$$

$$A^2=m^2+\frac{b^2}{c}m$$

also

$$A^2=m^2+B^2$$

woraus sich ergibt, dass m zur linearen Excentricität der zweiten Ellipse wird, zwei Brennpunkte fallen demnach aufeinander, und endlich ist

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi^2}{n}=\frac{b^2}{c}\cdot\frac{m-c}{mc+b^2}$$

Liegt demnach eine Ellipse mit den Halbachsen a und b vor,

so construire man eine zweite so, dass 2 Brennpunkte aufeinander fallen. Bezeichnet man die Entfernung dieses Brennpunktes vom Mittelpunkte der 2. Ellipse mit m, so ergibt sich vermittelst der ersten der obigen Formeln die Halbachse B. Tangenten von einem Punkte der 2. Ellipse an die erste gezogen, bestimmen auf letzter 2 Polarwinkel Θ, deren Summe $\Theta + \Theta_1$ eine constante Grösse σ ist, welche durch die Formel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

gefunden wird.

Man kann übrigens über m willkürlich verfügen und etwa annehmen, dass

$$m = 2c$$

sei. Dadurch erhält man

$$B^2 = 2b^2,$$

$$\cos\sigma = \frac{c^2}{a^2} = e^2$$

und die lineare Excentricität der 2. Ellipse ist der doppelten der ersten gleich.

Man kann ferner

$$m = a + c$$

setzen, woraus

$$\cos \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{c}{a}$$

folgen würde.

Fährt man in der Tangentenziehung fort und setzt voraus, dass das Polygon sich schliesst, so erhält man für den allgemeinern Fall, wonach also beide Curven einen Brennpunkt gemeinsam haben, die Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\pi^2}{n} = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

Für das Dreieck, welches der 1. Ellipse um-, der 2. einbeschrieben ist, folgt aus der letzten Relation wegen $n = 3$

$$3 = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

für das Viereck

$$1 = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

für das Sechseck

$$\xi = \frac{b^2}{c} \frac{m-c}{mc+b^2}$$

u. s. w.

Wir schliessen mit diesen Entwickelungen vorläufig ab, da die Methode, deren wir uns in den vorliegenden Untersuchungen bedient haben, hinlänglich klar erscheint, um auf diesem Wege fortzufahren und neue Beziehungen aufzufinden. Auch das Gegebene ist noch einer weitern Durchbildung fähig, indem wir uns im Vorstehenden darauf beschränken, nur die allgemeinen Züge mit dem Hinweis auf ihre Erweiterung anzudeuten, deren Durchführung wir hiermit dem Leser anheimstellen.

Emmerich, im September 1884.

XII.

Miscellen.

1.

Berichtigende Notiz zum Aufsatz I.

Beirrt durch den Titel des Werks „van Swindens Elemente der Geometrie, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt von C. F. A. Jacobi, Professor an der Landesschule Pforta“ herausgegeben 1834, war ich der Meinung, dass der im genannten Werke pag. 339 eingeführte Winkel A', welches der Brocard'sche Winkel ist, von van Swinden herrührt. Herr Professor Uhlich in Grimma, welcher den Untersuchungen über diesen Gegenstand gefolgt ist und auch historische Studien darüber gemacht hat, die er z. B. in seiner Programmarbeit 1886. „Altes und Neues von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks“ dargelegt hat, berichtet diesen Punkt.

Hiernach hat Crelle bereits 1816 diesen Winkel betrachtet, so dass demselben wol die Priorität gebührt. C. F. A. Jacobi hat die Untersuchungen darüber fortgeführt. Dass dieselben für anregend gehalten wurden, beweisen 3 Abhandlungen von Wiegand, Emsman, Hellwig, in denen manche der neuerdings angegebenen Sätze über diesen Gegenstand bereits enthalten sind.

Dass die Litteratur über diesen Gegenstand in Frankreich und England viel bedeutender ist als in Deutschland, liegt sicherlich mehr in äussern Verhältnissen, ist aber wol nicht zu längnen. Es scheint der Grund dafür zu sein, dass den Verfassern solcher Artikel mehr Gelegenheit zur Verbreitung derselben geboten wird.

W. Fuhrmann.

Digitized by Google

2.

Bemerkung zum Aufsatz IV.

Mit Bezugnahme auf den Aufsatz: „Ueber Triederschnitte u. s. w.“ in Heft 1. Band 6. dieser Zeitschrift sei hier noch die einfache Beziehung erwähnt. welche zwischen dem Schwerpunkte des Triederschnittes und dem Mittelpunkte der Umkugel des durch den Triederschnitt hervorgerufenen Tetraeders stattfindet. Da dieser Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) der Scheitel eines Polartrieders ist, welcher die vom Triederscheitel ausgehenden Tetraederkanten halbirt, so erhält man nämlich

$$\frac{t}{2} - \frac{3\xi}{2} = x_0 + y_0 \cos\gamma + z^0 \cos\beta$$

$$\frac{u}{2} - \frac{3\eta}{2} = x_0 \cos\gamma + y_0 + z_0 \cos\alpha$$

$$\frac{v}{2} - \frac{3\zeta}{2} = x_0 \cos\beta + y_0 \cos\nu + z_0 \text{*)}$$

und insbesondere für die rechtwinkligen Trieder

$$\xi = 2/3\, x_0, \quad \eta = 2/3\, y_0, \quad \zeta = 2/3\, z_0$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen der Schwerpunktsörter liefert die Oerter für den Kugelmittelpunkt.

Es möge hier noch die Berichtigung zweier Versehen folgen. Auf der letzten Seite des obengenannten Aufsatzes muss im 2. Beispiel

$$\frac{2}{3a}\sqrt[3]{a\xi^2} \text{ statt } \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{a\xi^2}$$

u. s. w. stehen, woraus

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c}$$

und durch Substitution in die Flächengleichung:

---

*) Die Umkehrung ergibt:

$$x_0 = \frac{3}{2\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}(\xi \sin\beta - \eta \cos b \sin\gamma - \zeta \cos a \sin\alpha)$$

$$y_0 = \frac{3}{2\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin\gamma}(-\xi \cos b \sin\beta + \eta \sin\gamma - \zeta \cos a \sin\alpha)$$

$$z_0 = \frac{3}{2\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin\alpha}(-\xi \cos c \sin\beta - \eta \cos b \sin\gamma + \zeta \sin\alpha)$$

wo a, b, c die Flächenwinkel des Trieders bedeuten.

$$\xi = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}.a, \quad \eta = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}.b, \quad \zeta = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}.c$$

so dass für v der woit einfachero Ausdruck $\frac{abc \sin\gamma \sin i}{k\sqrt{3}}$ sich ergibt. In der vorletzten Zeile muss es ferner $\sqrt[4]{4/3}$ st. $\sqrt[4]{2/3}$ und deshalb in der letzten $\sqrt[4]{12}$ st. $\sqrt[4]{2/3}$ heissen.

O. Bermann.

3.

Zur Theorie der harmonischen Reihe (Fortsetzung).

5. Der Gedanke, die Vorzeichen der Glieder einer Reihe gruppenweise umzukehren und die so entstehende Reihe zu summiren, ist nicht neu. Herr Unferdinger hat die wichtigsten Potenzreihen in dieser Weise mit Hülfe von Integrationen einzeln behandelt[1]) nach ihm hat Herr Mildner die Aufgabe allgemein, für beliebige Potenzreihen von bekannter Summe, gelöst[2]). Wo daher die Specialisirung von Potenzreihen für $x = 1$ harmonische Reihen erzeugt, müssen die oben gegebenen Ergebnisse mit denjenigen der genannten Arbeiten übereinstimmen. Dieser Fall tritt ein für die Reihen

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

und

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

die den Anwendungen in 3. und 4. entsprechen.

---

1) Die Summe der Logarithmus- und Arctang-Reihe (sowie der Reihen für $\sin x$, $\cos x$ und e^x) mit alternirenden Zeichengruppen. Sitzgsberichte d. Wiener Akad. 1867. Bd. 55. II. S. 75 und Bd. 56. II. S. 257.

2) Ueber Ableitung neuer unendlicher Reihen aus einer gegebenen durch Umstellung (soll wol heissen „Umkehrung") der Vorzeichen nach einem bestimmten Gesetze. Ebendaselbst. 1882. Bd. 86 S. 999.

Die Formeln für $\sigma(1)$ nnd $\sigma(\tfrac{1}{2})$ finden sich übrigens nnr bei Mildner, in zwar auch elementärer, aber von der hier gegebenen gänzlich verschiedener Herleitnng, nnd zwar hat die erstere Formel, abweichend von nnserer Gleichnng (III.) die Gestalt:

$$\sigma(1) = \frac{1}{p}\log 2 + \frac{\pi}{p^2} \sum_{0}^{\frac{p-1}{2}} (p-2h-1)\operatorname{tg}\frac{p-2k-1}{2p}\pi \quad \text{für gerade } p,$$

$$= \frac{1}{p}\log 2 + \frac{2\pi}{p^2} \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} k.\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p} \quad \text{für nngerade } p$$

Durch Vergleichnng dieser Ansdrücke mit den nnsrigen ergeben sich, nach einigen leichten Umformnngen, die merkwürdigen Formeln:

$$\text{(V)} \quad \text{a)} \quad \sum_{1}^{n} (2k-1)\operatorname{tg}\frac{2k-1}{4n}\pi = n + 2n \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n}}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{1}^{n-1} k.\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n-1} = \frac{2n-1}{2} \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n-1}}$$

Ein directer Beweis derselben scheint schwierig zn sein.

6. Man könnte versucht sein, die Aufgabe allgemeiner so zu fassen, dass die Anzahl der negativ genommenen Glieder von der positiven verschieden, etwa gleich q, gewählt wird. Man überzengt sich aber leicht, dass in diesem Falle stets eine divergente Reihe entsteht. In der Tat wäre dann die Snmme der ersten $(p+q)n$ Glieder

$$\underset{(p+q)n}{\sigma(z)} = (h_0 + h_1 + \ldots + h_{p-1}) - (h_p + \ldots h_{p+q-1}) + - \ldots$$
$$+ (h_{(n-1)(p+q)} + \ldots + h_{np+(n-1)q-1}) - (h_{np+(n-1)q} + \ldots + h_{n(p+q)-1}$$
$$= \sum_{k=o}^{p-1} \{h_k + h_{k+(p+q)} + \ldots + h_{k+(n-1)(p+q)}\} - \sum_{k=p}^{p+p-1} \{\text{über dieselben Glieder}\}$$
$$- \sum_{k=o}^{p-1} \frac{1}{p+q} S_{n-1}\left(\frac{z+k}{p+q}\right) - \sum_{k=p}^{p+q-1} \frac{1}{p+q} S_{n-1}\left(\frac{z+k}{p+q}\right) <$$

also

$$(p+q)\,\underset{(p+q)n}{\sigma(z)} = \sum_{k=0}^{p-1} C_{n-1}\left(\frac{z+k}{p+q}\right) - \sum_{k=p}^{p+q-1} C_{n-1}\left(\frac{z+k}{p+q}\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{p-1}\log\left(n-1+\frac{z+k}{p+q}\right) - \sum_{k=0}^{q-1}\log\left(n-1+\frac{z+k+p}{p+q}\right)$$

Die beiden ersten Summen bleiben für $n=\infty$ endlich; die beiden letzten aber haben bzhw. p und q Glieder, deren jedes unendlich wird wie $\log n$; die Differenz wird daher immer unendlich, so oft p und q verschieden sind, verschwindet dagegen, wenn $p=q$, in welchem Falle die letzte Gleichung in Formel I. übergeht.

Heinrich Simon.

In vorstehendem Aufsatze bitten wir folgende Druckfehler zu berichtigen.

S. 105	Z. 11	v. unt.	statt	Abhandlung	setze	Behandlung
„ 106	„ 3	„	„	$c\lim\limits_{n=\infty}$	„	$c=\lim\limits_{n-\infty}$
	„ 15	„	Gl. (6) unter Σ statt $k-1$ setze $k=1$			
			zwischen Gl. (6) und (6ᵃ) fehlt die Zeile:			
			deren zweite sich noch auf die Form bringen lässt:			
S. 107	Z. 10	v. unt.	statt	h^k	setze	h_k
	„ 2	„	„	σ_{2pn}	„	$\sigma_{2pn}\,z$
„ 108	„ 1	v. ob.	„	$p-2$	„	$p-1$
	„ 8	„	„	C	„	$C\left(\frac{z+k}{2p}\right)$
	„ 10	„	„	$\underset{2}{\Sigma}$	„	$\underset{1}{\Sigma}$
	„ 15	„	„	Differentiation	„	Dissertation
„ 109	„ 3	„	„	$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right.$	„	$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\pi$
	„ 9	„	„	$\frac{2p-2}{2p}$	„	$\frac{2p-1}{p}$
	„ 8	v. unt.	„	$2m+4$	„	$2m+1$
	„ 5	„	„	$\underline{2m}$	„	$\underline{1}$
„ 110	„ 2	v. ob.	„	$\frac{2}{2\pi}$	„	$\frac{2\pi}{p}$
„	„ 2	v. unt.	„	$\frac{2p-1}{4p}$	„	$\frac{2p-1}{4p}\pi$
„ 111	„ 6	v. ob.	„	σ	„	5

4.

Zur Rectification der Hyperbel.

Dieselbe führt bekanntlich auf das Integral

$$s = \frac{b^2}{c}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin\varphi^2}}$$

Wie wir schon früher bemerkt, ist 2φ der Winkel zwischen dem einen Brennstrahl und der Verlängerung des andern nach dem zweiten Endpunkt des Hyperbelbogens.

Aus der obigen Gleichung folgt aber

$$\frac{s}{c} = k'^2 u + \varDelta \operatorname{tg}\varphi - E(\varphi)$$

Wir benutzen hier eine in den „Transformationen" mitgeteilte Formel

$$E(\varphi) = (\varDelta - k')\operatorname{tg}\varphi + \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)$$

um damit den Ausdruck

$$\varDelta \operatorname{tg}\varphi - E(\varphi)$$

darzustellen und in die betreffende Gleichung einzuführen. Man erhält

$$\frac{s}{c} = k'^2 u - \frac{E}{K}u + k'^2 \operatorname{tg} u + \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \ldots\right)$$

oder auch bei Benutzung einer bekannten Reihe für $k'\operatorname{tg}\varphi$, nämlich

$$k'\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)$$

das folgende Resultat

$$\frac{s}{c} = \frac{2\pi}{K}\left(\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^2}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right) - \left(\frac{E}{K} - k'^2\right)u$$

wodurch der Hyperbelbogen aus dem Argument

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}\sin\varphi^2}}$$

durch eine Reihe abgeleitet und berechnet werden kann.

E. Oekinghaus.

XIII.

Potential einer elliptischen Walze.

Von

Ulrich Bigler.

Fortsetzung von T. III. Nr. XIX.

Zweiter Teil.

IV. Potential einer elliptischen Scheibe von der Dichtigkeit 1, deren Punkte den Gleichungen

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}\leqq 1,\quad Z=0$$

genügen.

§ 12. Das Potential.

a) Ableitung desselben aus dem Potential der Ellipse, ausgedrückt durch ein Integral mit freiem Integrationsweg.

Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$\overline{W}^2 = 1-\frac{x^2}{Aw+u}-\frac{y^2}{Bw+u}-\frac{z^2}{u}$$

mit wt, wt', wt'' bezeichnet werden, dann ist das Potential der Ellipse

$$\frac{X^2}{Aw}+\frac{Y^2}{Bw}=1$$

deren Dichtigkeit gleich dem Abstande des Mittelpunktes von der Tangente im betreffenden Punkte angenommen wird,

$$\mathrm{Pot} = 2w\sqrt{AB}\int_{wt}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(u-wt)(u-wt')(u-wt'')}}$$

Setzt man hier

$$u = wu', \quad \overline{W} = \frac{1}{\sqrt{w}} W_1$$

so ergeben sich

$$\text{Pot} = 2\sqrt{w}\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du'}{\sqrt{(u'+t)(u'-t')(u'-t'')}}$$

$$W_1{}^2 = w - \frac{x^2}{A+u'} - \frac{y^2}{B+u'} - \frac{z^2}{u'}$$

und

$$u' = t,\ t',\ t''$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$W_1{}^2 = 0$$

daher ist die Gl.

$$W_1{}^2 = w\,\frac{(u'-t)(u'-t')(u'-t'')}{(A+u')(B+u')u'}$$

dentisch richtig. Schreibt man u statt u' und setzt dann

$$R^2 = (u-t)(u-t')(u-t''), \quad U^2 = (A+u)(B+u)u$$

so dass nun

$$R = \frac{1}{\sqrt{w}} UW_1$$

wird, so ist

$$\text{Pot.} = 2\sqrt{w}\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{R} = 2w\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{UW_1}$$

wo t die grösste Wurzel der Gleichung

$$\Sigma\,\frac{x^2}{A+u} = w$$

bedeutet.

Um die Masse des Ringes, welcher von den Ellipsen mit den Halbaxen $(\sqrt{Aw},\ \sqrt{Bw})$ und $(\sqrt{A(w+dw)},\ \sqrt{B(w+dw)})$ gebildet wird, zu erhalten, habe ich obige Formel für das Pot. noch mit $\frac{1}{2}\frac{dw}{w}$ zu multipliciren. Denn

$$\sqrt{A(w+dw)} = \sqrt{Aw}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{dw}{w}\right)$$

und

$$\sqrt{B(w+dw)} = \sqrt{Bw}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{dw}{w}\right)$$

also ist das frühere E gleich $\frac{1}{2}\frac{dw}{w}$ und somit

$$\text{Pot.} = \sqrt{AB} \int\limits_{t}^{\infty} \frac{du}{U.W_1} dw = \tfrac{1}{2}\sqrt{AB} \int \frac{du}{U.W_1} dw$$

(Weg eine Schlinge ans dem Ostpunkte nm t).

Weil anch dieses Ingetral im Horizonte verschwindet, so kann man die Schlinge in eine geschlossene Cnrve nm die Pole t' nnd t'' verwandeln nnd diesen Weg wollen wir nun benutzen, um das Pot. der Scheibe zn erhalten. Es ist also

$$\text{Pot.} = \frac{i}{2}\sqrt{AB} \int \frac{du}{U.W_1} dw \quad \text{(Weg Fig. 17.)}$$

wo

$$\overline{W_1}^2 = \frac{(t-u)(u-t')(u-t'')}{U} = \Sigma \frac{x^2}{A+u} - w$$

ist, und $\overline{W_1}$ in der Realitätslinie zwischen t' nnd t positiv verstanden wird; somit das Potential der Scheibe

$$\text{Pot.} = \frac{i}{2}\sqrt{AB} \int\limits_0^1 \left(\int \frac{du}{U.\overline{W_1}} \right) dw$$

Die Wurzeln t, t', t'' der Gleichung

$$W_1^2 = 0$$

sind Fnnctionen von w. Für ein sehr kleines $+w$ ist t pos. sehr gross, nnd während w von 0 his 1 steigt, sinkt t fortwährend bis zu dem pos. Werte herab, den es für $w = 1$ annimmt. t' nnd t'' sinken zwar auch, treten aher nicht aus den Intervallen

$$-B < t' < 0, \quad -A < t'' < -B$$

heraus. Wenn daher der in sich znrückkehrende Integrationsweg das zwischen $-A$ nnd 0 liegende Stück der Realitätslinie rückläufig nmschliesst, aber den niedrigsten Wert von t ausschliesst, so kann er während der Integration nach w festliegen. Weil u von w nnabhängig ist, so hat man nur $\frac{dw}{\overline{W_1}}$ von $w = 0$ bis $w = 1$ zn integriren. Nun ist

$$\overline{W_1}^2 = -\left(w - \Sigma \frac{x^2}{A+u}\right)$$

also

$$2\overline{W_1} \frac{\partial \overline{W_1}}{\partial w} = -1$$

folglich

Digitized by Google

$$\frac{\partial \overline{W_1}}{\partial w} = -\frac{1}{2\overline{W_1}}$$

somit

$$\int_0^1 \frac{dw}{\overline{W_1}} = -2\int_0^1 \frac{\partial \overline{W_1}}{\partial w}\,dw = -2\left[\overline{W_1}\right]_0^1$$

und demnach

$$\text{Pot.} = -i\sqrt{AB}\int \frac{\overline{W_1}(\text{für } w=1)\,du}{U} + i\sqrt{AB}\int \frac{\overline{W_1}(\text{für } w=0)du}{U}$$

(Weg eine rückläufige Curve um $-A$ und 0 mit Ausschluss der kleinsten pos. Wurzel von $\overline{W_1}^2 = 0$)

Nun liegt aber die pos. Wurzel von $\overline{W_1}^2$ (für $w=0$) im pos. Unendlichen, und deshalb kann man im zweiten Integral den Weg so legen, dass nur sehr grosse Werte von u in Betracht kommen. Das zweite Integral ist also null. Wir erhalten somit als Potential der elliptischen Scheibe folgenden Ausdruck:

$$P = -i\sqrt{AB}\int \frac{\overline{W_1}}{U}\,du$$

(Weg eine geschlossene Curve um die Pole t'' und t')

Es ist nun

$$\overline{W_1}^2 \text{ (für } w=1) = \Sigma\frac{x^2}{A+u} - 1$$
$$= \frac{(t-u)(t'-u)(t''-u)}{(A+u)(B+u)u}$$

also

$$P = -i\sqrt{AB}\int \frac{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}}{(A+u)(B+u)u}du \quad \text{(Weg wie oben)}$$
$$= 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}{(A+u)(B+u)u}\,du$$
$$= 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{W}{U}\,du$$

b) Ableitung des Potentials der Scheibe aus dem Potential der Ellipse, ausgedrückt durch ein Integral mit geradem Integrationsweg.

Wenn s, s', s'' die Wurzeln der Gleichung

$$W_1^2 = w - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u} = 0$$

sind, dann ist das Potential des von den Ellipsen ($\sqrt{Aw}$, $\sqrt{Bw}$) und ($\sqrt{A(w+dw)}$, $\sqrt{B(w+dw)}$) gebildeten Ringes gleich

$$\text{Pot.} = \sqrt{AB}\int\limits_s^\infty \frac{du}{W_1 . U} dw$$

und somit das Potential der Scheibe

$$P = \sqrt{AB}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_s^\infty \frac{du}{W_1 . U}\right) dw$$

und weil $w = f(s)$ ist, so erhält man auch

$$P = \sqrt{AB}\int\limits_t^\infty \left(\int\limits_s^\infty \frac{du}{W_1 . U}\right) \cdot \left(-\frac{\partial w}{\partial s}\right) ds$$

Man denke sich nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 18). Auf der Abscissenaxe werden die u und auf der Ordinatenaxe die s abgetragen und in dem Punkte (u, s) stelle die dritte Coordinate den Wert des Integranden dar. $du ds$ ist das Flächenelement. Die Integration nach u erstreckt sich über einen horizontalen Streifen, der in einem Punkte P der Halbirungslinie des rechten Winkels beginnt und sich bis in's Unendliche ausdehnt. Die Integration nach s summirt nun alle diese Streifen vom Punkte A an, wo $s = t$ ist, bis in's Unendliche. Das Doppelintegral erstreckt sich demnach über alle Punkte der Ebene, welche zwischen der von A ausgehenden horizontalen Linie und der Halbirungslinie des rechten Winkels liegen. Kehren wir nun die Integration um und integriren zuerst nach s, so läuft s von t bis u; sie umfasst also den Streifen ($P' - P''$) Fig. 18. Diese Streifen sind nun noch zu summiren von $u = t$ bis $u = \infty$. Es ist demnach

$$\int\limits_t^\infty \left(\int\limits_s^\infty \frac{dv}{U . W_1}\right) \cdot \left(-\frac{\partial w}{\partial s}\right) ds = \int\limits_t^\infty \left(\int\limits_t^u \frac{\left(-\frac{\partial w}{\partial s}\right) ds}{W_1}\right) \cdot \frac{du}{U}$$

und somit

$$P = \sqrt{AB}\int_t^\infty\left(\int_t^u \frac{\left(-\frac{\partial w}{\partial s}\right)ds}{W_1}\right)\cdot\frac{du}{U}$$

Nun ist

$$W_1^2 = w - \Sigma\frac{x^2}{A+u}$$

also

$$2W_1\frac{\partial W_1}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s}$$

folglich

$$\int_t^u -\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{ds}{W_1} = -2\int_t^u\frac{\partial W_1}{\partial s}ds$$

und weil W_1 für $s = u$ verschwindet und für $s = t$ zu

$$W = \sqrt{1-\Sigma\frac{x^2}{A+u}}$$

wird, so erhält man

$$P = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{W}{U}.du$$

c. Darstellung des Potentials der elliptischen Scheibe durch elliptische Integrale.

Es ist

$$P = \sqrt{AB}\int\frac{W^2}{U\,.\,W}\cdot du$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostpunkte um den Pol t)

oder auch

$$P = \sqrt{AB}\int\left(1-\Sigma\frac{x^2}{A+u}\right)\cdot\frac{du}{R}$$

$$= \sqrt{AB}\int\frac{du}{R} - \sqrt{AB}\,x^2\int\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} - \sqrt{AB}\,y^2\int\frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{R}$$

$$- \sqrt{AB}\,z^2\int\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{R}$$

$$= I + II + III + IV$$

Integral I ist gleich dem Potential der Ellipse, also

$$I = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{t-t''}}.K.\left(k^2 = \frac{t'-t''}{t-t''}\right)$$

Bei Integral *II* verwandle man die Schlinge in eine geschlossene Curve um die Pole $-A$, t'' und t' und gebe derselben die Gestalt von Fig. 19.

Ein Teil der Curve zwischen den Polen $-A$ und t'' werde auf die Realitätslinie verlegt, und weil sich nun hier die beiden Wege aufheben, so verwandelt sich die anfänglich geschlossene Curve in einen rückläufigen Kreis um den Pol $-A$ und in eine geschlossene Curve um die beiden Pole t'' und t'. Also

$$\int \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine geschlossene Curve um die Pole } -A, t'', t')$$

$$= -i \int \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{\sqrt{(t-u)(t'-u)(t''-u)}}$$

(Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol $-A$, Erkennungsort östlich von $-A$)

$$+ i \int \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}}$$

(Weg eine rückläufige Curve um die Pole t'' und t', Erkennungsstandort östlich von t')

$$= \quad L + M$$

Der Wert des ersten Integrals ist nach einem Lehrsatze von Cauchy gleich

$$L = -\frac{2\pi}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

Im zweiten Integral sind die beiden Pole t'' und t' zugänglich und man erhält

$$M = 2 \int_{t''}^{t'} \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R}$$

Ich setze nun

$$u = t' \sin^2\varphi + t'' \cos^2\varphi$$

also

$$\frac{du}{R} = \frac{2\, d\varphi}{\sqrt{(t-t'')}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$A+u = A+t''-(t''-t')\sin^2\varphi = (A+t'')\left(1-\frac{t''-t'}{A+t''}\sin^2\varphi\right)$$

und wenn noch

$$k^2 S^2 a = \frac{t''-t'}{A+t''},$$

also

$$S^2 a = -\frac{t-t''}{A+t''}$$

und

$$Sa = i\frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{A+t''}},\quad Ca = \frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t'')}},\quad Da = \frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t'')}}$$

gesetzt wird, wo also der Parameter a nördlich lateral ist, so erhält man

$$\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{2}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{du}{\sqrt{(1-k^2 S^2 a S^2 u)}}$$

Nun ist

$$1 = 1 - k^2 S^2 a S^2 u + k^2 S^2 a S^2 u$$

also

$$\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{2}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}\cdot\left(1+\frac{Sa}{Ca.Da}\cdot\frac{k^2 Sa.Ca.Da.S^2 u}{1-k^2 S^2 a S^2 u}\right)du$$

und weil

$$\frac{Sa}{Ca.Da}\cdot\frac{1}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}} = \frac{i}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

so ist

$$M = \frac{4K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4i}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}\cdot\Pi(a,\ K)$$

und weil

$$\Pi(a,\ K) = KZ(a)$$

so ist auch

$$M = \frac{4K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4iKZ(a)}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

folglich

$$\int\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R}\ \text{(Weg eine Schlinge)} = -\frac{2\pi}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$
$$+\frac{4K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4iKZa}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}},$$

und demnach

$$\Pi = \frac{2\pi\sqrt{AB}\,x^2}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}} - \frac{4\sqrt{AB}\,x^2 K}{(A+t'')\sqrt{(t-t'')}}$$
$$-\frac{4i\sqrt{AB}\,x^2 KZa}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}.$$

Um diese Formel zu vereinfachen, setze ich $a = L - x$, wo x nördlich lateral ist. Dann ist

$$Sx = S(L-a) = -\frac{1}{kSa} = \frac{i\sqrt{(A+\iota'')}}{\sqrt{(\iota'-\iota'')}},$$

$$Cx = C(L-x) = \frac{\sqrt{(A+\iota')}}{\sqrt{(\iota'-\iota'')}},$$

$$D(x) = D(L-a) = \frac{\sqrt{(A+\iota)}}{\sqrt{(\iota-\iota'')}}$$

ferner

$$Z(L-x) = -\frac{Cx.Dx}{Sx} - Zx - \frac{i\pi}{2K}$$

$$= \frac{i\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')}}{\sqrt{(\iota-\iota'')(A+\iota'')}} - Zx - \frac{i\pi}{2K}$$

also

$$\frac{4iKZa}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}} = -\frac{4K}{(A+\iota'')\sqrt{(\iota-\iota'')}}$$

$$-\frac{4iKZx}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}} + \frac{2\pi}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}$$

folglich, wenn für d. Arg. x wieder α gesetzt wird,

$$\Pi = \frac{4i\sqrt{AB}\,x^2 KZ\alpha}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}$$

Weil nun

$$\int \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um den Pol } \iota)$$

$$= 2\int_{\iota}^{\infty}\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R}$$

ist, muss der letzte Ausdruck unter Π auch erhalten werden, wenn das geradlinige Integral in ellipt. Integrale übergeführt wird. Um dasselbe zu verwandeln, setze man

$$u = \iota + (\iota-\iota')\,\mathrm{tg}^2\varphi$$

also

$$u-\iota = (\iota-\iota')\,\mathrm{tg}^2\varphi, \quad u-\iota' = (\iota-\iota')\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

$$u-\iota'' = \frac{\iota-\iota''}{\cos^2\varphi}(1-k^2\sin^2\varphi),$$

$$A+u = \frac{A+\iota}{\cos^2\varphi}\left(1-\frac{A+\iota'}{A+\iota}\sin^2\varphi\right), \quad du = 2(\iota-\iota')\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

Setzt man ferner

$$\frac{A+t'}{A+t} = k^2 S^2 \alpha$$

also

$$S\alpha = \frac{\sqrt{(t-t'')(A+t')}}{\sqrt{(t'-t'')(A+t)}}, \quad C\alpha = -\frac{i\sqrt{(t-t')(A+t'')}}{\sqrt{(t'-t'')(A+t'')}},$$

$$D\alpha = \frac{\sqrt{(t-t')}}{\sqrt{(A+t)}},$$

dann ist

$$\frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2C^2 u \, du}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}\,(1-k^2 S^2 \alpha \, S^2 u)}$$

Aus der Gleichung

$$(A+t)(t'-t'')-(A+t')(t-t'')+(A+t'')(t-t') = \begin{bmatrix} A+t & t & 1 \\ A+t' & t' & 1 \\ A+t'' & t'' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & t & 1 \\ t' & t' & 1 \\ t'' & t'' & 1 \end{bmatrix} = 0$$

folgt, dass

$$1 < S\alpha < \frac{1}{k}$$

also

$$\alpha = K + x, \quad \text{wo} \quad 0 < x < L$$

Ferner ist

$$\frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2(1-S^2 u)\,du}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}\,(1-k^2 S^2 \alpha \, S^2 u)}$$

$$= \frac{2(1-k^2 S^2 \alpha \, S^2 u + k^2 S^2 \alpha \, S^2 u - S^2 u)}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}\,(1-k^2 S^2 \alpha \, S^2 u)}\, du$$

$$= \frac{2\,du}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}} - \frac{2 D^2 \alpha \, S^2 u \, du}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}\,(1-k^2 S^2 \alpha \, S^2 u)}$$

und weil

$$\frac{D\alpha}{k^2 S\alpha \, C\alpha} \cdot \frac{1}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}} = -\frac{i}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

so folgt

$$2\int_{\iota}^{\infty}\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R}=\frac{4}{(A+\iota)\sqrt{(\iota-\iota'')}}\int_{0}^{K}du$$

$$-\frac{4}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}\int_{0}^{K}\frac{k^2\,S\alpha\,C\alpha\,D\alpha\,S^2u\,du}{1-k^2S^2\alpha\,S^2u}$$

$$=\frac{4K}{(A+\iota)\sqrt{(\iota-\iota'')}}-\frac{4iKZ\alpha}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}$$

also

$$\Pi=-\frac{4\sqrt{AB}\,x^2K}{(A+\iota)\sqrt{(\iota-\iota'')}}+\frac{4i\sqrt{AB}\,x^2KZ\alpha}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}$$

Weil

$$\alpha=K+x\,(0<x<L)$$

so ist

$$Sx=-S(K-\alpha)=-\frac{C\alpha}{D\alpha}$$

$$=\frac{i\sqrt{(\iota-\iota')(A+\iota'')}}{\sqrt{(\iota'-\iota'')(A+\iota)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+\iota')}}{\sqrt{(\iota-\iota')}}=\frac{i\sqrt{(A+\iota'')}}{\sqrt{(\iota'-\iota'')}},$$

$$Cx=C(K-\alpha)=\frac{\sqrt{(A+\iota')}}{\sqrt{(\iota'-\iota'')}},$$

$$Dx=D(K-\alpha)=\frac{\sqrt{(A+\iota)}}{\sqrt{(\iota-\iota'')}}$$

also

$$Z\alpha=Z(K+x)=-\frac{k^2\,Sx\,.\,Cx}{Dx}+Zx$$

$$=-\frac{i\sqrt{(A+\iota')(A+\iota'')}}{\sqrt{(\iota-\iota'')(A+\iota)}}+Zx$$

somit

$$-\frac{4iKZ\alpha}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}=-\frac{4K}{(A+\iota)\sqrt{(\iota-\iota'')}}$$

$$-\frac{4iKZx}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}$$

folglich

$$2\int_{\iota}^{\infty}\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R}=-\frac{4iKZx}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}$$

und schliesslich, wenn für x wieder α gesetzt wird,

$$\Pi=\frac{4i\sqrt{AB}\,x^2KZ\alpha}{\sqrt{(A+\iota)(A+\iota')(A+\iota'')}}$$

wie auf Seite 233.

Digitized by Google

Um das Integral

$$\int \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um den Pol } t\text{)}$$

$$= 2 \int_t^\infty \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{R}$$

zu verwandeln, setze man wieder

$$u = t + (t - t')\,\mathrm{tg}^2\varphi$$

also

$$\frac{du}{R} = \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{(t-t'')}\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

$$B + u = \frac{B+t}{\cos^2\varphi}\left(1 - \frac{B+t'}{B+t}\sin^2\varphi\right)$$

Ferner sei

$$\frac{B+t'}{B+t} = k^2 S^2\beta$$

also

$$S\beta = \frac{\sqrt{(t-t'')(B+t')}}{\sqrt{(t'-t'')(B+t)}}, \quad C\beta = \frac{\sqrt{(-B-t'')(t-t')}}{\sqrt{(B+t)(t'-t'')}},$$

$$D\beta = \frac{\sqrt{(t-t')}}{\sqrt{(B+t)}}$$

wo

$$S\beta < 1, \quad \text{also} \quad 0 < \beta < K$$

Demnach ist

$$\frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2\,du}{(B+t)\sqrt{t-t''}} - \frac{2\,D^2\beta \,.\, S^2u\,du}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}\,(1 - k^2 S^2\beta\, S^2u)}\,.$$

und weil

$$\frac{D\beta}{k^2 S\beta\; C\beta} \cdot \frac{1}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}} = \frac{1}{\sqrt{(-B-t'')(B+t')(B+t)}}$$

so ist

$$2\int_t^\infty \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{4K}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}} - \frac{4KZ\beta}{\sqrt{(B+t)(B+t')(-B-t'')}}$$

folglich

$$III = -\frac{4\sqrt{AB}\,y^2 K}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4\sqrt{AB}\,y^2\,K Z\beta}{\sqrt{(B+t)(B+t')\,(-B-t'')}}.$$

Bei Integral IV verwandle man die Schlinge durch Einschaltung

Digitized by Google

des Horizontes in eine geschlossene Curve um die Pole 0, t', t'' und gebe derselben die Gestalt von Fig. 20.

Zwischen t' und 0 ziehe man einen Teil der Curve auf die Realitätslinie zusammen und weil sich hier die beiden Wege aufheben, so verwandelt sich die anfängliche Curve in einen rückläufig geschlossenen Kreis um den Pol 0 und in eine geschlossene Curve um die Pole t' und t'', und weil diese letztere Pole zugänglich sind, so erhält man

$$\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine geschlossene Curve um die Pole 0, } t', t'')$$

$$= i \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R_1} \quad \text{(Weg ein kleiner rückläufiger Kreis um den Pol 0)}$$

$$-2 \int_{t''}^{t'} \frac{1}{(-u)} \cdot \cdot \frac{du}{R} = L' + M'$$

Nach einem Lehrsatze von Cauchy ist aber

$$L' = \frac{2\pi}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

und wenn im Integrale M'

$$k^2 S^2 \delta = \frac{t' - t''}{-t''},$$

also

$$S^2\delta = \frac{t - t''}{-t''}, \quad S\delta = \frac{\sqrt{(t - t'')}}{\sqrt{-t''}},$$

$$C\delta = -\frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{-t''}}, \quad D\delta = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{-t''}}$$

folglich

$$\frac{S\delta}{C\delta\, D\delta} \cdot \frac{1}{t''\sqrt{(t - t'')}} = -\frac{i}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

gesetzt wird, so erhält man

$$M' = \frac{4K}{t''\sqrt{(t - t'')}} - \frac{4iKZ\delta}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

und somit ist

$$\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine Schlinge)}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{t\,t'\,t''}} + \frac{4K}{t''\sqrt{(t - t'')}} - \frac{4iKZ\delta}{\sqrt{t\,t'\,t''}}$$

folglich

$$\text{a)}\quad IV = -\frac{2\pi\sqrt{AB}\,z^2}{\sqrt{tt't''}} - \frac{4\sqrt{AB}\,z^2K}{t''\sqrt{t-t''}} + \frac{4i\sqrt{AB}\,z^2\,KZ\delta}{\sqrt{t\,t't''}}.$$

Man kann nun auch die Schlinge des Integrals IV. auf die Uebergangslinie (t-Ostpunkt) zusammenziehen und erhält

$$\int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{R} \quad \text{(Weg eine Schlinge)} \quad = 2\int_t^{\infty}\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{R}$$

Mittelst der Substitution

$$u = t + (t - t'')\,\mathrm{tg}^2\varphi$$

findet man nun

$$2\int_t^{\infty}\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{4K}{t\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4iKZ\gamma}{\sqrt{(tt't'')}}$$

wo

$$S\gamma = \frac{\sqrt{-t'}\,\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{t}\sqrt{(t'-t'')}}$$

$$C\gamma = \frac{\sqrt{-t''}\,\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{t}\,\sqrt{(t'-t'')}},$$

$$D\gamma = \frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{t}}$$

und somit ist

$$\text{b)}\quad IV = -\frac{4\sqrt{AB}\,z^2K}{t\sqrt{t-t''}} - \frac{4i\sqrt{AB}\,z^2\,KZ\gamma}{\sqrt{tt't''}}$$

Die Formel a) soll nun mit der Formel b) in Uebereinstimmung gebracht werden. Aus den Formeln geht hervor, dass

$$\delta = K + x$$

wo

$$0 < x < L$$

und γ nördlich lateral sind. Man setze deshalb in Formel (a)

$$\delta = K + x$$

und in Formel (b)

$$\gamma = L - x$$

wo x nördlich lateral ist. Weil nun

$$Sx = S(\delta - K) = -\frac{C\delta}{D\delta} = \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{-t'}},$$

$$Cx = C(\delta - K) = \frac{\sqrt{t-t'}}{\sqrt{-t'}}$$

$$Dx = D(\delta - K) = \frac{\sqrt{t-t'}\ \sqrt{-t''}}{\sqrt{t-t''}\ \sqrt{-t'}}$$

also

$$Z\delta = Z(K+x) = -\frac{k^2 Sx\, Cx}{Dx} + Zx$$

so ist

$$-\frac{4iKZ\delta}{\sqrt{tt't''}} = -\frac{4K(t'-t'')}{t't''\sqrt{(t-t'')}} - \frac{4iKZx}{\sqrt{tt't''}}$$

Wird nun dieser letzte Wert in Formel a) eingesetzt, so erhält man

$$\text{a}')\quad IV = -\frac{4\pi\sqrt{AB}z^2}{\sqrt{t\,t,t''}} - \frac{4\sqrt{AB}z^2K}{t'\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4i\sqrt{AB}z^2KZx}{\sqrt{(tt't'')}}$$

Ferner ist

$$Sx = S(L-\gamma) = \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{-t'}},\quad Cx = \frac{\sqrt{(t-t')}}{\sqrt{-t'}},\quad Dx = \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{-t'}}\cdot\frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(t-t')}}$$

also

$$Z\gamma = -\frac{Cx\,Dx}{Sx} - Zx - \frac{i\pi}{2K} = -\frac{(t-t')\sqrt{-t''}}{\sqrt{(t-t'')}\sqrt{tt'}} - Zx - \frac{i\pi}{2K}$$

somit

$$\frac{4iKZ\gamma}{\sqrt{tt't''}} = \frac{4K(t-t')}{tt'\sqrt{(t-t'')}} - \frac{4iKZx}{\sqrt{tt't''}} + \frac{2\pi}{\sqrt{tt't''}}$$

und setzt man diesen Wert in Formel b) ein, so erhält man

$$\text{b}')\quad IV = -\frac{2\pi\sqrt{AB}z^2}{\sqrt{tt't''}} - \frac{4\sqrt{AB}z^2K}{t'\sqrt{(t-t'')}} + \frac{4i\sqrt{AB}z^2KZx}{\sqrt{tt't''}}$$

eine Formel, die nun mit a') übereinstimmt.

Das Potential der ellipt. Scheibe, in ellipt. Integralen ansgedrückt, ist also

$$P = \frac{4\sqrt{AB}\,K}{\sqrt{(t'-t'')}} - \frac{4\sqrt{AB}\,K}{\sqrt{(t-t'')}}\left(\frac{x^2}{A+t} + \frac{y^2}{B+t} + \frac{z^2}{t}\right) + \frac{4\,i\sqrt{AB}\,z^2KZ\alpha}{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}$$

$$+\frac{4\sqrt{AB}\,y^2 KZ\beta}{\sqrt{(B+t)(B+t')(-B-t'')}}-\frac{4i\sqrt{AB}\,z^2KZ\gamma}{\sqrt{tt't''}}$$

oder, da

$$\frac{x^2}{A+t}+\frac{y^2}{B+t}+\frac{z^2}{t}=1,\quad x^2=\frac{(A+t)(A+t')(A+t_{,,})}{A(A-B)},$$

$$y^2=\frac{(B+t)(B+t')(-B-t'')}{(A-B).B},\quad z^2=\frac{tt't''}{AB}$$

ist:

$$P=4K\left(\frac{\sqrt{B}\,xi\,Z\alpha}{\sqrt{A-B}}+\frac{\sqrt{A}\,yZ\beta}{\sqrt{A-B}}+z(-iZ\gamma)\right)$$

Wegen des Factors $\sqrt{A-B})$ im Nenner gestattet diese Formel nicht unmittelbar den Uebergang zur Kreisscheibe. Um sie aber dafür einzurichten, setze ich

$$\alpha=K+\alpha' \quad \text{und} \quad \beta=K-\beta'$$

wo α' nördlich lateral und β' reell ist. Nun ist

$$Z\alpha=Z(K+\alpha')=-\frac{k^2S\alpha'C\alpha'}{D\alpha'}+Z\alpha'$$

und weil

$$S\alpha'=\frac{i\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad C\alpha'=\frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad D\alpha'=\frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

so folgt

$$Z\alpha=-\frac{i\sqrt{(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{(t-t'')(A+t)}}+Z\alpha'$$

Ebenso ist

$$Z\beta=Z(K-\beta')=\frac{k^2\,S\beta'\,C\beta'}{D\beta'}-Z\beta'$$

und weil

$$S\beta'=\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad C\beta'=\frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad D\beta'=\frac{\sqrt{B+t}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

so erhält man

$$Z\beta=\frac{\sqrt{(B+t')(-B-t'')}}{\sqrt{(B+t)(t-t'')}}-Z\beta'$$

Ersetzt man in diesen Formeln $-t''$ durch $A-C\cos^2\Theta$, wo

$$C=A-B$$

ist, so erhält man

$$Z\alpha=-\frac{i\sqrt{C}\sqrt{(A+t')}\cos\Theta}{\sqrt{(A+t)(A+t-t\cos^2\Theta)}}+Z\alpha'$$

und

$$Z\beta=\frac{\sqrt{\varphi}\sqrt{B+t'}\sin\Theta}{\sqrt{(B+t)(A+t-C\cos^2\Theta)}}-Z\beta'$$

Ist nun

$$C=A-B$$

sehr klein, so liegen α und β nahe bei K, und α', β' sind sehr klein. In diesem Falle ist aber

$$Z\alpha'=\left(1-\frac{E}{K}\right)\alpha'=\left(1-\frac{E}{K}\right)\cdot\frac{i\sqrt{A+t'}}{\sqrt{(t'-t'')}}=i\sqrt{C}\left(1-\frac{E}{K}\right)\frac{\cos\Theta}{\sqrt{A+C}}$$

und

$$Z\beta'=\left(1-\frac{E}{K}\right)\beta'=\left(1-\frac{E}{K}\right)\cdot\frac{\sqrt{-B+t''}}{\sqrt{(t'-t'')}}=\sqrt{C}\left(1-\frac{E}{K}\right)\frac{\sin\Theta}{\sqrt{A+t'}}$$

somit

$$Z\alpha=-i\sqrt{C}\left(\frac{\sqrt{(A+t')}}{A+t}\cos\Theta-\left(1-\frac{E}{K}\right)\frac{\cos\Theta}{\sqrt{(A+t')}}\right.$$

$$=-\frac{i\sqrt{C}\cos\Theta}{(A+t)K\sqrt{(A+t')}}(K(A+t')-(K-E)(A+t))$$

$$=-\frac{i\sqrt{C}\cos\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}\,K}((A+t)E-(t-t')K)$$

und

$$Z\beta=\frac{\sqrt{C}\sin\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}\,K}((A+t)E-(t-t')K)$$

Ferner ist

$$x^2=\frac{(A+t)(A+t')\cos^2\Theta}{A},\quad y^2=\frac{(A+t)(A+t')}{A}.\sin^2\Theta$$

$$z^2=-\frac{tt'}{A}$$

also

$$\frac{\sqrt{A x i Z\alpha}}{\sqrt{C}}\ \frac{\cos^2\Theta}{\sqrt{(A+t)}\,K}((A+t)E-(t-t')K)$$

und

$$\frac{\sqrt{A y Z\beta}}{\sqrt{C}} - \frac{\sin^2\Theta}{\sqrt{(A+t)}\,K}((A+t)E-(t-t')K)$$

folglich

$$\frac{\sqrt{A xi Z\alpha}}{\sqrt{C}}+\frac{\sqrt{A y Z\beta}}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{A+t}\ K}((A+t)E-(t-t')K)$$

nnd somit das Potential der Kreisscheibe mit dem Radins r

$$P' = \frac{4}{\sqrt{r^2+t}}((r^2+t)E-(t-t')K)+\frac{4K\sqrt{-tt'}}{r}(-iZ\gamma)$$

d) Besondere Lagen des Bezngpunktes.

a) Der Bezugspunkt liege im Unendlichen.

Weil in diesem Falle t sehr gross ist, so kann man den Integrationsweg so legen, dass nur sehr grosse Werte von u in Betracht kommen. Man darf deshalb neben u die Wurzeln t' und t'' nnd neben t die Constanten A und B vernachlässigen. Weil nun anch

$$x^2+y^2+z^2=t=r^2$$

so ist das Potential

$$P = \sqrt{AB}\int\frac{\sqrt{(u-r^2)}\,du}{u^2}$$ (Weg eine Schlinge ans dem Ostp. nm den Pol r^2).

Dnrch Einschaltnng des Horizontes in die Schlinge kann man den Weg in einen kleinen rücklänfigen Kreis um den Pol 0 verwandeln also

$$P = -i\sqrt{AB}\int\frac{\sqrt{(r^2-u)}}{u^2}du$$ Weg ein kl. rückläufiger Kreis um 0)

und nach Canchy

$$P = \frac{\pi\sqrt{AB}}{r} = \frac{\text{Masse}}{\text{Entfernnng}}$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der Focalhyperbel.

$$(t' = t'' = -B)$$

Aus der Integralformel für das Potential findet man

$$P = -i\sqrt{AB}\int\frac{\sqrt{(t-u)}}{(A+u)u}du$$ (Weg eine geschlossene Curve um die Pole $-A$ und 0).

Dieser Integrationsweg zerfällt nun in zwei Kreise, von welchen der eine den Pol $-A$ und der andere den Pol 0 rückläufig umgibt.

Es ist also

$$P = -i\sqrt{AB}\int\frac{\sqrt{(t-u)}}{(A+u)u}du$$ (Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol 0)

$$+\,i\sqrt{AB}\int\frac{\sqrt{(t+u)}}{(A+u)(-u)}du$$ (Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol $-A$)

und nach Cauchy erhält man

$$P = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{A+t'}+\sqrt{t}}$$

Für die Brennpunkte der Ellipse ist folglich

$$P = 2\pi\sqrt{B}.$$

c) Der Bezugspunkt liege auf dem Rande der ellipt. Scheibe.

$$(t = t' = 0)$$

Es ist

$$P = 2\sqrt{AB}\int\frac{\sqrt{u-t''}}{(A+u)(B+u)}du$$

$$= \frac{2\sqrt{AB}}{A-B}\int_0^\infty\left(\frac{A+t''}{A+u}+\frac{-B-t''}{B+u}\right)\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-t'')}}$$

Setzt man nun im ersten Terme

$$u = t''+(A+t'')\operatorname{cotg}^2\varphi$$

so wird

$$u-t'' = (A+t'')\operatorname{cotg}^2\varphi,\quad du = -(A+t'').2\operatorname{cotg}\varphi\,.\,\frac{1}{\sin^2\varphi}$$

also

$$\frac{du}{\sqrt{(u-t'')}} = -\frac{2\sqrt{(A+t'')}}{\sin^2\varphi}d\varphi,$$

$$\frac{A+t''}{A+u} = \sin^2\varphi$$

folglich

$$2\sqrt{AB}\int_0^\infty \frac{A+t''}{A+u}\cdot\frac{du}{\sqrt{(v-t'')}} = -4\sqrt{AB}\int\sqrt{(A+t'')}\,d\varphi$$

und setzt man

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{-t''}}$$

so ist das Integral

$$4\sqrt{AB}\,\sqrt{(A+t'')}\,\Theta$$

Im zweiten Terme setze man

$$u = t'' + (-B-t'')\cot^2\chi$$

nnd zugleich

$$\operatorname{tang} v = \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}$$

nnd verstehe v pos.; dann ist

$$v = \log\frac{\sqrt{-t''}+\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}},$$

$$\frac{du}{\sqrt{(u-t'')}} = -2\sqrt{-B-t''}\,\frac{d\chi}{\sin^2\chi}$$

$$\frac{-B-t''}{B+u} = \sin^2\chi$$

folglich

$$\int_0^\infty \frac{B+u}{-B-t''}\cdot\frac{du}{\sqrt{u-t''}} = 2\sqrt{-B-t''}\,v$$

Also

$$P = \frac{4\sqrt{AB}}{A-B}\left(\sqrt{(A+t'')}\,.\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{-t''}}\right)\right.$$

$$\left.+\sqrt{(-B-t'')}\log\left(\frac{\sqrt{-t''}+\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}}\right)\right)$$

Für das Ende der grossen Axe ist

$$t'' = -B$$

also

$$P = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(A-B)}}{\sqrt{B}}$$

und für das Ende der kleinen Axe ist

$$t'' = -A$$

also

$$P = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}} \cdot \log\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}}\right)$$

Auch diese Formel gestattet nicht unmittelbar den Uebergang zum Kreise. Wird aber $-t''$ durch $A - C\cos^2\Theta$ ersetzt, so erhält man

$$P = \frac{4\sqrt{AB}}{C}\left(\sqrt{C}.\cos\Theta.\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{C}\cos\Theta}{\sqrt{(A-C\cos^2\Theta)}}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{C}\sin\Theta\log\left(\frac{\sqrt{A-C\cos^2\Theta}+\sqrt{C}\sin\Theta}{\sqrt{B}}\right)\right)$$

und weil man nun für ein kleines C den Bogen durch die Tangente und den Logarithmus durch den Zusatz zu 1 ersetzen kann, so folgt

$$P = 4\sqrt{A} = 4r$$

wenn v der Radius des Kreises ist.

§. 13. Die Kraftcomponenten der elliptischen Scheibe.

Die 1. Abgeleiteten sollen aus folgender Form des Potentials abgeleitet werden:

$$P = \sqrt{AB}\int \frac{W}{U}\,dn$$ (Weg eine rückläufige Schlinge aus dem Ostp. um den Pol t).

Weil

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{W}\cdot\frac{x}{A+u},\quad \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{1}{W}\cdot\frac{y}{B+u},\quad \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{W}\cdot\frac{z}{u}$$

so erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial x} = X = -\sqrt{AB}\,x\int\frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{W.U}$$
$$= -2\sqrt{AB} = \int_t^\infty \frac{1}{A+u}\cdot\frac{du}{R},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = Y = -\sqrt{AB}\,y\int\frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{W.U}$$
$$= -2\sqrt{AB}\,y\int_t^\infty \frac{1}{B+u}\cdot\frac{du}{R}$$

(Weg wie oben.)

$$\frac{\partial P}{\partial z} = Z = -\sqrt{AB}\, z \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{W.U}$$

$$= -2\sqrt{AB}\, z \int_t^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{R}$$

(Weg wie oben.)

Aus diesen Formeln folgt, dass

$$xX+yY+zZ = -2\sqrt{AB}\int_t^\infty\left(\frac{x^2}{A+u}+\frac{y^2}{B+u}+\frac{z^2}{u}\right)\cdot\frac{du}{R}$$

$$= -2\sqrt{AB}\int_t^\infty (1-W^2)\cdot\frac{du}{R}$$

$$= -2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{du}{R} + 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{W^2}{R}du$$

und somit

$$P = T' + xX + yY + zZ$$

wenn T' das Pot. der Ellipse bedeutet.

Die Integrale für die Abgeleiteten zeigen ferner, dass die Kraftcomponenten X und Y nur für solche Lagen des Bezugpunktes unendlich werden können, für welche $t = t' = 0$ ist, also für Punkte der Randellipse, weil dann der Integrationsweg nicht mehr zwischen t und t' hindurch kann. Die Randellipse ist demnach für die Comp. X und Y eine Unstetigkeitscurve. Wir werden später sehen, dass Comp. Z für keine Punkte des Raumes unendlich wird, dass sie sich aber bei ihrem Durchgange durch die Ebene innerhalb der Ellipse sprungweise ändert. Aus früheren Formeln erhält man

$$X = 4K\left(\frac{\sqrt{B}\,i\,Z\alpha}{\sqrt{A-B}} - \frac{\sqrt{AB}\,x}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}\right),$$

$$Y = 4K\left(\frac{\sqrt{A}\,Z\beta}{\sqrt{(A-B)}} - \frac{\sqrt{AB}\,y}{(B+t)\sqrt{(t-t'')}}\right),$$

$$Z = 4K\left(-iZ\gamma - \frac{\sqrt{AB}\,z}{t\sqrt{(t-t'')}}\right)$$

Auch hier macht der Factor $\sqrt{A-B}$ im Nenner den unmittelbaren Uebergang zur Kreisscheibe unmöglich. Wir haben aber gefunden, dass für ein kleines $C = A-B$

$$\frac{\sqrt{B}\, i\, Z\alpha}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{A}\cos\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}}((A+t)E-(t-t')K)$$

und

$$\frac{\sqrt{A}\, Z\beta}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{A}\sin\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}K}((A+t)E-(t-t')K)$$

ist; folglich erhält man im Falle einer Kreisscheibe

$$X_1 = \frac{4\sqrt{A}\cos\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}}((A+t)E-(t-t')K) - \frac{4AKx}{(A+t)^{3/2}}$$

$$Y_1 = \frac{4\sqrt{A}\sin\Theta}{(A+t)\sqrt{(A+t')}}((A+t)E-(t-t')K) - \frac{4AKy}{(A+t)^{3/2}}$$

$$Z_1 = 4K\left(-iZ\gamma - \frac{Az}{t\sqrt{A+t}}\right)$$

Die Kraftcomponenten für besondere Lagen des Bezugspunktes

a) Der Bezugspunkt liege im Unendlichen.

Es ist

$$X = -\sqrt{AB}\,x\int\frac{du}{(A+u)u\sqrt{u-r^2}}$$ (Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um den Pol r^2).

Man verwandle nun die Schlinge durch Einschaltung des Horizontes in eine geschlossene Curve um die Pole $-A$ und 0, und weil sich die Wege auf der Realitätslinie zwischen $-A$ und 0 aufheben, so erhält man als neuen Weg zwei kleine rückläufige Kreise um die Pole $-A$ und 0. Man erhält also

$$X = i\sqrt{AB}\,x\int\frac{1}{\sqrt{r^2-u}(-u)}\cdot\frac{du}{A+u}$$ (Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol $-A$)

$$-i\sqrt{AB}\,x\int\frac{1}{(A+u)\sqrt{(r^2-u)}}\cdot\frac{du}{u}$$ (Weg ein rückläufiger Kreis um 0)

und mithin nach Cauchy

$$X = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cdot\cos(rx)$$

Ebenso findet man

$$Y = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cos(ry),$$

$$Z = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{r^2}\cos(rz)$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der Focalhyperbel

Man findet $(t' = t'' = -B, \quad y = 0)$

$$X = -\sqrt{AB}\, x \int \frac{du}{(A+u)(B+u)\sqrt{(u-t)}} \quad \text{(Weg eine Schlinge)}$$

$$= -i\sqrt{AB}\, x \int \frac{du}{(A+u)(B+u)\sqrt{(t-u)}} \quad \text{(Weg ein rückläufiger Kreis um } -B)$$

$$+ i\sqrt{AB}\, x \int \frac{du}{\sqrt{(t-u)(-B-u)}(A+u)} \quad \text{(Weg ein rückläufiger Kreis um den Pol } -A)$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{AB}\, x}{A-B}\left(\frac{1}{\sqrt{A+t}} - \frac{1}{\sqrt{B+t}}\right)$$

$$= -\frac{2\pi\sqrt{AB}\, x}{\sqrt{(A+t)(B+t)}\,(\sqrt{A+t}+\sqrt{B+t})}$$

Ebenso ist

$$Y = 0, \quad Z = -\frac{2\pi\sqrt{AB}\, z}{\sqrt{(B+t)t}\,(\sqrt{t}+\sqrt{B+t})}$$

nnd für die Brennpunkte der Ellipse

$$X = -\frac{2\pi x}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}, \quad Y = 0, \quad Z = -2\pi$$

c) Der Bezugspunkt liege in nnmittelbarer Nähe der Randellipse.

$$X = -2\sqrt{AB}\int_{\infty}^{t} \frac{x}{A+u}\cdot\frac{du}{R}$$

Um den log unendlich werdenden Teil abzutrennen, ersetze ich $\frac{1}{A+u}$ durch $\frac{1}{A+t} - \frac{u-t}{(A+t)(A+u)}$. Da

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_t^{\infty}\frac{du}{R}$$

gesetzt war, so hat man

$$X = -\frac{x}{A+t}T' + \frac{2\sqrt{AB}}{A+t}x\int_t^\infty \frac{u-t}{A+u}\cdot\frac{du}{R}$$

$$= \quad I \quad + \quad II$$

$$I = -\frac{x}{A+t}\cdot\frac{4\sqrt{AB}\,K}{\sqrt{(t-t'')}}$$

und weil

$$x = \frac{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{A}\sqrt{(A-B)}}$$

so erhält man

$$I = -\frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(A-t'')}}K$$

Nun ist

$$K(k^2) = -iL(l^2)$$

also

$$I = \frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\,\frac{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)(t-t'')}}\,iL(l^2)$$

Um Integral II zu berechnen, machen wir Substitution

$$u = t-(t-t')S^2v$$

also

$$\sqrt{u-t} = -i\sqrt{(t-t')}\,Sv,\quad \sqrt{u-t'} = \sqrt{(t-t')}\,Cv,$$

$$\sqrt{(u-t'')} = \sqrt{(t-t'')}\,Dv,$$

$$\frac{du}{R} = -\frac{2i\,dv}{\sqrt{(t-t'')}},$$

$$\frac{u-t}{A+u} = -\frac{(t-t')\,S^2v}{(A+t)\left(1+\frac{t-t'}{A+t}S^2v\right)}$$

Setzt man nun

$$\frac{t-t'}{A+t} = k^2S^2\alpha$$

also

$$S^2\alpha = \frac{t-t'}{A+t}\cdot\frac{t-t''}{t-t'} = \frac{t-t''}{A+t},$$

$$C^2\alpha = \frac{A+t''}{A+t},\quad D^2\alpha = \frac{A+t'}{A+t};$$

$$S\alpha = \frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{A+t}},\quad C\alpha = \frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{A+t}},\quad D\alpha = \frac{\sqrt{A+t'}}{\sqrt{A+t}},$$

so folgt

$$\alpha = K - \beta \quad (0 < \beta < K),$$

$$\frac{u-t}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{(t-t')S^2v}{(A+t)\left(1-\frac{t-t'}{A+t}S^2v\right)}\cdot\frac{2i\,dv}{\sqrt{(t-t'')}}$$

$$= \frac{2i(t-t')S^2v\,dv}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}\,(1-k^2S^2\alpha S^2v)}$$

$$= \frac{2i(t-t')}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{k^2 S\alpha\, C\alpha\, D\alpha\, S^2v\,dv}{k^2 S\alpha\, C\alpha\, D\alpha\,(1-k^2S^2\alpha S^2v)}$$

Nun ist

$$k^2 S\alpha\, C\alpha\, D\alpha = \frac{t-t'}{t-t''}\cdot\frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(A+t)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)}}\cdot\frac{\sqrt{A+t'}}{\sqrt{A+t}}$$

also

$$\frac{1}{k^2 S\alpha\, C\alpha\, D\alpha} = \frac{\sqrt{(t-t'')}\,(A+t)^{\frac{3}{2}}}{(t-t')\,\sqrt{(A+t')(A+t'')}},$$

$$\frac{t-t'}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{1}{k^2 S\alpha\, C\alpha\, D\alpha} = \frac{\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}$$

und somit ist

$$\int_t^\infty \frac{u-t}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{2i\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}\int_0^L \frac{k^2 S\alpha\, C\alpha\, D\alpha\, S^2v\,dv}{1-K^2S^2\alpha S^2v}$$

$$= \frac{2i\sqrt{(A+t)}}{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}\,\Pi(L,\alpha)$$

Weil

$$\frac{2\sqrt{AB}\,x}{A-t} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+t}\cdot\frac{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{A}\sqrt{(A-B)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\cdot\frac{\sqrt{(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{(A+t)}}$$

so ist

$$\frac{2\sqrt{AB}}{A+t}\,x\int_t^\infty\frac{u-t}{A+u}\cdot\frac{du}{R} = \frac{4\sqrt{B}\,i\,\Pi(L,\alpha)}{\sqrt{A-B}}$$

und weil

$$\Pi(L,\alpha) = L\,Z\alpha - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi\alpha}{2K}$$

so ist schliesslich

$$X = \frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\left(iL\,Z\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\alpha}{2K} + iL\frac{C\alpha\, D\alpha}{S\alpha}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}}\left(iL\left(Z\alpha + \frac{C\alpha\, D\alpha}{S\alpha}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\alpha}{2K}\right)$$

Dieser Ausdruck soll nach t, t' mit Vernachlässigung der mit $\log(t-t')$ multiplicirten zweiter Ordnung entwickelt werden. Weil

$$iL = (1+\tfrac{1}{4}k^2)\log\frac{k}{4} + \tfrac{1}{4}k^2$$

mit Vernachlässigung von $k^4 \log k, \ldots$;

$$k^2 = \frac{t-t'}{t-t''} = \frac{(t-t')}{-t''}\left(1+\frac{t}{-t''}\right)^{-1} = \frac{t-t'}{-t''}\left(1-\frac{t}{(-t'')}+\ldots\right)$$

$$\log\frac{k}{4} = \tfrac{1}{2}\log\frac{k^2}{16} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{t-t'}{-16t''}\right)\left(1-\frac{t}{(-t'')}+\ldots\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{t-t'}{-16t''} - \tfrac{1}{2}\frac{t}{-t''} + \ldots$$

also

$$iL = \left(1+\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{-t''} - \frac{t(t-t')}{4(-t'')^2}+\ldots\right)\times\left(\tfrac{1}{2}\log\frac{t-t'}{-16t''} - \tfrac{1}{2}\frac{t}{(-t'')}+\ldots\right)$$

$$+\tfrac{1}{4}\frac{(-t'')}{t-t'} - \tfrac{1}{4}\frac{(t-t')t}{(-t'')^2}+\ldots$$

$$= \left(1+\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{(-t'')}\right)\times\tfrac{1}{2}\log\frac{t-t')}{(-16t'')} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{t}{(-t'')} + \tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{(-t'')}+\ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{t-t'}{-16t''}\times\left(1+\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{(-t'')}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{(-t'')}+\ldots$$

Ferner ist

$$Zx = \int_0^x \left(B^2x - \frac{E}{K}\right)dx$$

und weil in unserem Falle $x < K$ ist, so setze man

$$\sin\varphi = Sx$$

also

$$dx = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

folglich

$$Zx = \int\left((1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \frac{E}{K}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)d\varphi$$

Für ein kleines k^2 ist auch

$$K=\frac{\pi}{2}\left(1+\tfrac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\dots\right)$$

und

$$E=\frac{\pi}{2}\left(1-\tfrac{1}{4}k^2-\frac{3}{64}k^4+\dots\right)$$

folglich

$$\frac{\pi}{2K}=1-\tfrac{1}{4}k^2-\frac{5}{64}k^4+\dots$$

also

$$\frac{E}{K}=1-\tfrac{1}{2}k^2-\frac{4}{64}k^4+\dots$$

Ferner ist auch

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{k^2}{2}(1-\cos 2\varphi)\right)^{1/2}$$

$$=1-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}\cos 2\varphi-\frac{k^4}{32}(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)+\dots$$

$$=1-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}\cos 2\varphi-\frac{k^4}{32}\left(1-2\cos 2\varphi+\frac{\cos 4\varphi+1}{2}\right)+\dots$$

$$=1-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}\cos 2\varphi-\frac{3k^4}{64}+\frac{k^4}{16}\cos 2\varphi-\frac{k^4\cos 4\varphi}{64}+\dots$$

und ebenso $(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{4}\cos 2\varphi+\frac{9}{64}k^4-\frac{3}{16}k^4\cos 2\varphi$$

$$+\frac{3}{64}k^4\cos 4\varphi+\dots,$$

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{E}{K}=1-\tfrac{1}{4}k^2-\tfrac{1}{4}k^2\cos 2\varphi-\frac{3}{64}k^4-\frac{1}{16}k^4\cos 2\varphi$$

$$+\frac{3}{64}k^4\cos 4\varphi+\dots$$

und

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}-(1-k^2\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{E}{K}=\tfrac{1}{2}k^2\cos 2\varphi$$

$$+\frac{1}{16}k^4(2\cos 2\varphi-\cos 4\varphi)+\dots$$

also

$$Zx=\int_0\left(\frac{1}{2}k^2\cos\,2\varphi+\frac{1}{16}k^4(2\cos 2\varphi-\cos 4\varphi)\,d\varphi\right.$$

$$=\frac{1}{4}\,k^2\sin 2\varphi+\frac{1}{16}k^4(\sin 2\varphi-\tfrac{1}{4}\sin 4\varphi)+\dots$$

$$=\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{k^2}{2}+\frac{1}{16}k^4(1+2\sin^2\varphi)\right)+\dots$$

$$= Sx Cx \left(\frac{k^2}{2} + \frac{1}{16} k^4 (1 + 2S^2 x)\right) + \ldots$$

$$= \frac{k^2}{2} Sx Cx + \frac{k^4}{16} (Sx Cx + 2S^3 x Cx) + \ldots$$

die Entwicklung der Z Function hat also für unsern Fall folgende Form:

$$Z\alpha = \frac{k^2}{2} S\alpha C\alpha + \frac{k^4}{16} (S\alpha C\alpha + 2S^3\alpha C\alpha) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t-t'}{-t''} \cdot \frac{\sqrt{-t''} \cdot \sqrt{(A+t'')}}{A} + \ldots = \tfrac{1}{2} \frac{t-t'}{A} \operatorname{tg} \theta$$

wenn

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{-t''}}$$

also

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{A}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{(A+t'')}}{\sqrt{A}}$$

daher ist

$$iL\, Z\alpha = \tfrac{1}{4} \frac{t-t'}{A} \operatorname{tg} \theta . \log \frac{t-t'}{-16t''}$$

Es sei

$$\alpha = K - \beta$$

man soll $\frac{\pi\alpha}{2K}$ berechnen.

$$S\alpha = \frac{C\beta}{D\beta} = \frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{A+t'}} = \frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{A}} \left(1 + \frac{t'}{A}\right)^{-1/2}$$

$$= \sin \theta \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{t'}{A}\right)$$

Wenn

$$\operatorname{am} \alpha = \varphi$$

also

$$\sin\varphi = \sin \theta \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t'}{A}\right)$$

so folgt hieraus

$$\varphi = \theta - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \theta \frac{t'}{A}$$

Nun ist

$$\alpha = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{(- k^2 \sin^2 \varphi)}}$$

$$= \int_0 (1 + \tfrac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi) d\varphi = \varphi + \tfrac{1}{4} k^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

also

$$\frac{\pi\alpha}{2K} = (1-\tfrac{1}{4}k^2)(\varphi+\tfrac{1}{4}k^2(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)) = \varphi-\tfrac{1}{4}k^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= \theta-\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\theta.\frac{t'}{A}-\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{-t''}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \theta-\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}.\frac{t'}{A}-\tfrac{1}{4}.\frac{t-t'}{-t''}\operatorname{tg}\theta\cos^2\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\left(\frac{2t'}{A}+\frac{t-t'}{A}\right)$$

und endlich

$$\frac{\pi\alpha}{2K} = \theta-\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\theta.\frac{t+t'}{A}$$

also

$$iL\,Z\alpha+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\alpha}{2K}-\theta-\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\left(\frac{t-t'}{A}\log\frac{-16t''}{t-t'}+\frac{t+t'}{A}\right)$$

Ferner ist

$$\frac{C\alpha\,D\alpha}{S\alpha} = \int\frac{\sqrt{(A-t'')}}{\sqrt{-t''+t}}.\frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(A+t)}} = \frac{\sqrt{(A+t''}}{\sqrt{-t''}}\times$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\frac{t'}{A}-\frac{1}{2}\frac{t}{-t''}-\tfrac{1}{2}\frac{t}{A}\right)$$

$$= \operatorname{tg}\theta_1\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{t-t'}{A}+\frac{t}{-t''}\right)\right)$$

Weil

$$\left(1+\tfrac{1}{4}\frac{t-t'}{-t''}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{t-t'}{A}+\frac{t}{-t''}\right)\right) = 1-\tfrac{1}{4}\left(\frac{t+t'}{-t''}+2\frac{t-t'}{A}\right)$$

so ist

$$iL\,\frac{C\alpha\,D\alpha}{S\alpha} = -\tfrac{1}{2}\log\frac{-16t''}{t-t'}\operatorname{tg}\theta\left(1-\tfrac{1}{4}\left(\frac{t+t'}{-t''}+2\frac{t-t'}{A}\right)\right)$$

$$-\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\theta.\frac{t+t'}{-t''}$$

folglich

$$X = \frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{(A-B)}}\left[-\tfrac{1}{2}\log\frac{-16t''}{t-t'}\operatorname{tg}\theta\left(1-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{-t''}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{tg}\theta}{4}(t+t')\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{-t''}\right)+\theta\right]$$

Für den Fall einer Kreisscheibe ist

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{A+t''}}{\sqrt{-t''}} = \frac{\sqrt{C}\cos\theta}{\sqrt{A}}$$

also

$$X_1 = 4\sqrt{A}\left[-\tfrac{1}{2}\log\frac{16A}{t-t'}\,\frac{\cos\theta}{\sqrt{A}}\left(1-\tfrac{1}{4}\,\frac{t+t'}{A}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\theta}{4\sqrt{A}}(t+t')\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{A}\right)\right]$$
$$= 2\cos\theta\left[-\log\frac{16A}{t-t'}\left(1-\tfrac{1}{4}\,\frac{t+t'}{A}\right)-\frac{(t+t')}{A}\right]$$
$$= 2\left[-\log\frac{16A}{t-t'}\left(1-\tfrac{1}{4}\,\frac{t+t'}{A}-\frac{(t+t')}{A}\right]\right.$$

$$Y = -2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{y}{B+u}\,\frac{du}{R}.$$

Um auch hier den unendlich werdenden Teil abzutrennen, ersetze man $\frac{1}{B+u}$ durch $\frac{1}{B+t}-\frac{u-t}{(B+t)(B+u)}$ Da

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{du}{R}$$

so ist

$$Y = -\frac{y}{B+t}T' + \frac{2\sqrt{AB}}{B+t}\,y\int_t^\infty\frac{u-t}{B+u}\cdot\frac{du}{R}$$

$$Y = I + II$$

Weil

$$\frac{y}{B+t} = \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B(A-B)}}\cdot\frac{\sqrt{(B+t')}}{\sqrt{(B+t)}}$$

$$T' = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{(t-t'')}}\cdot\frac{\Gamma(l^2)}{i}$$

so ist

$$I = \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}}\,\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''-t}}\cdot\frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}\cdot iL$$
$$= \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}}\,\frac{\sqrt{(-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{t}{-t''}+\frac{t-t'}{B}\right)\right)$$
$$\times\left[\tfrac{1}{2}\log\frac{-16t''}{t-t'}\left(1-\tfrac{1}{4}\,\frac{t+t'}{-t''}\right)-\tfrac{1}{4}\,\frac{t+t'}{-t''}\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}} \cdot \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}} \times$$

$$\left[-\tfrac{1}{2}\log\frac{-16t''}{t-t'} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{t+t'}{-t''} + 2\,\frac{t-t''}{B}\right)\right) - \tfrac{1}{4}\,\frac{t-t'}{-t''}\right]$$

Um *II.* zu berechnen machen wir folgende Substitution

$$u = t - (t-t')\,S^2v$$

also

$$S^2v = -\frac{u-t}{t-t''} = \frac{t-u}{t-t'}$$

$$C^2v = \frac{u-t'}{t-t'} \quad D^2v = \frac{u-t''}{t-t''}$$

wo also v von 0 bis L wächst. Es ist nun

$$\frac{u-t}{B+u} \cdot \frac{du}{B} = -2\,\frac{t-t'}{B+t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-t''}} \cdot \frac{S^2v}{1-\frac{t-t'}{B+t}S^2v} \cdot \frac{dv}{i}$$

Man setze daher

$$k^2S^2b = \frac{t-t'}{B+t}$$

nnd kann dann

$$Sb = \frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{B+t}}, \quad Cb = -\frac{i\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B+t}}, \quad Db = \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}$$

annehmen, so dass b zwischen K nnd $K+L$ liegt nnd dass

$$k^2\,Sb\,Cb\,Db = -i\,\frac{t-t'}{B+t} \cdot \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{t-t''}} \cdot \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}$$

Weil

$$\frac{2\sqrt{AB}}{B+t}\,y = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \cdot \sqrt{-B-t''} : \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}$$

so hat man

$$II = -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \int_0^L \frac{t-t'}{B+t} \cdot \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(t-t'')}} \cdot \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}} \cdot$$

$$\frac{S^2v}{1-k^2S^2bS^2v} \cdot \frac{dv}{i}$$

$$= -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}} \int_0^L \frac{k^2\,Sb\,Cb\,Db\,S^2v}{1-k^2S^2bS^2v}\,dv = -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}\,\Pi(L, b)$$

$$= -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}\left(L\,Zb - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\,\pi\,b}{2K}\right)$$

Wenn

$$b = K + b'$$

so ist b' nördlich lateral und liegt zwischen 0 und L. Weil

$$b' = b - K$$

so sind

$$Sb' = -S(K-b) = -\frac{Cb}{Db}, \quad Cb' = C(K-b) = l\,\frac{Sb}{Db}$$

$$Db' = D(K-b) = \frac{l}{Db}$$

Da nun

$$l = \frac{\sqrt{t'-t''}}{\sqrt{t-t''}}$$

so sind

$$Sb' = \frac{i\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B+t'}}, \quad Cb' = \frac{\sqrt{t'-t''}}{\sqrt{B+t'}} \quad Db' = \frac{\sqrt{t'-t''}}{\sqrt{(t-t'')}}\,\frac{\sqrt{B+t}}{\sqrt{B+t'}}$$

Aus

$$Z(K+b) = Zb' - k^2\,\frac{Sb'\,Cb'}{Db'}$$

folgt, dass

$$Zb = Zb' - i\,\frac{(t-t')\sqrt{(-B-t'')}}{\sqrt{(t-t'')(B+t)(B+t')}}$$

Daher ist

$$II = -\frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{(A-B)}}\left[L\left(\frac{Zb' - i(t-t')\sqrt{(-B-t'')}}{\sqrt{(t-t'')(B+t)(B+t')}}\right) + \frac{i\pi b'}{2K}\right]$$

Annähernde Berechnung von II. Wenn $\mathrm{am}\,b' = i\chi$, so ist b' gleich

$$b' = i\int_0 \frac{d\chi}{\sqrt{(1+k^2\sin^2\chi)}} = i\int_0 (1 - \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\chi)\,d\chi$$

$$= i(\chi - \tfrac{1}{4}k^2(\sin\chi\cos\chi - \chi)).$$

Ferner ist

$$Sb' = i\sin\chi$$

also

$$\sin\chi = \frac{\sqrt{(-B-t''}}{\sqrt{B+t'}} = \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}}\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{t'}{B}\right)$$

Man setze daher

$$\sin\mu = \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}}$$

folglich

$$\mathfrak{cos}\,\mu = \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{B}}$$

$$\mu = \log\frac{\sqrt{-t''}+\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B}}$$

Nun folgt aus obiger Formel

$$\chi = \mu - \eta$$

also

$$\mathfrak{sin}\,\chi = \mathfrak{sin}\,(\mu - \eta) = \mathfrak{sin}\,\mu - \eta\,\mathfrak{cos}\,\mu$$

also

$$\mathfrak{cos}\,\mu\,.\,\eta = \mathfrak{sin}\,\mu\,.\,\tfrac{1}{2}\frac{t'}{B}$$

oder

$$\eta = \mathfrak{tg}\,\mu\,.\,\tfrac{1}{2}\,\frac{t'}{B}$$

folglich

$$\chi = \mu - \tfrac{1}{2}\,\frac{t'}{B}\mathfrak{tg}\,\mu$$

oder

$$\chi = \mu - \tfrac{1}{2}\,\frac{t'}{B}\,\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}$$

Weil

$$\frac{\pi}{2K} = 1 - \tfrac{1}{4}\,k^2$$

so ist

$$\frac{i\pi b'}{2K} = -\chi + \tfrac{1}{4}k^2\,\mathfrak{sin}\,\chi\,\mathfrak{cos}\,\chi$$

$$= -\mu + \tfrac{1}{4}\,\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\left(2\,\frac{t'}{B} + \frac{t-t'}{B}\right)$$

$$= -\mu + \tfrac{1}{4}\,\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\,\cdot\,\frac{t+t'}{B}$$

$$Zb' = \tfrac{1}{2}k^2\,Sb'\,Cb' = \tfrac{1}{2}\,\frac{i(t-t')\,\sqrt{-B-t''}}{B\,\sqrt{-t''}}$$

$$Zb' - \frac{i(t-t')\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(t-t'')\,(B+t)\,(B+t')}} = -\tfrac{1}{2}\frac{i(t-t'')\,\sqrt{-B-t''}}{B\sqrt{-t''}} + \ldots$$

$$L = i\,.\log\frac{-16t''}{t-t'} + \ldots$$

Also

$$\Pi = \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}\left(\mu - \tfrac{1}{4}\,\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\,.\left(\frac{t-t'}{B}\log\frac{-16t''}{t-t''} + \frac{t+t'}{B}\right)\right)$$

Endlich

$$Y = \frac{4\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}}\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\log\frac{-16t''}{t-t'}\cdot\left(1-\tfrac{1}{4}\frac{t+t'}{-t''}\right)\right.$$
$$\left.+\mu-\tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{-t''}}\frac{B-t''}{-Bt''}(t+t')\right]$$

$$Z = -2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{z}{u}\cdot\frac{du}{R}$$

Wollte man dasselbe Argument v, das durch

$$u = t-(t-t')S^2v$$

definirt war, behalten, so bekäme man wegen des Nenners u bei der Π Function k^2S^2 (Parameter) $= \frac{t-t'}{t} > 1$ und der Parameter läge zwischen L und $K+L$. Man kann aber einen reellen Parameter bekommen, wenn man $L-$ (früheres Argument) als Argument wählt und auch mit v bezeichnet. Dann ist

$$u = t - \frac{t-t''}{S^2v}$$

also

$$Sv = \frac{i\sqrt{t-t''}}{\sqrt{u-t}};\quad \sqrt{u-t} = \frac{i\sqrt{t-t''}}{Sv},\quad \sqrt{u-t'} = \bar{i}\sqrt{(t-t'')}\,\frac{Dv}{Sv}$$

$$\sqrt{(u-t'')} = i\sqrt{(t-t'')}\,\frac{Cv}{Sv},\quad R = -i(t-t'')^{\frac{3}{2}}\frac{Cv\,Dv}{S^3v}$$

$$du = -2(t-t'')\frac{Cv\,Dv}{S^3v}dv$$

$$\frac{du}{R} = \frac{2}{\sqrt{(t-t'')}}\,\frac{dv}{i}$$

also

$$Z = -\frac{4i\sqrt{tt't''}}{(t-t'')^{\frac{3}{2}}}\int_0^L \frac{S^2v\,dv}{1-k^2S^2cS^2v}$$

wenn z pos. und

$$k^2S^2c = \frac{t}{t-t''}$$

Für ein neg. z hätte man den entgegengesetzten Ausdruck erhalten. Man kann

$$Sc = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}}\qquad Cc = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{t-t'}}\qquad Dc = \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

$$0 < c < K$$

annehmen. Dann ist

$$k^2 Sc\, Cc\, Dc = \frac{\sqrt{t\,t'\,t''}}{(t-t'')^{\frac{3}{2}}}$$

also

$$Z = -4i\Pi(L,c) = -4i\left(LZc\,\frac{\pi}{2i} - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi c}{2K}\right)$$

Wenn t und t', folglich auch k^2, als sehr klein erster Ordnung gelten und man die zweite Ordnung, multipl. mit $\log \frac{-16t''}{t-t'}$ vernachlässigt), so kann man c durch einen Winkel ersetzen; und damit dieser in der Ebene der Scheibe ausserhalb der Ellipse verschwinde, muss er zugleich mit t', also mit Cc verschwinden. Man setze daher

$$\mathrm{am}c = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

damit

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-t'}}$$

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{(t-t')}}$$

werde. Dann ist

$$\frac{\pi c}{2K} = \frac{\pi}{2} - \lambda - \tfrac{1}{4}k^2 \sin\lambda\cos\lambda = \frac{\pi}{2} - \lambda - \tfrac{1}{4}\,\frac{\sqrt{-tt'}}{-t''}$$

$$Zc = \tfrac{1}{2}k^2\sin\lambda\cos\lambda = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-tt'}}{-t''}$$

$$\frac{L}{i}\,Zc = \tfrac{1}{4}\,\frac{\sqrt{-tt'}}{-t''}\log\frac{-16t''}{t-t'}$$

Da nun

$$Z = \frac{4L}{i}\,Zc + 4\left(\frac{\pi c}{2K} - \frac{\pi}{2}\right)$$

ist, so ergiht sich

$$Z = -4\lambda + \frac{\sqrt{-tt'}}{-t''}\left(\log\frac{-16t''}{t-t'} - 1\right)$$

Das durch den Bezugspunkt gehende zweischalige Hyperboloid (t'') schneide den Rand der Scheibe im Punkte $(X, Y, 0)$. Den Abstand s beider Punkte kann man wegen seiner Kürze (insofern das kleine Stück des rechtwinklig schneidenden Hyperboloides als eben gilt) als kürzesten Abstand des Bezugspunktes vom Scheibenrande ansehen. Für diesen Abstand s haben wir aber früher den Ausdruck

Digitized by Google

$$s = \frac{t-t'}{2} \cdot \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{AB}}$$

erhalten.

$$s \times \frac{-16t''}{t-t'} = \frac{8.(-t'')^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{AB}}$$

ist endlich. Man kann daher den Unstetigkeitslogarithmus

$$\log \frac{-16t''}{t-t'}$$

durch $\log \frac{1}{s}$ ersetzen, wenn man daneben endliche Werte vernachlässigt, wie bald in den Unendlichkeitstermen von X, Y geschehen soll. Setzt man nun für den nächsten Augenblick

$$r^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2$$

wo

$$x = \frac{\sqrt{(A+t)(A+t')(A+t'')}}{\sqrt{A(A-B)}} = X\left(1+\frac{t+t'}{2A}\right) = X + \frac{t+t'}{2A}\frac{\sqrt{A(A+t'')}}{\sqrt{(A-B)}}$$

$$y = \frac{\sqrt{(B+t)(B+t')(-B-t'')}}{\sqrt{B(A-B)}} = Y\left(1+\frac{t+t'}{2B}\right)$$

$$= Y + \frac{t+t'}{2B} \cdot \frac{\sqrt{B(-B-t'')}}{\sqrt{(A-B)}}$$

also

$$x - X = \frac{t+t'}{2\sqrt{AB}\sqrt{(A-B)}} \cdot \sqrt{B(A+t'')}$$

$$y - Y = \frac{t+t'}{2\sqrt{AB}\sqrt{(A-B)}} \cdot \sqrt{A(-B-t'')}$$

und

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 = \frac{(t+t')^2(-t'')}{4AB}$$

folglich

$$r = \frac{t+t'}{2} \cdot \frac{\sqrt{-t''}}{\sqrt{AB}}$$

Man kann sich r als Projection der kleinen Strecke s auf die Ebene der Ellipse denken. Weil s im Raume normal zur Ellipse ist, so ist es auch r in deren Ebene. Wenn $t' = 0$, so liegt der Punkt (x, y, z) in der Ebene der Ellipse ausserhalb der Curve, und r ist dann pos. Die Proj. des Punktes liegt also ausserhalb, wenn $t+t'$ pos., innerhalb, wenn $t+t'$, folglich auch r, neg. ist. r und s sind Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, s dessen Hypotenuse. Der Cosinus des Winkels, den s mit r bildet, ist

$$\frac{r}{s} = \frac{t+t'}{t-t'}.$$

Weil aber

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}},$$

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{(t-t')}}$$

so ist

$$\frac{t+t'}{t-t'} = \cos^2\lambda - \sin^2\lambda = \cos 2\lambda$$

die Strecke s bildet also mit der nach anssen gerichteten (in deren Ebone befindlichen) Normale der Ellipse den Winkel 2λ; man hat

$$r = s\cos 2\lambda, \quad z = s\sin 2\lambda$$

In tiefster Nähernng ist

$Z = -4\lambda$ (wenn man das weglässt, was im Rande verschwindot.

Wenn nnn der Winkel 2λ von $-\pi$ bis zn $+\pi$ wächst, so dass die Strecke s um den Pnnkt des Randes, von dem sie ausgeht, eine ganze pos. Drehung ausführt, so nimmt die Kraftcomp. Z ununterbrochon von 2π bis auf -2π ab.

Bedontet μ den Winkel, den die Normale der Ellipse mit der x Axe bildet, so ist

$$x - X = r\cos\mu, \quad y - Y = r\sin\mu$$

folglich

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{B(A+t'')}}{\sqrt{(A-B)(-t'')}}$$

$$\sin\mu = \frac{\sqrt{A(-B-t'')}}{\sqrt{(A-B)(-t'')}}$$

Die nnendlich werdenden Anfangsterme der Ausdrücke für die zwei ersten Abgeleiteten (Kraftcomp.) waren aber

$$X = -\frac{2\sqrt{B(A+t'')}}{\sqrt{(A-B)(-t'')}}\log\frac{-16t''}{t-t'}$$

$$Y = -\frac{2\sqrt{A(-B-t'')}}{\sqrt{(A-B)(-t'')}}\log\frac{-16t''}{t-t'}$$

nnd für diese kann man also auch

$$X = -2\cos\mu \log\frac{1}{s}, \quad Y = -\sin\mu \log\frac{1}{s}$$

setzen.

Aus der allgemeinen Theorie des Potentials ist bekannt, dass die Kraftcomponente eine Fläche, welche mit Masse von variabler Dichtigkeit belegt ist, in der Richtung der Normale sich beim Durchgange durch dieselbe sprungweise ändert und zwar um $4\pi\varrho$, wenn ϱ die Dichtigkeit im Durchgangspunkte bezeichnet, und die Fläche in neg. Richtung passirt wird. Dieser Satz wird gewöhnlich mittelst des Gaussischen Lehrsatzes bewiesen; allein er kann auch durch eine einfache Integration gefunden werden. Zu diesem Zwecke grenze ich auf der Fläche ein kleines, kreisförmiges Element ab und errichte im Mittelpunkte derselben eine Normale, deren pos. Seite nach aussen gerichtet sein soll. Es ist nun zu untersuchen, was aus der Kraftcomp. in der Richtung dieser Normale für den Durchgangsp. wird, wenn die Fläche in pos. oder neg. Sinne von dem Bezugspunkte passirt wird. Liegt der Bezugspunkt auf der pos. Seite der Normale, so sei die Kraftcomp. der Fläche in der Richtg. der Normale mit $\overset{+}{N}$, liegt er aber auf der neg. Seite, so sei sie mit $\overset{-}{N}$ bezeichnet. Wird nun die Normale von dem Bezugspunkte in pos. Sinne durchlaufen, so erhält man für den Durchgangsp.

$$\overset{+}{N} = A_0 + a$$

wo A_0 die Kraftcomp. des ausserhalb der kleinen Kreisscheibe liegenden Teiles der Fläche ist, während sich a nur auf die abgegrenzte Kreisscheibe bezieht. Wird hingegen die Fläche in neg. Sinne passirt, so erhält man für den Durchgangsp.

$$\overset{-}{N} = A_0 + a_1$$

wo sich a_1 nur auf das kleine abgegrenzte Flächenstück bezieht. Der Unterschied ist also

$$\overset{+}{N} - \overset{-}{N} = a - a_1$$

und man hat nun noch die a zu berechnen. Der Mittelpunkt des abgegrenzten, kreisförmigen Flächenelementes werde als Ursprung eines neuen Coordinatensystems gewählt, dessen pos. z Axe mit der pos. Normale zusammenfällt. Der Bezugsp. hat dann die Coordinaten (0, 0, z). a sei der Radius der Scheibe, r die Entfernung des Bezugspunktes von einem Punkte derselben und h Radius eines auf dem Flächenelemente liegenden Kreises, wo $0 < h < a$. Das Flächenelement der Kreisscheibe ist demnach $2\pi h\,dh$, und weil für die-

selbe ϱ als constant angesehen werden kann, so ist das Potential derselben

$$\text{Pot.} = 2\pi\varrho \int_0^a \frac{h\,dh}{r}$$

Nun ist

$$r^2 = h^2 + z^2$$

also

$$r\,dr = h\,dh$$

folglich ist für ein pos. z

$$\overset{+}{\text{Pot.}} = 2\pi\varrho \int_z^{\sqrt{a^2+z^2}} dr = 2\pi\varrho\sqrt{a^2+z^2} - z)$$

und für ein neg. z

$$\overset{-}{\text{Pot.}} = 2\pi\varrho(\sqrt{a^2+z^2} + z) \quad \text{also für} \quad z = 0$$

$$\text{Pot.} = 2\pi\varrho a$$

Das Potential einer stetig gekrümmten, mit Masse von variabler Dichtigkeit belegten Fläche hat also keine Unstetigkeitspunkte. Aus obigen Formeln für das Potential folgt

$$\frac{\partial \overset{+}{\text{Pot.}}}{\partial z} = 2\pi\varrho\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - 1\right), \qquad \frac{\partial \overset{-}{\text{Pot.}}}{\partial z} = 2\pi\varrho\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} + 1\right)$$

und also für den Ursprung

$$\frac{\partial \overset{+}{\text{Pot.}}}{\partial z} = -2\pi\varrho, \quad \frac{\partial \overset{-}{\text{Pot.}}}{\partial z} = 2\pi\varrho$$

Es ist demnach

$$a = -2\pi\varrho \quad \text{und} \quad a_1 = 2\pi\varrho$$

folglich

$$\overset{+}{N} = A_0 - 2\pi\varrho, \quad \overset{-}{N} = A_0 + 2\pi\varrho$$

also

$$\overset{+}{N} - \overset{-}{N} = -4\pi\varrho$$

Auf diesen Satz nun soll die Kraftcomp. Z der elliptischen Scheibe geprüft werden. Wir hatten

$$Z = -\sqrt{AB}\int \frac{z}{u} - \frac{du}{R}$$ (Weg eine rückläufige Schlinge aus dem Ostp. allein um den Pol t).

Durch Einschalten des Horizontes in die Schlinge erhält man nun

$$Z = -i\sqrt{AB}\int \frac{z}{u}\cdot\frac{du}{R}$$ (Weg ein kleiner rückläufiger Kreis allein um den Pol 0)

$$+ i\sqrt{AB}\int \frac{z}{(-u)}\,\frac{du}{R'}$$ (Weg eine Curve um die Pole t' und t'')

und nach Cauchy erhält man demnach für ein pos. z

$$Z = -\,2\pi + i\sqrt{AB}\int \frac{z}{(-u)}\cdot\frac{du}{R'}$$ (Weg wie oben)

und für ein neg. z

$$\overline{Z} = 2\pi - i\sqrt{AB}\int \frac{z}{-u}\cdot\frac{du}{R'}$$ (Weg wie vorhin)

Da nun die Integrale auch für $z = 0$ einen endlichen Wert behalten, so verschwinden für diesen Fall die zweiten Terme, und man bekommt für einen Punkt der Scheibe

$$\overset{+}{Z} = -2\pi,\quad \overline{Z} = +2\pi$$

also

$$\overset{+}{Z} - \overline{Z} = -4\pi$$

was der Dichtigkeit 1 entspricht.

§. 14. Berechnung des Differentialparameters zweiter Ordnung.

Um den Differentialparameter zu berechnen, gehe ich von den Integralausdrücken der ersten Abgeleiteten aus und benutze als Integrationsweg die Schlinge, welche aus dem Ostpunkte allein um den Pol t geworfen ist. Weil für alle Punkte der Randellipse die Comp. X und Y unendlich werden und die ganze elliptische Scheibe für die Comp. Z eine Unstetigkeitsfläche ist, so müssen wir alle diese Punkte von der nachfolgenden Betrachtung ausschliessen. Weil

$$\frac{\partial \frac{1}{W}}{\partial x} = -\frac{1}{W^2}\cdot\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{W^3}\cdot\frac{x}{A+u},\quad \frac{\partial \frac{1}{W}}{\partial y} = \frac{1}{W^3}\cdot\frac{y}{B+u}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{W}}{\partial z} = \frac{1}{W^3}\cdot\frac{z}{u}$$

so ist

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\sqrt{AB}\int\left(\frac{x}{A+u}\right)^2 \cdot \frac{du}{UW^3} - \sqrt{AB}\int \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{UW}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\sqrt{AB}\int\left(\frac{y}{B+u}\right)^2 \cdot \frac{du}{UW^3} - \sqrt{AB}\int \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{UW}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = -\sqrt{AB}\int\left(\frac{z}{u}\right)^2 \cdot \frac{du}{UW^3} - \sqrt{AB}\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{UW}$$

(Weg wie früher)

folglich

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = -\sqrt{AB}\int \Sigma\left(\frac{x}{A+u}\right)^2 \cdot \frac{\partial u}{UW^3} - \sqrt{AB}\int \Sigma\left(\frac{1}{A+u}\right) \cdot \frac{du}{UW}$$

Nun ist

$$\Sigma\left(\frac{x}{A+u}\right)^2 = 2W \cdot \frac{\partial W}{\partial u}$$

$$\Sigma \frac{1}{A+u} = \frac{\partial \log U^2}{\partial u} = \frac{2}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial u}$$

also

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = 2\sqrt{AB}\int\left(\frac{1}{U} \cdot \frac{\partial \frac{1}{W}}{\partial u} + \frac{1}{W} \cdot \frac{\partial \frac{1}{U}}{\partial u}\right) du$$

$$= \left[2\sqrt{AB} \cdot \frac{1}{UW}\right]_{\text{Anfangsw.}}^{\text{Endwert}} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

§. 15. **Das Potential einer elliptischen Scheibe von der Dichtigkeit 1 ist eine homogene Function 1. Grades der Grössen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, x, y, z.**

Wenn in der Formel

$$P = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{W}{U}\, du$$

die Elemente $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, x, y, z resp. durch $\alpha\sqrt{A'}$, $\alpha\sqrt{B'}$, $\alpha x'$, $\alpha y'$, $\alpha z'$ ersetzt werden, dann geht dieselbe in

$$P = 2\alpha\sqrt{A'B'}\int_{t'}^\infty \frac{W'}{U'}\, du$$

über und somit ist P eine homogene Function 1. Grades $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, x, y, z. Also ist

$$P = \sqrt{A}\frac{\partial P}{\partial \sqrt{A}} + \sqrt{B}\frac{\partial P}{\partial \sqrt{B}} + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z}$$

Diese Formel erhält man auch auf folgende Weise:

Das Potential einer ellipt. Scheibe, begrenzt von der Ellipse

$$\frac{X^2}{A\alpha^2} + \frac{Y^2}{B\alpha^2} = 1$$

ist nach Früherem

$$P_1 = 2\alpha^2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{W_1}{U_1}\,du$$

wenn

$$W_1^2 = 1 - \frac{x^2}{A\alpha^2+u} - \frac{y^2}{B\alpha^2+u} - \frac{z^2}{u}$$

$$U_1^2 = (A\alpha^2+u)(B\alpha^2+u)u$$

Ersetzt man nun u und t durch $\alpha^2 u$ und $\alpha^2 t$ und setzt

$$\alpha^2 W_1^2 = \overline{W}^2 = \alpha^2 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u}$$

dann erhält man

$$P_1 = 2\sqrt{AB}\int_{t_1}^\infty \frac{\overline{W}}{U}\,du$$

somit ist

$$\frac{\partial P_1}{\partial \alpha} = 2\sqrt{AB}\int_{t_1}^\infty \frac{\alpha}{WU}\,du = \sqrt{A}\frac{\partial P_1}{\partial(\sqrt{A'\alpha^2})} + \sqrt{B}\frac{\partial P_1}{\partial(\sqrt{B'}\alpha)}$$

folglich

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{1}{WU}\,du = \sqrt{A}\frac{\partial P}{\partial\sqrt{A}} + \sqrt{B}\frac{\partial P}{\partial\sqrt{B}}$$

was zu erwarten war. Nun ist

$$xX + yY + zZ = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{W}{U}\,du - 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{UW}$$

demnach

$$P = xX + yY + zZ + \sqrt{A}\frac{\partial P}{\partial\sqrt{A}} + \sqrt{B}\frac{\partial P}{\partial\sqrt{B}}$$

V. Potential einer elliptischen Scheibe von der Dichtigkeit 1, deren Punkte den Gleichungen

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} \leqq 1, \; z = 0$$

genügen, abgeleitet mittelst des discontinuirlichen Factors von Dirichlet.

Die Coordinaten des Bezugspunktes seien a, b, c; diejenigen eines Punktes der elliptischen Scheibe x und y. Wird die Entfernung dieser beiden Punkte mit r bezeichnet, so ist eine erste Form des Potentials

$$I \qquad \text{Pot.} = \int\int \frac{dx\,dy}{r}$$

wo sich die Integration über alle Punkte der Scheibe ausdehnt. Bedeutet nun N eine pos. sehr grosse Zahl, so ist

$$II \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\pi}\int_0^N e^{-r^2\chi}\chi^{-\frac{1}{2}}d\chi$$

Ich betrachte nun das Integral $\int \frac{e^{bt} - e^{at}}{t^{1+c}}dt$. Der Weg derselben sei eine aus dem Westpunkte um den Pol 0 geworfene, rechtläufige Schlinge. Sind die reellen Comp. von a und b pos. und ist c ein ächter pos. Bruch, so lässt sich der Weg auf die Realitätslinie zwischen $-\infty$ und 0 zusammenziehen und weil

$$e^{i\pi(1+c)}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{bt} - e^{at}}{(-t)^{1+c}}dt = e^{i\pi(1+c)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t^{1+c}}dt$$

$$e^{-i\pi(1+c)}\int_0^{-\infty}\frac{e^{bt} - e^{at}}{(-t)^{1+c}}dt = -e^{-i\pi(1+c)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t^{1+c}}dt$$

so ist (wenn $-\infty \ldots 0$ eine aus dem Westpunkte um den Pol 0 geworfene Schlinge als Weg bezeichnet)

$$\int_{-\infty\ldots0}\frac{e^{bt} - e^{at}}{t^{1+c}}dt = (e^{i\pi(1+c)} - e^{-i\pi(1+c)})\int_0^{\infty}\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t^{1+c}}dt$$

$$= -2i\pi\frac{\sin\pi c}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t^{1+c}}dt$$

III
$$= -\frac{2i\pi}{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}\int_0^\infty \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}}\,dt$$

Weil
$$\int_{-\infty\ldots 0} e^{bt}\,t^{-(1+c)}\,dt = b^c \int_{-\infty\ldots 0} e^{-bt}\,(bt)^{-(1+c)}\,d(bt)$$

also nach einem bekannten Satze
$$\int_{-\infty\ldots 0} e^{bt}\,t^{-(1+c)}\,dt = \frac{2i\pi b^c}{\Gamma(1+c)}$$

ebenso ist
$$\int_{-\infty\ldots 0} e^{at}\,t^{-(1+c)}\,dt = \frac{2i\pi a^c}{\Gamma(1+c)}$$

und somit

IV
$$\int_{-\infty\ldots 0} \frac{e^{bt}-e^{at}}{t^{1+c}}\,dt = \frac{2i\pi(b^c-a^c)}{\Gamma(1+c)}$$

also nach Formel III

V
$$\int_0^\infty \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}}\,dt = \Gamma(1+c)\,.\,\frac{(a^c-b^c)}{c}$$

folglich auch

VI
$$\int_0^\infty \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}\,dt = \log\frac{a}{b}$$

Die imaginäre Comp. dieses Log. werde ausgedrückt durch die Grösse der Drehung des Strahles von 0 nach b bis zum Punkte a. Ich setze nun $b = -ig-i$, $a = -ig+i$, g sei eine pos. reelle Zahl. Dann folgt aus VI für den Fall, dass $g > 1$ ist
$$\int_0^\infty e^{igt}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{t}\right)dt = \log\frac{g-1}{g+1}$$

also
$$1)\quad 2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,e^{igt}\,dt = \log\frac{g-1}{g+1}$$

somit auch
$$2)\quad -2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,e^{-igt}\,dt = \log\frac{g-1}{g+1}$$

Aus 1) und 2) folgt

Digitized by Google

VII $$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}(e^{igt}+e^{-igt})\,dt = 0$$

Ist hingegen $0 < g < 1$, so folgt aus VI

$$3)\quad 2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{igt}\,dt = \log\frac{1-g}{1+g} + i\pi$$

und hieraus

$$4)\quad -2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-igt}\,dt = \log\frac{1-g}{1+g} - i\pi$$

somit nach 3) und 4)

VIII $$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}(e^{igt}+e^{-igt})\,dt = 1$$

Das Integral $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}(e^{igt}+e^{-igt})\,dt$ nennt man den discontinuirlichen Factor von Dirichlet. Ist in demselben $0 < g < 1$, so ist der Wert 1, und ist $1 < g$, so ist derselbe 0. Wird nun in dem Ausdrucke I für das Potential $\frac{1}{r}$ durch das Integral der Formel II ersetzt und ist

$$g = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}, \quad \Omega = r^2\chi - ig\varphi, \quad \Omega' = r^2\chi + ig\varphi$$

so kann man dem Potentiale der elliptischen Scheibe folgende Form geben

IX $$\text{Pot.} = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\iiiint \frac{\sin\varphi}{\varphi}\chi^{-\frac{1}{2}}(e^{-\Omega}+e^{-\Omega'})\,dx\,dy\,d\varphi\,d\chi$$

In diesem Ausdrucke laufen die Variabeln φ und χ von 0 bis $+\infty$, und die Integration nach x und y erstreckt sich über die ganze Ebene $z = 0$. Setzt man

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{A\chi - i\varphi}}{\sqrt{A}}x - \frac{\sqrt{A}\,a\chi}{\sqrt{A\chi - i\varphi}}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\sqrt{B\chi - i\varphi}}{\sqrt{B}}y - \frac{\sqrt{B}\,b\chi}{\sqrt{B\chi - i\varphi}}$$

$$S = \frac{-ia^2\chi}{\sqrt{(A\chi - i\varphi)^2}} + \frac{-ib^2\chi}{B\chi - i\varphi} + \frac{c^2\chi}{\varphi}$$

Digitized by Google

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sqrt{A\chi+i\varphi}}{\sqrt{A}}x - \frac{\sqrt{A}\,a\chi}{\sqrt{A\chi+i\varphi}}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{\sqrt{B\chi+i\varphi}}{\sqrt{B}}y - \frac{\sqrt{B}\,b\chi}{\sqrt{B\chi+i\varphi}}$$

$$S_1 = \frac{ia^2\chi}{A\chi+i\varphi} + \frac{ib^2\chi}{B\chi+i\varphi} + \frac{c^2\chi}{\varphi}$$

und versteht $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ und ebenso die reellen Comp. von $\sqrt{A\chi-i\varphi}$, $\sqrt{B\chi-i\varphi}$ pos., so ist, weil

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+c^2, \quad g = \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B} \quad \text{ist,}$$

$$\Omega = \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+S\varphi, \quad \Omega' = \mathfrak{A}_1{}^2+\mathfrak{B}_1{}^2+S_1\varphi$$

In Formel IX integrire ich zuerst nach x und dann nach y und setze

$$u = \frac{\sqrt{A\chi-i\varphi}}{\sqrt{A}}x - \frac{\sqrt{A}\,a\chi}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}, \quad du = \frac{\sqrt{A\chi-i\varphi}}{\sqrt{A}}dx$$

Durchläuft nun x die Realitätslinie vom Westpunkte bis zum Ostpunkte, so durchläuft u eine neue Gerade, welche die R. L. unter einem Winkel schneidet, der kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist. Der Anfang dieses Weges werde mit dem Westpunkte und das Ende mit dem Ostpunkte verbunden und weil nun die Elemente des Integrals $\int e^{-u}\,du$ in diesen Punkten des Horizontes sehr klein sind, und innerhalb der R. L. und des Weges von u keine kritischen Punkte vorhanden sind, so lässt sich der Weg von u wieder in die R. L. verlegen und man hat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}^2}dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi-i\varphi}}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

Ebenso ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}_1{}^2}dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi+i\varphi}}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{B}^2}dy = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\chi-i\varphi}}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{B}_1{}^2}dy = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\chi+i\varphi}}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+S\varphi)}+e^{-(\mathfrak{A}_1^2+\mathfrak{B}_1^2+S_1\varphi)}\right)dx\,dy$$

$$=\sqrt{AB}\,\pi\left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A\chi-i\varphi)(B\chi-i\varphi)}}+\frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A\chi+i\varphi)(B\chi+i\varphi)}}\right)$$

nnd demnach

$$X\quad \text{Pot.} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\chi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A\chi-i\varphi)(B\chi-i\varphi)}}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A\chi+i\varphi)(B\chi+i\varphi)}}\right)d\varphi\,d\chi$$

Um eine fernere Integration ausführen zu können, setze man

$$s=\frac{\varphi}{\chi},\quad d\chi=-\frac{\varphi}{s^2}ds$$

$$S=-\frac{ia^2}{A-is}+\frac{-ib^2}{B-is}+\frac{c^2}{s}$$

somit

$$\text{Pot.}=\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A-is)(B-is)}}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A+is)(B+is)}}\right)\frac{ds\,d\varphi}{\sqrt{s}}$$

Ich integrire nnn nach φ. Es ist

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}e^{-S\varphi}d\varphi=\frac{1}{2i}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-(S-i)\varphi}-e^{-(S_1+i)\varphi}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\right)d\varphi$$

nnd weil die reellen Comp. von $S-i$ und $S+i$ pos. sind, so erhält man die Formel V

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}e^{-S\varphi}d\varphi=\Gamma(\tfrac{1}{2}).\left(\frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i}\right)$$

nnd

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}e^{-S_1\varphi}d\varphi=\Gamma(\tfrac{1}{2})\frac{\sqrt{S_1+i}-\sqrt{S_1-i}}{i}$$

folglich

$$XI\quad \text{Pot.} = \sqrt{AB}\int\limits_0^\infty\left(\frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}}\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{S_1+i}-\sqrt{S_1-i}}{i\sqrt{(A+is)(B+is)}}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}$$

oder auch

$$\text{Pot.} = \sqrt{AB}\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}}$$

$$+\sqrt{AB}\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{S_1+i}-\sqrt{S_1-i}}{i\sqrt{(A+is)(B+is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}}$$

weil beide Iutegrale für sich convergiren. Die reellen Comp. der Quadratwnrzeln $\sqrt{S+i}$, $\sqrt{S-i}$ werden auf diesem Wege von s pos. verstanden, und im übrigen überlasse ich es dem Leser, aus der Continuität die Bedeutung derselben für andere Lagen von s zu beurteilen.

Das Integral $\int\frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}}$ verschwindet im Horizonte wie $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Man setze deshalb den geradlinigen Integrationsweg im Ostpunkte des Horizontes bis zum Nordpunkte fort, um die Nordhälfte der lateralen Axe zum nenen Integrationswege zu machen. Hier setze ich nun

$$s = e^{i\frac{\pi}{2}}u\quad .$$

durchläuft nnn s von 0 aus die Nordhhälfte der lateralen Axe, so u von 0 ans der Osthälfte der Realitätslinie. Ist nnn t die Wurzel der Gleichung:

$$\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{u}=1$$

die dem Ellipsoid entspricht, das durch den Punkt (a, b, c) geht, so ist für das Intervall $0 < u < t$ die Grösse T stets grösser als 1 und für $t < u$ ist T kleiner als 1, wenn

$$T=\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{u}$$

gesetzt wird. Für das Intervall $0 < u < t$ hat man demnach:

$$\log(S+i) = \log(T-1) - \frac{i\pi}{2},$$

$$\log(S-i) = \log(T+1) - \frac{i\pi}{2}$$

und für $t < u$ ist

$$\log(S+i) = \log(1-T) + \frac{i\pi}{2},$$

$$\log(S-i) = \log(1+T) - \frac{i\pi}{2}$$

wo die Logarithmen von $T-1$, $1-T$, etc. reell verstanden werden. Man findet somit

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\sqrt{T-1}-\sqrt{T+1}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\,du$$

$$\int_t^\infty \frac{\sqrt{1-T}-e^{-i\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+T}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\,du$$

Um das zweite Integral der Formel XI) auf ähnliche Art umzuformen, setze man den Integrationsweg im Horizonte vom Ostpunkte bis zum Südpunkte fort und verlege den neuen Weg auf die Südhälfte der lateralen Axe. Hier setze man

$$s = e^{-i\frac{\pi}{2}}\,u$$

für $0 < u < t$ ist

$$\log(S_1+i) = \log(T+1) + \frac{i\pi}{2}$$

$$\log(S_1-i) = \log(T-1) + \frac{i\pi}{2}$$

und für $t < u$ hat man

$$\log(S_1 + i) = \log(T + 1) + \frac{i\pi}{2},$$

$$\log(S_1 - i) = \log(1 - T) - \frac{i\pi}{2}$$

wo die Logarithmen von $T+1$, $1-T$, etc. reell verstanden werden. Es ist somit

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{S_1+i} - \sqrt{S_1-i}}{i\sqrt{(A+iS)(B+iS)}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\sqrt{T+1} - \sqrt{1-T}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\, du$$

$$+ e^{-i\frac{\pi}{2}} \int_t^\infty \frac{\sqrt{1+T} + e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-T}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\, du$$

folglich nach Formel XI)

$$XII.\quad \text{Pot.} = 2\sqrt{AB} \int_t^\infty \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \frac{c^2}{u}\right)}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\, du$$

Fortsetzung folgt später.

XIV.

Determinanten bei wiederholter Halbirung des ganzen Winkels.

Von

J. Hermes.

Auf die hier betrachteten Determinanten wird man bei Untersuchungen über construirbare Ecke geführt und können dieselben auch als Verallgemeinerung der Formel

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

für gewisse specielle Winkel anfgefasst werden.

Die zu Grunde liegende Figur ist eine sehr einfache, nämlich ein regelmässiges Strahlenbüschel (Stern) mit wiederholt-gerader Strahlenanzahl.

„Bezeichnet α einen Winkel, der durch wiederholte Halbirung des ganzen Winkels 2π entstanden ist, also $\alpha = \frac{2\pi}{2^\nu}$, ferner $u\alpha$ ein ungerades Vielfache dieses Winkels, wo u die Werte 1, 3, 5 ... $(2^{\nu-2}-1)$ annimmt, und wird nun eine Determinante gebildet, deren erste Colonne der Reihe nach die $\cos(u\alpha)$, deren zweite $\cos(3u\alpha)$ etc., deren letzte $\cos(\lambda u\alpha)$ für $\lambda = 2^{\nu-2}-1$ enthält, so stellt der numerische Wert dieser Determinante, falls $\nu \geqq 3$, eine Potenz von zwei dar, verschwindet[1]) aber für einen doppelt so grossen Wert des Winkels."

1) Vgl. Balzer, Determinanten § 17, 3

Die wievielte Potenz von 2 wird wol hiebei erhalten?

Beginnen wir mit $\nu = 4$.

Die Determinante D_4 wird dann:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos(3\alpha) \\ \cos(3\alpha) & \cos(9\alpha) \end{vmatrix} \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{2\pi}{2^4} = \frac{\pi}{8}$$

Da

$$\cos(9\alpha) = \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -\cos\alpha$$

ist, und $\sin\alpha$ statt $\cos(3\alpha)$ gesetzt werden kann, so wird

$$D_4 = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$$

also

$$-D_4 = 1 = 2^0$$

Wir können aber auch diese Determinante dadurch ausrechnen, dass wir die ersto Colonne zur letzten legen und

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

anwenden. Indem

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

und zur Abkürzung

$$\cos(m\alpha) = c_m$$

gesetzt wird, ergiebt sich

$$-D_4 = -\sqrt{2}\begin{vmatrix} c_1 & c_1 \\ c_3 & -c_3 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\,c_1c_3 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1 = 2^0$$

wie vorhin.

Dass D_4 für einen doppelt so grossen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$ verschwindet, folgt für D_4 (wie auch allgemein für D_ν) daraus, dass dann an Stelle von

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

der Factor $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ tritt.

Für $\nu = 5$, also

$$\alpha = \frac{2\pi}{2^5} = \frac{\pi}{16}$$

wird D_5, indem Zeilen und Colonnen zunächst umgestellt werden mögen,

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_7 & c_3 & c_5 \\ c_7 & + & + & + \\ c_3 & + & + & + \\ c_5 & + & + & + \end{vmatrix}$$

wobei die mit $+$ ausgefüllten Stellen stets ein $+c_n$ enthalten sollen, dessen Numer n das Product der Numern ist, welche die in der betreffenden Zeile und Colonne am Anfange befindlichen c haben.

Wird nun die erste Zeile zur zweiten, die dritte zur vierten gelegt und der Factor $\sqrt{2^2}$ vorgezogen, so erhält man:

$$D_5 = \sqrt{2^2}\,.\begin{vmatrix} c_1 & c_7 & c_3 & c_5 \\ c_3 & + & - & - \\ c_3 & + & + & + \\ c_1 & + & - & - \end{vmatrix}$$

Hier deutet das minus an, dass das an der Stelle befindliche c_n negativ zu nehmen ist.

Es wird sich also die Determinante, wenn die vierte Zeile zur ersten, die dritte zur zweiten gelegt und sodann der Factor 2 aus beiden Zeilen herausgezogen wird, als das Product zweier Partialdeterminanten darstellen:

$$D_5 = 2^2\sqrt{2^2}\begin{vmatrix} c_1 & c_7 \\ c_3 & + \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c_3 & c_5 \\ + & + \end{vmatrix} = 2\sqrt{2^2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & - \end{vmatrix}^2$$

falls man mit den Colonnen, wie vorhin mit den Zeilen verfährt. Nun ist

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & -c_9 \end{vmatrix} = -c_1c_9 - c_3c_3 = \tfrac{1}{2}\{-c_{10} - c_8 - c_0 - c_6\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(c_8 + c_0) = -c_4^2 = -\tfrac{1}{2}$$

folglich das Quadrat $= +\frac{1}{4}$ und somit

$$D_5 = \frac{2^{2.1}\sqrt{2^{2(1+2\frac{1}{2})}}}{2^2} = 2^2$$

Verfahren wir analog bei $\nu = 6$;

$$\alpha = \frac{2\pi}{2^6} = \frac{\pi}{32}$$

so zerfällt D_6 nach Absonderung des Factors $\sqrt{2^4}.2^4$ in das Product der beiden Teildeterminanten:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} c_1 & c_{15} & c_7 & c_9 & c_3 & c_{13} & c_5 & c_{11} \\ c_7 & + & + & + & + & + & + & + \\ c_3 & + & + & + & + & + & + & + \\ c_5 & + & + & + & + & + & + & + \end{array}\right|$$

diese, nach Absonderung des Factors $\sqrt{2^2 . 2^2}$ für jede in das Product der vier Determinanten:

$$\left|\begin{array}{cc} c_1 & c_7 \\ c_7 & + \end{array}\right| . \left|\begin{array}{cc} c_3 & c_5 \\ + & + \end{array}\right| .$$

$$\left|\begin{array}{cc} c_3 & + \\ c_5 & + \end{array}\right| . \left|\begin{array}{cc} + & + \\ + & + \end{array}\right|$$

welches

$$= + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2^4} \sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^4}$$

ist. Im ganzen wird also:

$$D_6 = \frac{2^{1.4+2.2} . \sqrt{2^{2(1.3+2.1)}}}{2^4} = 2^8 = 4^4$$

Bei $\nu = 7$, für

$$\alpha = \frac{2\pi}{2^7} = \frac{\pi}{64}$$

tritt nach der analog ausgeführten Zeilen- nnd Colonnenaddition, indem der Factor:

$$\sqrt{2^8 . 2^8} . \{\sqrt{2^4 . 2^4}\}^2$$

gewonnen wird, das Product der vier Teildeterminanten

$$\left|\begin{array}{cccc} c_1 & c_{15} & c_7 & c_9 \\ c_{15} & + & + & + \\ c_7 & + & + & + \\ c_9 & + & + & + \end{array}\right| . \left|\begin{array}{cccc} c_3 & c_{13} & c_5 & c_{11} \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{array}\right| .$$

$$\left|\begin{array}{cccc} c_3 & + & + & + \\ c_{13} & + & + & + \\ c_5 & + & + & + \\ c_{11} & + & + & + \end{array}\right| . \left|\begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{array}\right|$$

auf, welches nach einer zweiten in analoger Weise auszuführenden

Zeilen- und Colonnenaddition [1]) in das Product der 8 Determinanten

$$\left\{ \begin{vmatrix} c_1 & c_7 \\ c_7 & - \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_5 \\ + & - \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & + \\ c_5 & - \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & - \end{vmatrix} \right\}^2$$

übergeht, indem der Factor:

$$\left\{\left(2.\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 . 2^2\right\}^2 \cdot \left\{\left(2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^2 . 2^2\right\}^2 \cdot \left(2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4 \left(2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^4$$

gewonnen wird. Da das Product der 8 Determinanten zu je vier Elementen

$$\left\{+\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{1}{2^4}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\pi}{2}\right\}^2 = \left(\frac{1}{2^{4+2}}\right)^2$$

beträgt, so erhält man schliesslich:

$$D_7 = \frac{2_1^{\cdot 8+2.4+4.2} . \sqrt{2^{2(1.4+2.2+2.1+4(\frac{1}{2}))}}}{2^{8+4}} = 2^{24} = 8^8$$

Bei

$$\nu = 8, \alpha = \frac{2\pi}{2^8}$$

wird man nach zwei vollen Zeilen- und Colonnenadditionen den Factor:

$$\sqrt{2^{16}.2^{16}\{\sqrt{2^8.2^8}\}^2} . \left\{\left(2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4 . 2^4\right\}^2 \cdot \left\{\left(2\cos\frac{3\pi}{8}\right)^4 2^4\right\}^2$$
$$\cdot \left\{\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 . 2^2\right\}^4 \cdot \left\{\left(2\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 . 2^2\right\}^4$$

und als Kern das Product der 16 Determinanten zu je vier Elemonten, nämlich:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_{15} \\ c_{15} & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_7 & c_9 \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_{13} \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_5 & c_{11} \\ + & + \end{vmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} c_7 & + \\ c_9 & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} .$$

1) Die letztere ist bei ungerader Ordnungszahl ν nur zur Hälfte auszuführen.

$$\begin{vmatrix} c_3 & + \\ c_{13} & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} c_5 & + \\ c_{11} & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} + & + \\ + & + \end{vmatrix}$$

erhalten, welches, wie sogleich allgemein gezeigt werden kann,

$$= \frac{1}{2^{16+8}}$$

ist, so dass

$$D_8 = \frac{2^{1.16+2.8+4.4+8.2} . \sqrt{2^{2(1.8+2.4+2.2+4.1)}}}{2^{16+8}} = 2^{64} = (16)^{16} \text{ ist.}$$

Diese Determinante, die also erst dem regulären 256-Eck entsprechen {nnd beim 257-Eck in Bezng auf die Bedingungsgleichnngen daselbst in Anwendnng kommen} würde, hat schon bei directer Ausrechnnng:

263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000

nicht verschwindende Glieder und zwar ist jedes Glied ein Prodnct von 32 Diagonalen des Ecks [Dnrchmesser = 1.]. Die Snmme aller Glieder hat aber die einfache Formel: $(2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}$ für $\nu = 8$, das ist

$$(16)^{16} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$$

Die dem regulären 65536-Eck entsprechende Determinante würde eine Gliederzahl haben, welche mit 28504 Stellen zn schreiben wäre. Ihr Wert ist

$$(2^{16-4})^{2^{16-4}} = (2^{12})^{2^{12}} = (4096)^{4096}$$

Wird für immer grössere und grössere ν (bis ∞) die Gliederzahl dnrch das Prodnct ans der vierten Wnrzel der Elementenanzahl nnd dem Qnadrat des Determinantenwertes dividirt, so ergiebt sich die Constante $\sqrt{2\pi}.0 = 0$; für abnehmende ν wird die Formel $(2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}$, welche für $\nu = 3$ den Wert

$$(2^{-1})^{2^{-1}} = (\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \cos\left(\frac{2\pi}{2^3}\right) = |\cos\alpha|$$

hat und soweit noch stimmt, natürlich illusorisch; für $\nu = 2$ z. B. wird

$$D_2 = (2^{-2})^{2^{-2}} = (\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

wie vorhin, dazwischen liegt bekanntlich für $x = \frac{1}{e}$ ein Minimum der Function x^x.

Aus den vorstehenden Ausrechnungen der einfachsten Fälle $\nu = 4$ ... bis $\nu = 8$ unsrer Determinante ist nun schon der Gang des Beweises der Hauptsache nach ersichtlich, so wie auch, dass die Fälle eines **geraden** ν, wo eine volle Anzahl Zeilen- und Colonnenadditionen stattfinden muss, bis man auf den Kern kommt, und eines **ungeraden** ν, wo die letzte Colonnenaddition nur zur Hälfte ausführbar, zu unterscheiden sind.

Die erste Zeilen- und Colonnenaddition giebt als **Exponenten** von 2 und $\sqrt{2}$, da die Determinante $(2^{\nu-3})^2$ Elemente und als erste Zeile (oder auch Colonne) die $2^{\nu-3}$ Cosinus mit den Numern

$$1,\quad (2^{\nu-2}-1),\quad 2^{\nu-3}-1,\quad 2^{\nu-3}+1,\quad 2^{\nu-4}-1,\quad \ldots \text{ etc.}$$

enthält, wie aus der Analogie mit dem Vorgehenden folgt:

$$1.2^{\nu-4}+2.2^{\nu-5} \quad \text{und} \quad 2[.1.2^{\nu-5}+2.2^{\nu-6}]$$

die zweite Zeilen- und Colonnenaddition:

$$4.2^{\nu-6}+8.2^{\nu-7} \quad \text{und} \quad 2\left[\frac{4}{2}.2^{\nu-7}+\frac{8}{2}.2^{\nu-8}\right]$$

die dritte Zeilen- und Colonnenaddition:

$$16.2^{\nu-8}+32.2^{\nu-9} \quad \text{und} \quad 2\left[\frac{16}{4}.2^{\nu-9}+\frac{32}{4}.2^{\nu-10}\right], \ldots \text{ etc.}$$

Für gerade ν wird nun die $\left(\frac{\nu}{2}-2\right)$te, d. i. die letzte volle Zeilen- und Colonnenaddition:

$$2^{\nu-4}.2^2+2^{\nu-5}.2 \quad \text{und} \quad 2\left[\frac{2^{\nu-6}}{2^{\frac{\nu}{2}-3}}.2+\frac{2^{\nu-5}}{2^{\frac{\nu}{2}-3}}.1\right]$$

Eine Determinante des Kerns, die ja vier Elemente hat, wird, wenn p und q zwei ungerade Zahlen bedeuten:

$$\begin{vmatrix} +c_{pq} & +c_{q.2^{\frac{\nu}{2}}-qp} \\ +c_{p.2^{\frac{\nu}{2}}-pq} & +c_{2^{\nu-2}-2^{\frac{\nu}{2}}(p+q)+pq} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{c_{2^{\nu-2}-2^{\frac{\nu}{2}}(p+q)+2pq}+c_{2^{\nu-2}-2^{\frac{\nu}{2}}(p+q)}-c_{2^{\frac{\nu}{2}}(p+q)-2pq}\right.$$
$$\left.-c_{2^{\frac{\nu}{2}}(p-q)}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{ c_2 \frac{\nu}{2}(p+q) - c_2 \frac{\nu}{2}(p-q) \right\}$$
$$= \frac{-2}{2}\sin\left(\frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)\sin\left(\frac{2\pi q}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)$$

der Kern selbst also das Product:

$$\Pi_p\, \Pi_q \sin\left(\frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)\sin\left(\frac{2\pi q}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)$$

Da nun im Producte auch:

$$\sin\left(\frac{2\pi p'}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)\sin\left(\frac{2\pi q'}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)$$

vorkommt, wobei

$$p' = 2^{\frac{\nu}{2}-2} - p$$
$$q' = 2^{\frac{\nu}{2}-2} - q \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{2\pi p'}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right) = \cos\left(\frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}}}\right)$$

ist, so zieht sich das Product in

$$\frac{1}{2\left(2^{\frac{\nu}{2}}-2\right)^2}\,\Pi\,\Pi \sin\left(\frac{2\pi p}{2^{\frac{\nu}{2}-1}}\right)\sin\left(\frac{2\pi q}{2^{\frac{\nu}{2}-1}}\right)$$

zusammen. Es wird also der Exponent von 2 um $-2^{\nu-4}$ zu verändern sein. Dieser Process lässt sich offenbar noch $\frac{\nu}{2}-3$ mal hintereinander anwenden, so dass schliesslich

$$\Pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

bleibt, sonach ist der Exponent um

$$-\left[2^{\nu-4} + 2^{\nu-5} + 2^{\nu-6} \dots 2^{\nu-4-\left(\frac{\nu}{2}-3\right)}\right]$$

zu verändern. Dies hebt sich nun gerade mit dem von $\sqrt{2^3}$ her-

rührenden Teile fort [1]). Schliesslich bleibt dann für den Exponenten $(\nu-4).2^{\nu-4}$, also ist der Wert der Determinante $=(2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}$.

Für **ungerade** ν sind die Teildeterminanten des Kerns im übrigen genau dieselben, nur dass statt $\frac{\nu}{2}$ hier $\frac{\nu-1}{2}$, die Zeichen von den c nicht $\begin{smallmatrix}+&+\\+&+\end{smallmatrix}$, sondern $\begin{smallmatrix}+&+\\+&-\end{smallmatrix}$ und die Winkel halb so gross zu nehmen sind. Dies letztere hat zur Folge, dass sich jetzt ebenfalls zwei der vier Cosinus fortheben [obgleich sie dasselbe Zeichen haben, so betragen ihre Winkel nunmehr zusammen π nicht 2π wie vorhin].

Ueberdies ist das ganze Product noch in's Quadrat zu erheben. Aus dem Nenner $\left[\frac{1}{2\left(2^{\frac{\nu-1}{2}-2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^2$, um das Product auf die Hälfte Factoren zusammenziehen zu können, folgt für den Exponenten von 2 eine Veränderung um $-2^{\nu-4}$ wie oben, doch wiederholt sich jetzt der Process dieses Zusammenziehens einmal mehr, also noch $\frac{\nu-1}{2}-2$ mal, mithin ist der Exponent im ganzen um

$$-\left[2^{\nu-4}+2^{\nu-5}+\dots 2^{\nu-4-\left(\frac{\nu-1}{2}-2\right)}\right]$$

zu vermindern. Dies hebt sich aber auch jetzt mit dem von $\sqrt{2^2}$ herrührenden Teile auf, weil daselbst von der $\left(\frac{\nu-1}{2}-1\right)$ten, d. i. letzten „unvollständigen“ Zeilen- und Colonnenaddition noch $\frac{2^{\nu-4}}{2^{\frac{\nu-1}{2}-2}}\left(\frac{1}{2}\right)$ hinzukommt, so dass wie oben $(\nu-4)2^{\nu-4}$ bleibt also auch hier $D_\nu=(2^{\nu-4})^{2^{\nu-4}}$ ist, w. z. b w.

Anmerkung 1. Unsre Determinanten behalten denselben Wert wenn überall, wo cos steht, sin gesetzt wird, denn

$$\cos(u\alpha)=\sin(u'\alpha)$$

wenn

---

1) So dass man einen einfacheren Beweis erwarten möchte, etwa durch Schluss von n auf $n+1$, indem man auf Cosinus von doppelt so grossem Winkel zu kommen sucht; $2\alpha=\alpha'$; vgl. Anm. 2.

$$u + u' = 2^{\nu-2}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{2^\nu}$$

ist, und ebenso

$$\cos(\lambda u \alpha) = \pm \sin(\lambda u' \alpha)$$

weil

$$\lambda(u+u')\alpha = (4\lambda' \pm 1)(u+u')\alpha = 2\lambda'\pi \pm \frac{\pi}{2}\alpha$$

Dies gilt auch für D_3 und D_4, weil bei ersterer

$$\nu = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

und weil bei letzterer noch eine Umstellung der Zeilen erfordert wird, so dass $D_4 = (-1)^3$, also auch wieder $= -1$, wie vorhin ist. Daraus folgt dann auch, dass für $e = 2{,}718\ \ldots$, $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{vmatrix} e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}, & e^{3i\alpha} + e^{-3i\alpha} \ldots \\ e^{3i\alpha} + e^{-3i\alpha}, & \ldots \\ \vdots & \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}, & e^{3i\alpha} - e^{-3i\alpha} \ldots \\ e^{3i\alpha} - e^{-3i\alpha}, & \ldots \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

sein muss, woraus wieder Schlüsse über die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} e^{i\alpha}, & e^{3i\alpha} \ldots \\ e^{3i\alpha}, & \ldots \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

gezogen werden können, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen.

Anmerkung 2. Durch das Vorstehende können auch Determinanten $\varDelta_\nu$ von folgender Construction berechnet werden, bei welcher viererlei in Betracht kommt.

1) Abgesehen vom Vorzeichen sei das in der $2h+1$ten Zeile und $2k+1$ten Colonne befindliche Element von $\varDelta_{\nu+1}$ nämlich:

$$\overset{\nu+1}{a}_{2h+1,\, 2k+1} = \text{dem Product: } \overset{\nu}{a}_{h+1,\, k+1} . \cos\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right)$$

{ Die vorhergehende Determinante $\varDelta_\nu$ sei nämlich:

$$\begin{vmatrix} \overset{\nu}{a}_{11} & \overset{\nu}{a}_{12} & \ldots \\ \overset{\nu}{a}_{21} & \ldots & \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

Sie ist für $\nu = 5$ und $\nu = 6$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} -1 & +1 \\ +1 & +1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right), & +\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), & -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} = 2^2 = (\Delta_5)^2$$

ferner:

$$\overset{\nu+1}{a}_{2h+2,\,2k+2} = \pm \overset{\nu+1}{a}_{2h+1,2k+1} = \pm \overset{\nu}{a}_{h+1,\,k+1} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right)$$

und

$$\overset{\nu+1}{a}_{2h+2,\,2k+1} = \pm \overset{\nu+1}{a}_{2h+1,\,2k+2} = \overset{\nu}{a}_{h+1,\,k+1} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right)$$

[oder anch cos mit sin zu vertauschen.]

2) ist

$$\overset{\nu+1}{a}_{4h+1,\,4k+1} = \overset{\nu}{a}_{2h+1,\,2k+1} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right)$$

falls $\cos\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-4}}\right)$ resp. $\sin\left[\left(\frac{2^{\nu-5}-m}{2^{\nu-4}}\right)\pi\right]$ der letzte in $\overset{\nu}{a}_{2h+1,\,2k+1}$ befindliche Factor ist; anch möge

$$\overset{\nu+1}{a}_{4h+3,\,4k+3} = \pm \overset{\nu}{a}_{2h+2,\,2k+2} \cdot \cos \text{ oder } \sin\left(\frac{m\pi}{2^{\nu-3}}\right) \quad \text{nnd}$$

$$\left.\begin{cases} \overset{\nu+1}{a}_{4h+3,\,4k+1} \\ \overset{\nu+1}{a}_{4h+1,\,4k+3} \end{cases}\right\} = \pm \overset{\nu}{a}_{2h+2,\,2k+1} . \cos \text{ oder } \sin\left[(2^{\nu-5}-m)\frac{\pi}{2^{\nu-3}}\right]$$

sein.

3) Ob hierin cos oder sin zu setzen ist, wird entschieden, wenn man bei Δ_ν durchweg den letzten Factor von dem Element $a_{\nu 2h+1,\,2k+1}$, der cos oder sin ist, heraus nimmt, diese Gesamtheit durch die beiden geraden Verbindungslinien der Seiten mitten eines um die Determinante beschriebenen Quadrats in vier Gruppen $\frac{GH}{KL}$ teilt und dann die Anordnung

$GHHG$
$KLLK$
$KLGH$
$GHKL$ trifft.

4) Die Zeichen endlich werden in ähnlicher Weise für $\Delta_{\nu+1}$ aus Δ_ν bestimmt, indem man die Gesamtheit der Vorzeichen von Δ_ν analog in vier Gruppen $\frac{\Gamma H}{K \Lambda}$ teilt und

$\Gamma H \quad H \quad \Gamma$
$K\Lambda \quad \Lambda \quad K$
$K\Lambda - \Gamma - H$
$\Gamma H - K - \Lambda$

bildet, wobei $-\Gamma$ die entgegengesetzten Zeichen von Γ bedeuten soll, so dass auch $\Lambda = -\Gamma$ sein muss.

Hienach würde nun aus Δ_6 folgendermassen Δ_7 zu construiren sein:

Nach 4) werden die Vorzeichen:

$- + + -$	$+ - - +$
$+ + + +$	$+ + + +$
$+ + + -$	$+ - + +$
$- + - -$	$- - - +$
$+ + + -$	$+ - - +$
$- + - -$	$- - - -$
$- + + -$	$- - - +$
$+ + + +$	$+ - + +$

Nach 3) werden die vier Gruppen $\begin{Bmatrix} GH \\ KL \end{Bmatrix}$, wenn statt cos und sin nur c' und s' (mit Index m) gesetzt sind [1], $= \begin{Bmatrix} c' & c' \\ c' & s' \end{Bmatrix}$, also die Verteilung der sin und cos bei Δ_7:

---

1) $\cos\left(\frac{m\pi}{8}\right) = c'_m, \quad \cos\left(\frac{m\pi}{16}\right) = c''_m, \quad \cos\left(\frac{m\pi}{32}\right) = c'''_m$

etc. . . .

$$\begin{array}{cc|cc} c_1'' & c_3'' & c_1'' & c_3'' \\ c_3'' & s_1'' & s_3'' & c_1'' \\ \hline c_1'' & s_3'' & c_3'' & c_1'' \\ c_3'' & c_1'' & c_1'' & s_3'' \end{array}$$

wobei die Indices nach 2) folgen, endlich $\pm \Delta_7$ selbst nach 1)

$$\begin{vmatrix} -c_1'c_1''+c_1's_1''+s_1'c_3''-s_1's_3''+c_1'c_1''-c_1's_1''-s_1'c_3''+s_1's_3'' \\ +c_1's_1''+c_1'c_1''+s_1's_3''+s_1'c_3''+c_1's_1''+c_1'c_1''+s_1's_3''+s_1'c_3'' \\ +s_1'c_3''+s_1's_3''+c_1's_1''-c_1'c_1''+s_1's_3''-s_1'c_3''+c_1'c_1''+c_1's_1'' \\ -s_1's_3''+s_1'c_3''-c_1'c_1''-c_1's_1''-s_1'c_3''-s_1's_3''-c_1's_1''+c_1'c_1'' \\ +c_1'c_1''+c_1's_1''+s_1's_3''-s_1'c_3''+s_1'c_3''-s_1's_3''-c_1'c_1''+c_1's_1'' \\ -c_1's_1''+c_1'c_1''-s_1'c_3''-s_1's_3''-s_1's_3''-s_1'c_3''-c_1's_1''-c_1'c_1'' \\ -s_1'c_3''+s_1's_3''+c_1'c_1''-c_1'c_1''-c_1'c_1''-c_1's_1''-s_1's_3''+s_1'c_3'' \\ +s_1's_3''+s_1'c_3''+c_1's_1''+c_1'c_1''+c_1's_1''-c_1'c_2''+s_1'c_3''+s_1's_3'' \end{vmatrix}$$

$$= (\Delta_6)^2 = 2^4 = 16$$

$\pm \Delta_8$ beginnt mit:

$$\pm \begin{vmatrix} -c_1'c_1''c_1''' & +c_1'c_1''s_1''' & \dots \\ +c_1'c_1''s_1''' & +c_1'c_1''c_1''' & \dots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix} = (\Delta_7)^2 = 2^8$$

etc., allgemein wird:

$$\pm \Delta_{\nu+1} = (\Delta_\nu)^2$$

[Das Vorzeichen ergiebt sich nicht aus dem Beweis]. Erhebt man z. B. Δ_7 nach dem bekannten Determinantensatze in's Quadrat, so erhält man, indem

$$c = s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$c' = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad s' = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right); \quad 2c^2 = 1; \quad s' + c' = 2cc';$$

$$-s' + c' = 2cs', \quad (s'+c')^2 = c+1, \quad (2s'+c')2s' = 2(s')^2+1,$$

$$(s'+c')^2 + 2s'(2s'+c') = 3; \quad 2(s')^2 + c = 1; \quad \text{etc. ist:}$$

$$(\Delta_7)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & c & c \\ -c & -c & 0 & 0 \\ +c & -c & 0 & 0 \\ cs' & c'+cs' & cc' & s'+cc' \\ -(c'+cs') & cs' & s'+cc' & -cc' \\ -cs' & c'+cs' & -(s'+cc') & -cc' \\ c'+cs' & cs' & cc' & -(s'+cc') \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|}
-cs' & c'+cs' & cs' & -(c'+cs') \\
-(c'+cs') & -cs' & -(c'+cs') & -cs' \\
-cc' & -(s'+cc') & s'+cc' & -cc' \\
-(s'+cc') & cc' & cc' & s'+cc' \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0
\end{array}$$

Indem man die erste Colonne mit minus zur zweiten, die dritte zur vierten fügt und analog bei den Zeilen verfährt, erhält man:

$$\begin{array}{|cccc}
0 & 0 & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2c \\
-c & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2c & 0 & 0 \\
cs' & c' & cc' & s'+2cc' \\
-(c'+cs') & c'+2cs' & s'+cc' & s' \\
0 & 2c'+2cs' & -s' & 0 \\
0 & 2cs' & s'+2cc' & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|}
-cs' & c'+cs' & 0 & 0 \\
-c' & -(c'+2cs') & -(2c'+2cs') & -2cs') \\
-cc' & -(s'+cc') & s' & -(s'+2cc') \\
-s'+2cc' & -s' & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0
\end{array}$$

Hierin mögen, um die c wegzuschaffen, die ersten beiden Colonnen, nachher die ersten beiden Zeilen mit $2c$ und c, also mit 1 multiplicirt werden, so ergiebt sich:

$$\begin{array}{|cccc}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
2s'+c' & 0 & 0 & s'+c' \\
-(s'+c') & 0 & 0 & 2s' \\
0 & s'+c' & -2s' & 0 \\
0 & 2s'+c' & s'+c' & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|}
-(2s'+c') & s'+c' & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(s'+c') & -(2s'+c') \\
0 & 0 & 2s' & -(s'+c') \\
-(s'+c') & -2s' & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0
\end{array}$$

Werden nun die 70 Producte je zweier Partialdeterminanten von je 4^2 Elementen gebildet, so ist das erste 1^2, das letzte $9^2=81$, 34 dieser Producte sind $=0$, vier werden $c+1$, vier $(c+1)^2$, acht c^2+c+1; vier $2(s')^2+1$, vier $18(s')^2+9$; vier $c^2+8(s')^2$; vier $9c+9$, zwei 9, so dass im ganzen:

$$192+16c^2+56c+112(s')^2=200+56=256=2^8$$

erhalten wird, Δ_7 also $=\pm 2^4$ ist. Diese directe Ausrechnung ist nun durchaus nicht nötig, wenn wir auf den Zusammenhang mit den D_ν hinweisen.

D_ν war $=\Sigma\pm\Pi\cos(\lambda u\alpha)$, wo u und λ ungerade Zahlen 1, 3, ... $(2^{\nu-2}-1)$ und $\alpha=\frac{2\pi}{2^\nu}$; $D_{-\nu}=D_\nu=\Sigma\pm\Pi\cos(\varkappa u'\alpha)$. Dann wird ein Element von

$$(D_\nu)^2=\Sigma_u(-1)^h\cos(\lambda u\alpha)\cos(\varkappa u'\alpha)$$

worin h in der ersten Hälfte gerade, in der zweiten ungerade;

$$u+u'=2^{\nu-2}$$

Nun gilt

$$\cos(\lambda u\alpha)\cos(\varkappa u'\alpha)=\tfrac{1}{2}[\cos(\varkappa u+\lambda u')\alpha+\cos(\varkappa u-\lambda u')\alpha]$$

Da

$$\cos(2n\pi-x)=\cos x$$

und

$$(\varkappa u+\lambda u')\alpha+(\varkappa u'+\lambda u)\alpha=(\varkappa+\lambda)(u+u')\alpha=n2\pi$$

wenn

$$\varkappa+\lambda\equiv 0 \mod 4$$

und auch

$$(\varkappa u-\lambda u')\alpha+(\varkappa u'-\lambda u)\alpha=(\varkappa-\lambda)(u+u')\alpha=2n'\pi$$

wenn

$$\varkappa-\lambda\equiv 0, \text{ mod. } 4$$

so hebt sich entweder

$$\Sigma_u \frac{(-1)^\lambda}{2}\cos(\varkappa u + \lambda u')\alpha \quad \text{oder} \quad \Sigma_u \frac{(-1)^\lambda}{2}\cos(\varkappa u - \lambda u')\alpha$$

fort, zuweilen auch beide, falls

$$\varkappa \mp \lambda \equiv 0, \text{ mod. } 8$$

denn

$$\cos(\varkappa u + \lambda u')\alpha = -\cos(\varkappa u'' + \lambda u''')\alpha$$

wenn für

$$u + u'' = 2^{\nu-3} \quad \text{und} \quad u' + u''' = 2^{\nu-3} + 2^{\nu-2}$$

das Argument

$$\alpha(\varkappa(u+u'') + \lambda(u'+u''')) = \alpha((\varkappa-\lambda)(u+u'') + \lambda . 2^{\nu-1}) =$$

ungeradem Vielfachen von π wird, und das ist der Fall, sobald schon $\frac{\varkappa-\lambda}{4}$ gerade, indem ja λ eine ungerade Zahl bedeutete.

Somit werden zwei Viertel der quadratischen Fläche, die die Determinante $(D_\nu)^2$ einnimmt, das erste und vierte, mit Nullen erfüllt sein; der zweite und dritte Flächenteil sind einander gleich, wie es sein muss [indem die durchweg entgegengesetzten Zeichen bei einem in Bezug auf den andern bei gerader Zeilenanzahl ohne Einfluss sind], und wir erhalten somit $\pm D_\nu$ in einer Determinante mit halb soviel Zeilen und Colonnen. In dieser haben alle Elemente denselben Factor, nämlich $2^{\nu-5} . \sqrt{2}$. Wird derselbe herausgezogen, als $(2^{\nu-5}\sqrt{2})^{2\nu-4}$, da $2^{\nu-4}$ Colonnen sind, so bleibt, wie sich unschwer ergibt, Δ_ν übrig, also muss auch

$$(2^{\nu-5})2^{\nu-4}\Delta\nu = \pm (2^{\nu-4})2^{\nu-4} = \pm D_\nu$$

sein, mithin

$$\pm \Delta_\nu = 2^{2\nu-5}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Anmerkung 3. Indem α, wie vorhin $= \frac{2\pi}{2^\nu}$ ist, folgen aus dem System von $2^{\nu-2}$ linearen Gleichungen

$$\sum_{0}^{(2^{\nu-2}-1)}{}_m \; c_{um} x_m = 0$$

wo

$$u = 1, 3, 5 \ldots (2^{\nu-1}-1)$$

für sämtliche x die Werte 0, denn die Determinante des Systems ϑ_ν verschwindet nicht. Es wird nämlich:

$$\vartheta_2 = 1,$$

$$\vartheta_3 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix}$$

das ist:

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ 1 & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\sqrt{2}$$

für

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

ϑ_4 ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_2 & c_1 & c_3 \\ c_0 & -c_2 & c_3 & c_9 \\ c_0 & -c_2 & -c_3 & -c_9 \\ c_0 & c_2 & -c_1 & -c_3 \end{vmatrix}$$

für

$$\alpha = \frac{\pi}{8}$$

Wird die erste Zeile zur letzten, die zweite zur vorletzten gelegt und der Factor 2^2 hervorgezogen, so ergiebt sich

$$\vartheta_4 = 2^2 \begin{vmatrix} c_0 & -c_2 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_9 \end{vmatrix}$$

In diesem Producte ist aber die erste Determinante $= \begin{vmatrix} c_0 & -c_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}$ für den doppelt so grossen Winkel, also für $\frac{\pi}{4}$, mithin

$$= -\vartheta_3 = +\sqrt{2}$$

die zweite ist

$$= D_4 = -1$$

also

$$\vartheta_4 = 2^2(-\vartheta_3)\, D_4 = -2^2\sqrt{2} = -D_5\sqrt{2}$$

Analog wird:

$$\vartheta_5 = 2^4 . \vartheta_4 D_5 = -2^8\sqrt{2} = -D_6\sqrt{2}$$

etc., endlich:

$$\vartheta_\nu = 2^{2^{\nu-3}} . \vartheta_{\nu-1} D_\nu = \vartheta_{\nu-1} . D_\nu . (\Delta_{\nu+1})^2$$

$$= -(2^{\nu-3})^{2^{\nu-3}} . \sqrt{2} = -D_{\nu+1}\sqrt{2}$$

Hiebei ist die Formel:

$$\sum_3^\nu (\nu-2)2^{\nu-3} = (\nu-3)2^{\nu-2}+1$$

benutzt. Die Gleichungen

$$x_m = 0$$

für

$$m = 0, 1\ 2, \ldots (2^{\nu-2}-1)$$

können aber hierin als die bekannten Bedingungsgleichungen

$$x_0 = \sum_0^{(2^{2\nu-1}-1)} {}_x (e_k)^2 - p = 0 \quad \text{und} \quad x_h = \sum_0^{2^{2\nu-1}} {}_k e_k e_{x+\lambda} = 0$$

für

$$h = 1,\ 2,\ \ldots\ 2^{\nu-2} - 1$$

wo p eine Primzahl von der Form $2^{2\mu}+1$ ist. aufgefasst werden, welche Gleichungen sich stets durch ganze Zahlen e identisch erfüllen lassen.

Die Ermittlung dieser Zahlen ist Arch. der Math. u. Phys. 2. Reihe, IV. pag. 217. gezeigt.

XV.

Mittelwerte, die Krümmung ebener Curven und krummer Flächen betreffend.

Von

Emanuel Czuber.

I. **Ebene Curven.** Mittlerer Krümmnngsradius und mittlere Krümmnng eines Bogens. Die Länge des einförmig gekrümmten Bogens AMB werde mit s_0 bezeichnet; der Krümmungshalbmesser im Punkto M heisse ϱ, die Krümmnng daselbst $\varkappa$, ferner sei Bogen $AM = s$, das anstossonde Bogenelement ds und der entsprechonde Contingenzwinkel $d\tau$.

Für den mittleren Krümmnngsradius ϱ_m des betrachteten Bogens ergibt sich der Ausdruck

$$\varrho_m = \frac{1}{s_0}\int \varrho\, ds = \int \frac{ds}{d\tau} ds \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

wobei die Integration über AMB ansznd ehnen ist. Das hier auftretende Integral hat eine einfache geometrische Bedentung; denn das Prodnct ϱds drückt den doppelten Inhalt des Droiecks ans, welches von dem Bogenelemont ds nnd den Normalen in soinen Endpunkten begrenzt wird, das Integral somit den doppelten Inhalt jener Fläche, welche von dem Bogen AMB, den Normalen seiner Endpnnkte A, B nnd dem zugehörigen Bogen der Evolnte nmschlossen wird. Bezeichnet man den einfachen Inhalt mit u_0, so ist

$$\varrho_m = \frac{2u_0}{s_0} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Die Bestimmung der Punkte in *AMB*, in welchen der Krümmungshalbmesser dem mittleren gleichkommt, erfolgt durch Verbindung der Gleichung $\varrho = \varrho_m$ mit jener der Curve.

Die **mittlere Krümmung** des Bogens *AMB* ist dargestellt durch

$$\varkappa_m = \frac{1}{s_0}\int \varkappa\,\partial s = \frac{1}{s_0}\int \frac{\partial\tau}{\partial s}\,\partial s = \frac{1}{s_0}\int d\tau \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

die Integration über *AMB* ausgedehnt. Ihr Resultat ist aber derjenige Winkel τ_0, welchen die Tangente der Curve beschreibt, während ihr Berührungspunkt den betrachteten Bogen durchläuft; mithin ist

$$\varkappa_m = \frac{\tau_0}{s_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Es fällt also die mittlere Krümmung eines Bogens überein mit derjenigen Grösse, welche als dessen **relative Krümmung** bezeichnet zu werden pflegt.

Für eine geschlossene convexe Curve ohne Ecken wird

$$\tau_0 = 2\pi$$

und somit

$$\varkappa_m = \frac{2\pi}{s_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

d. h. **die mittlere Krümmung einer solchen Curve kommt gleich der eines Kreises, welcher mit ihr gleichen Umfang hat.**

Zur Erläuterung der Formeln wählen wir die gemeine Cykloide und die Ellipse.

Bedeutet *AMB* einen Ast der Cykloide, so ist u_0 der Fläche eines Rechtecks gleich, das den Durchmesser $2a$ des rollenden Kreises zur Höhe und seinen Umfang zur Basis hat, also

$$u_0 = 4\pi a^2$$

ferner

$$s_0 = 8a \quad \text{und} \quad \tau_0 = \pi$$

Daraus berechnet sich

$$\varrho_m = \pi a$$

gleich dem halben Umfang des rollenden Kreises; und den beiden Punkten, in welchen

$$\varrho = 4a \sin\frac{\varphi}{2} = \varrho_m$$

ist, kommen die Rollwinkel

$$\varphi_1 = 2\arcsin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$$

zu; weiter ist

$$\varkappa_m = \frac{\pi}{8a}$$

und die beiden Punkte, in welchen

$$\varkappa = \varkappa_m$$

ist, sind durch die Rollwinkel

$$\varphi_1 = 2\arcsin\frac{2}{\pi}$$

und

$$\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$$

charakterisirt.

Ist ABM der Quadrant einer Ellipse mit den Halbaxen a, b, so hat der Quadrant der Evolute den Inhalt $\frac{3\pi}{32}\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}$, mithin ist

$$u_0 = \frac{3\pi}{32}\frac{(a^2-b^2)^2}{ab} + \frac{\pi}{4}ab = \frac{\pi}{32}\frac{3a^4+2a^2b^2+3b^4}{ab}$$

da ferner

$$s_0 = aE \quad \text{und} \quad \tau_0 = \frac{\pi}{2}$$

so hat man

$$\varrho_m = \frac{\pi}{16}\frac{3a^4+2a^2b^2+3b^4}{2^8 bE}, \quad \varkappa_m = \frac{\pi}{2aE}$$

selbstverständlich gelten diese Werte auch für die ganze Ellipse.

II. Krumme Flächen. 1. Schnitte durch eine Tangente der Fläche. Es sei t eine Tangente, n die Normale einer gegebenen Fläche im Punkte A derselben; ist R der Krümmungsradius, M_0 der Krümmungsmittelpunkt des durch t und n gelegten Schnittes oder des Normalschnittes durch t in A, so liegen die Krümmungsmittelpunkte M aller weiteren durch t geführten Schnitte dem Satze von Meusnier zufolge auf einem Kreise $\mathfrak{K}$, welcher AM_0 zum Durchmesser hat und derjenigen Ebene angehört, welche durch n senkrecht zu t gelegt wird. Trägt man auf den Linien AM_0, AM die zugehörigen Krümmungen K, k nach irgend einem Maassstabe von A aus ab, so liegen die Endpunkte N_0, N auf einer dem

vorgedachten Kreise inversen Figur, d. i. auf der Geraden g, welche in N_0 senkrecht zur Ebene (t, n) errichtet ist.

Bezeichnet θ den Winkel, welchen die Ebene (t, M) mit n bildet, so ist der Krümmungsradius des zugeordneten Schnittes

$$r = R\cos\theta$$

und der mittere Krümmungshalbmesser aller durch t gelegten Schnitte

$$r_m = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta = \frac{2R}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{2R}{\pi} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Er gibt zugleich die mittlere Länge der aus A gezogenen Sehnen des Kreises $\mathfrak{K}$ an.

Die Lage derjenigen unter den Schnitten durch s', deren Krümmungshalbmesser dem Mittelwerte gleich kommt, ergibt sich durch Auflösung der Gleichung

$$r = r_m$$

in Bezug auf θ; man findet

$$\theta_1 = \arccos\frac{2}{\pi}, \quad \theta_2 = -\theta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die mittlere Krümmung der in Rede stehenden Schnitte wäre geometrich dargestellt durch den Mittelwert der aus A nach der Geraden g gezogenen Radienvecteren; sie ist daher unendlich gross.

2. Schnitte durch eine Normale der Fläche. Wie vorhin sei A der betrachtete Punkt der Fläche, n die zugehörige Normale und ε die Tangentenebene, ferner seien t_1, t_2 die auf ε bezogenen Spuren der beiden Hauptschnitte, R_1, R_2 ihre Krümmungsradien, K_1, K_2 die Krümmungen. Auf der Spur t eines beliebigen durch n gelegten Schnittes, dessen Krümmungshalbmesser und Krümmung in A mit R, bzhw. mit K bezeichnet werden möge, werde von A aus beiderseits eine der Quadratwurzel aus $|R|$ und ebenso eine der Quadratwurzel aus $|K|$ proportionale Strecke abgetragen. Die ersten so erhaltenen Punktepaare M, M' ordnen sich, dem Euler'schen Satze zufolge, nach Kegelschnitten, welche t_1, t_2 zu Hauptaxen und die Punkte M_1, M_1', M_2, M_2' zu Scheiteln haben; demzufolge ordnen sich die zweitgenannten Punktepaare N, N' nach Linien, welche diesen Kegelschnitten invers sind in Bezug auf A

als Pol, d. i. anf bicircnlaren Cnrven 4. Ordnnng, welche t_1, t_2 zu Symmetrieaxen, A zum Doppelpunkt nnd N_1, N_1'; N_2, N_2' zu cyklischen Pnnkten haben.

Im übrigen unterscheiden wir folgende Fälle.

a) In einem Punkte mit gleichgerichteten endlichen Hanptkrümmnngsradien ist die den Verlanf von $\sqrt{R}$ darstellende Cnrve (M) eine Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$, die den Verlauf von $\sqrt{K}$ darstellende Linie (N) eine Curve mit isolirtem Doppelpnnkt in A; die imaginären Tangenten in diesem, zusammenfallend mit den Asymptoten der ersterwähnten Ellipse, bilden die Inflexionstangenten der Fläche in dem betrachteten Punkte, welcher als elliptischer Pnnkt bezeichnet wird.

Heisst α der Winkel, welchen t mit t_1 bildet, so ist

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}$$

und der mittlere Krümmungsradius der Normalschnitte in A kommt gleich

$$R_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\,d\alpha = \frac{2R_1R_2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{R_2\cos^2\alpha + R_1\sin^2\alpha} = \sqrt{R_1R_2} \quad (3)$$

Man kann ihn znfolge des zwischen R und der Ellipse (M) bestehenden Znsammenhanges als mittleres Halbmesserquadrat der lotzteren ableiten; als solches stellt er sich in Form eines Bruches dar, dessen Zähler die Fläche jener Ellipse, d. i $\pi\sqrt{R_1R_2}$, und dessen Nenner π ist, man findet also wie oben das geometrische Mittel der Hanptkrümmnngsradien.

Dnrch Anflösnng der Gleichung

$$R = R_m$$

in Bezng auf α ergibt sich die Lage jener beiden Normalschnitte, deren Krümmnngshalbmesser dem Mittelwerte gleichkommt; man findet

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt[4]{\frac{R_2}{R_1}}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Die mittlere Krümmung der betrachteten Schnitte kann auf Grund einer ähnlichen Bemerknug, wie sie oben zur Darstellung

von R_m angewendet werden, als Quotient des Flächeninhaltes der Curve (N) durch die Zahl π gefunden werden. Sie ist

$$K_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (K_1 \cos^2\alpha + K_2 \sin^2\alpha)\, d\alpha = \frac{K_1+K_2}{2} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

oder dem **arithmetischen Mittel der beiden Hauptkrümmungen** gleich. Es ist dies eine natürliche Folge des bekannten Satzes, dass die mittlere Krümmung je zweier zu einander rechtwinkligen Schnitte durch n dem obigen Werte gleichkommt [1]).

Aus der Gleichung

$$K = K_m$$

ergeben sich die Azimute der beiden Schnitte, welche die mittlere Krümmung haben, u. zw.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}\,, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

die genannten Normalschnitte halbiren also die Winkel der beiden Hauptschnitte.

b) In einem Punkte mit ungleich gerichteten endlichen Hauptkrümmungsradien setzt sich die Curve (M), welche den Verlauf von $\sqrt{|R|}$ versinnlicht, aus zwei Hyperbeln zusammen, deren Axen mit einander vertauscht sind, und die den Verlauf von $\sqrt{(K)}$ darstellende Curve (N) aus zwei lemniskaten-ähnlichen Linien, deren jede in A einen Doppelpunkt hat; ihre gemeinsamen Tangenten in diesem Punkte, gleichzeitig gemeinschaftliche Asymptoten jener Hyperbeln, bilden die Wendetangenten der Fläche im Punkte A, welcher nun als **hyperbolischer** Punkt bezeichnet wird.

Setzt man die dem Zeiger 1 entsprechende Hauptkrümmung als die positive fest, so ist mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} - \frac{\sin^2\alpha}{R_2}$$

---

1) Bezüglich der in den Gleichungen 3) und 5) niedergelegten Sätze vgl. die Abhandlungen **Grunert's** in dessen Archiv, Bd. 40. pag. 259 flg., Bd. 41, pag. 241 flg., und die Bemerkung **Beltrami's**, ibid., Bd. 42, pag. 116.

Das arithmetische Mittel der algebraischen Werte von R ist null, das der absoluten Werte ist unendlich gross; denn das erstere wird durch die mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirte Differenz, das letztere durch die mit dem nämlichen Factor multiplicirte Summe jener Flächen ausgedrückt, welche die oben genannten Hyperbeln mit ihren gemeinschaftlichen Asymptoten begrenzen.

Der Mittelwert der mit ihrem Vorzeichen versehenen Krümmungen ist

$$K_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (K_1 \cos^2\alpha - K_2 \sin^2\alpha)\, d\alpha = \frac{K_1 - K_2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; (7)$$

in Uebereinstimmung mit (5); er stellt zugleich die durch π geteilte, entsprechend gebildete Differenz der Flächen vor, welche von den beiden lemniskatenartigen Curven (N) eingeschlossen werden.

Für die Schnitte von mittlerer Krümmung findet man aus der Gleichung

$$K = K_m$$

die Azimute

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

so dass sie wie bei dem elliptischen Punkte die Winkel der Hauptschnitte halbiren.

Der Mittelwert der absoluten Krümmungen hingegen ist, wenn

$$\alpha_0 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$$

gleich

$$|K|_m = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\alpha_0} (K_1 \cos^2\alpha - K_2 \sin^2\alpha)\, d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} (K_2 \sin^2\alpha - K_1 \cos^2\alpha)\, d\alpha \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[(K_1 - K_2)\left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{K_1 K_2} \right] \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

es ist dies zugleich die mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirte Summe der Flächen, welche durch (N) begrenzt werden.

In einem Punkte mit gleichen und entgegengesetzt bezeichneten Hauptkrümmungen $\pm K_1$ wird

$$K_m = 0, \quad | K |_m = \frac{2K_1}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

und die Curve (N) besteht hier aus zwei congruenten Lemniskaten.

c) In einem Punkte, wo einer der beiden Hauptkrümmungsradien $-R_2-$ unendlich gross ist, wird der Verlauf von $\sqrt{R}$ durch zwei zu t_2 parallele Gerade (M) dargestellt, welche zu beiden Seiten von A in der Entfernung $\sqrt{R_1}$ liegen, und der Verlauf von $\sqrt{K}$ durch zwei gleiche Kreise, welche in A die gemeinschaftliche Tangente t_2, zugleich die Vereinigung der beiden Inflexionstangenten der Fläche in A, und den Durchmesser $\sqrt{K_1}$ haben; A heisst in diesem Falle ein parabolischer Punkt der Fläche.

Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen ist

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1}$$

Der mittlere Krümmungshalbmesser R_m ist unendlich gross; denn er ist der von dem Geradenpaar (M) eingeschlossenen Fläche proportional.

Die mittlere Krümmung ist

$$K_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_1 \cos^2 \alpha \, d\alpha = \frac{K_1}{2} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und ergibt sich auch als Quotient der Flächensumme der Kreise (K) durch die Zahl π; sie ist in den Formeln (5) und (7) als Specialwert für $K_2 = 0$ enthalten.

Für die Schnitte von mittlerer Krümmung ergeben sich aus der Gleichung

$$K = K_m$$

dieselben Azimute wie in a) und b), nämlich

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

3. Schnitte durch einen Punkt der Fläche. Nach dem Vorangeschickten kommt nur bei einem elliptischen Punkte der mittlere Krümmungsradius aller durch ihn gelegten Schnitte

Digitized by Google

in Betracht; bezeichnet man ihn mit ϱ_m, so findet sich dnrch Verbindnng der Resultate (1) nnd (3) für ihn der Ansdruck

$$\varrho_m = \frac{2R_m}{\pi} = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

4. **Mittlere Krümmnng nnd mittlerer Krümmnngsradins einer Fläche.** Auf der gegebenen Fläche sei durch eine ihr anfgeschriebene Cnrve ein Teil hegrenzt, dessen Grösse wir mit S_0 bezeichnen. In einem beliebigen Punkte A dieses Teils seien R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien, dS das anstossende Flächenelement, $d\Sigma$ die Grösse seiner Abbildung auf einer Kugel vom Halbmesser Eins. Bezeichnet man das Krümmungsmaass oder kurz die Krümmnng der Fläche in dem genannten Punkte mit $\mathfrak{K}$, so ist

$$\mathfrak{K} = \frac{d\Sigma}{dS} = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Wir beschränken nns von hier ab auf Flächen mit elliptischen Punkten. Die Krümmnng einer solchen kann mit derjenigen einer Kugel verglichen werden. Entsprechend dem Begriffe des Krümmnngskreises einer Curve belegen wir eine Kugel, welche mit der Fläche im Punkte A gleiche Krümmung hat, mit dem Namen **Krümmnngskugel**, ihren Halbmesser mit dem Namen **Krümmnngshalbmesser**, beides auf den Punkt A bezogen. Für die letztgenannte Grösse ergibt sich, da die Krümmung einer Kngel durch das reciproke Halbmesserqnadrat gemessen wird, der Wert

$$\mathfrak{R} = \sqrt{R_1 R_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

welcher mit dem Werte des mittleren Krümmungshalbmessers R_m der durch A gelegten Normalschnitte übereinstimmt.

Die **mittlere Krümmung** von S_0 ist gegeben durch

$$\mathfrak{K}_m = \frac{1}{S_0}\int \mathfrak{K}\, dS = \frac{1}{S_0}\int d\Sigma$$

die Integration ist über S_0 auszudehnen; ihr Resnltat ist Σ_0 oder die Grösse der sphärischen Abbildung von S_0, so dass

$$\mathfrak{K}_m = \frac{\Sigma_0}{S_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Hiernach fällt die mittlere Krümmung von S_0 mit derjenigen Grösse überein, welche als **relative Krümmung** dieses Flächenteils bezeichnet zu werden pflegt.

Diejenige Kugel, deren Krümmung dem eben berechneten Mittelwerte gleich ist, wollen wir Kugel mitterer Krümmung von S_0 nennen; für ihren Radius ergibt sich der Ausdruck

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{k}_m} = \sqrt{\frac{S_0}{\Sigma_0}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Zu einem bemerkenswerten Satze führt die Anwendung dieser Formeln auf eine geschlossene convexe Fläche ohne singuläre Punkte; da hier, wenn man die ganze Fläche in Betracht nimmt,

$$\Sigma_0 = 4\pi$$

ist, so wird

$$\mathfrak{K}_m = \frac{4\pi}{S_0}, \quad \mathfrak{R}_{\mathfrak{k}_m} = \sqrt{\frac{S_0}{4\pi}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Dies sagt aus: Die mittlere Krümmung einer geschlossenen convexen Fläche stimmt mit der Krümmung einer Kugel von gleicher Oberfläche überein.

Dem Radius der Kugel mittlerer Krümmung stellt sich der mittlere Krümmungsradius oder der mittlere Halbmesser der Krümmungskugeln gegenüber. Man erhält für ihn auf Grund von (14) den allgemeinen Ausdruck

$$\mathfrak{R}_m = \frac{1}{S_0} \int \sqrt{R_1 R_2}\, dS \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

die Integration über S_0 ausgedehnt.

Als Beispiele hierzu wählen wir die durch Umdrehung einer Cykloide um ihre Grundlinie entstandene Fläche und das Sphäroid.

Wird bei der ersten Fläche der Halbmesser des rollenden Kreises mit a, der zu einem Punkte A des Meridians gehörige Rollwinkel mit φ bezeichnet, so findet man

$$R_1 = 4a \sin\frac{\varphi}{2}, \quad R_2 = 2a \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \mathfrak{R} = 2a\sqrt{2} \sin\frac{\varphi}{2},$$

$$dS = 8\pi a^2 \sin^3\frac{\varphi}{2}\, d\varphi, \quad S_0 = \frac{64}{3}\pi a^2$$

Daraus berechnen sich auf Grund von (17) und (18) die Werte

$$\mathfrak{K}_m = \frac{3}{16a^2}, \quad \mathfrak{R}_{\mathfrak{k}_m} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \mathfrak{R}_m = \frac{9\pi}{8\sqrt{2}}a$$

Im zweiten Beispiel[1]) sei a die grosse Halbaxe, ε die relative Excentricität des Meridians, β die Breite eines beliebigen Punktes, d. ist die Neigung der zugehörigen Normale gegen die Aequatorebene; dann ist für den gedachten Punkt

$$R_1 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}, \quad R_2 = \frac{a}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathfrak{N} = \frac{a(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\varepsilon^2\sin^2\beta},$$

$$dS = 2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\frac{\cos\beta\, d\beta}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^2}; \quad S_0 = 2\pi a^2\left[1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]$$

daraus berechnet sich mittelst der nämlichen Formeln

$$\mathfrak{K}_m = \frac{3}{a^2\left[1+\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]} = \frac{1}{a^2}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{8\varepsilon^4}{45}+\frac{104\varepsilon^6}{945}+\ldots\right],$$

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{K}_m} = \sqrt{1.\mathfrak{N}_m} = a\left[1-\frac{\varepsilon^2}{6}-\frac{17\varepsilon^4}{360}-\frac{67\varepsilon^6}{3024}-\ldots\right],$$

$$\mathfrak{N}_m = \frac{1}{8}a(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{10-6\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}+\frac{3}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}{1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

$$= a\left[1-\frac{\varepsilon^2}{6}+\frac{31\varepsilon^4}{360}+\frac{1697\varepsilon^6}{15120}+\ldots\right].$$

---

1) S. Dr. F. R. Helmert, Die mathem. u. physik. Theorien der höheren Geodäsie, Bd. I, pag. 63 flg.

XVI.

Ueber die Entwickelung von $e^{-1:(1-x)}$ in eine Potenzenreihe nebst einigen Anwendungen derselben.

Von

Louis Saalschütz.

Die erste Anregung zur nachfolgenden Reihenentwicklung lag für mich in dem Bestreben $e^{-\frac{1}{y}}$, wobei y einen positiven echten Bruch oder 1 bedeutet, in einer nach ganzen Functionen von y fortlaufenden Reihe darzustellen, welche um so willkommener wäre, wenn sie auch noch für $y = 0$ gültig wäre und den richtigen Wert null in zweifelloser Art lieferte. Dies lässt sich in der Tat erreichen, wenn man y durch $1 - x$ ersetzt und dann nach Potenzen von x entwickelt. Dabei stellt sich heraus, dass die Coefficienten dieser und einer mit ihr eng zusammenhangenden Reihe in so eigentümlicher Art fortschreiten, dass die nachfolgenden Mitteilungen, wie ich hoffe, nicht ganz interesselos sein dürften. Schliesslich wird noch gezeigt, dass und in welcher Art die gewonnene Reihe sich zur Berechnung mancher Integrale, deren obere Grenze unendlich ist, verwenden lässt.

§ 1.

Unabhängige Darstellungsweise der Coefficienten.

Es sei:

$$1)\quad e^{-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots)$$

Um die Coefficienten $b_0 b_1 b_2 \ldots$ in nnabhängiger Art darzustellen, kann man den Taylor'schen Lehrsatz benutzen [1]), zuvor die von verschiedenen Differentialquotienten von $f(x)$ für $x = 0$ aufstellen. Setze ich

$$\frac{1}{1-x} = z$$

so ist

$$f(x) = e^{-z} = \psi(z)$$

nnd dann weiter:

$$\psi'z = -e^{-z}, \quad \psi''z = e^{-z}, \ \ldots \ \psi^{(n)}z = (-1)^n e^{-z};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2} = z^2$$

Daher wird:

$$f'x = \psi'z \ \frac{dz}{dx} = -e^{-z}z^2; \quad f''x = \frac{df'x}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^{-z}(z^4 - 2z^3)$$

ebenso:

$$f'''x = -e^{-z}(z^6 - 6z^5 + 6z^4)$$
$$f^{(4)}x = e^{-z}(z^8 - 12z^7 + 36z^6 - 24z^5)$$
$$f^{(5)}x = -e^{-z}(z^{10} - 20z^9 + 120z^8 - 240z^7 + 120z^6)$$

Diesen letzten Ausdruck kaun man auf die Form bringen:

$$f^{(5)}x = -e^{-z}(z^{10} - 1.(4)_1(5)_1 z^9 + 1\ 2(4)_2(5)_2 z^8 - 1.2.3(4)_3(5)_3 z^7$$
$$+ 1.2.3.4(4)_4(5)_4 z^6)$$

und dass hierin das allgemeino Gesetz ausgesprochen ist, wollen wir durch den Schluss von n auf $n+1$ beweisen. Es sei also:

2) $(-1)^n f^{(n)} x = e^{-z}(z^{2n} - 1.(n-1)_1(n)_1 z^{2n-1} \pm \ldots$
$+ (-1)^{k-1}(k-1)!(n-1)_{k-1}(n)_{k-1} z^{2n-k+1} + (-1)^k . k!(n-1)_k(n)_k z^{2n-k} + \ldots$
$+ (-1)^{n-1}(n-1)!(n-1)_{n-1}(n)_{n-1} z^{n+1})$

dann wird:

$$(-1)^n \frac{df^{(n)}x}{dz} = e^{-z}(-z^{2n} + (n-1)_1(n)_1 z^{2n-1} \mp \ldots) + e^{-z}(2n z^{2n-1} \mp \ldots)$$

und der Coefficient von z^{2n-k} ergiebt sich:

---

1) Eine andere Methode, die gleichfalls zum Ziele führt, benutzt die Reihe für e^{-z}, in welche dann für z der Wert $(1-x)^{-1}$ einzuführen ist.

Digitized by Google

$$C_{2n-k} = -(-1)^k \{k!\,(n-1)_k(n)_k + (k-1)!\,(n-1)_{k-1}(n)_{k-1}(2n-k+1)\}$$
$$= -(-1)^k(k-1)!\,(n-1)_{k-1}(n)_{k-1}\left\{\frac{k(n-k)}{k}\frac{(n-k+1)}{k} + (2n-k+1)\right\}$$
$$= -(-1)^k(k-1)!\,(n-1)_{k-1}(n)_{k-1}\frac{n^2+n}{k}$$
$$= -(-1)^k k!\,(n)_k(n+1)_k$$

daher erhalten wir:

$$(-1)^{n+1} f^{(n+1)} x = e^{-z}(z^{2n+2} - 1\,.\,(n)_1(n+1)_1 z^{2n+1} \pm \ldots$$
$$+ (-1)^k k!\,(n)_k(n+1)_k z^{2n+2-k} + \ldots)$$

womit der Beweis geführt ist. Bezeichnen wir nun den Wert von $f^{(n)} x$ für $x = 0$ oder $z = 1$ mit a_n, so ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von $f(x)$ $\frac{a_n}{1.2\ldots n}$ folglich giebt der Vergleich mit 1):

$$b_n = e \cdot \frac{a_n}{1.2\ldots n}$$

und daher wie 2) zeigt:

$$3)\quad (-1)^n b_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} - \frac{(n-1)_1(n)_1}{2.3\ldots n} + \frac{(n-1)_2(n)_2}{3\ldots n} \mp \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{(n-1)_{n-1}(n)_{n-1}}{n}.$$

Aus $f(0)$, $f'0$ folgt $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ und dann aus Gl. 3):

$$b_2 = \tfrac{1}{2} - \frac{1.2}{2} = -\tfrac{1}{2},\quad -b_3 = \tfrac{1}{6} - \frac{2.3}{6} + \frac{1.3}{3} = \tfrac{1}{6},\quad b_4 = \frac{1}{24} \text{ etc.}$$

Eine andere unabhängige Darstellungsweise ergicht sich bei Entwickelung von $f(x)$ in der Form:

$$f(x) = e^{-(1+x+x^2+\ldots)}$$

mittelst der combinatorischen Ausdrücke [1]):

$$4)\quad b_n = \Sigma\left[\frac{\alpha^p{}_1\,\alpha^q{}_2\,\alpha^r{}_3\ldots\alpha^t{}_n}{1.2\ldots p\,.\,1.2\ldots q\ldots 1.2\ldots t}\right]_{\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = -1}$$

wobei $p\,q\,r\ldots t$ so als positive ganze Zahlen einschliesslich der Null zu wählen sind, dass die Gleichung:

$$5)\qquad 1.p + 2q + 3r + \ldots nt = n$$

1) Stern, Algebraische Analysis. Note VII. F. 1). (S. 388).

erfüllt wird, wonach der Ausdruck in 4) zu bilden [1], und für alle die Gl. 5) befriedigenden Systeme von $pq\ldots t$ die Summation auszuführen ist.

Der Vergleich der (nicht identischen) Ausdrücke 3) und 4) liefert eine Beziehung zwischen Binomialcoeffienten. Z.B. ist für $n=5$:

$$-\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{(4)_1(5)_1}{2.3.4.5}-\frac{(4)_2(5)_2}{3.4.5}+\frac{(4)_3(5)_3}{4.5}-\frac{(4)_4(5)_4}{5}$$

$$=\frac{\alpha_1^{\,5}}{1.2.3.4.5}+\frac{\alpha_1^{\,3}\alpha_2}{1.2.3.1}+\frac{\alpha_1^{\,2}\alpha_3}{1.2.1}+\frac{\alpha_1\alpha_2^{\,2}}{1.1.2}+\frac{\alpha_1\alpha_4}{1.1}+\frac{\alpha_2\alpha_3}{1.1}+\alpha_5$$

$$=-\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-1=\frac{19}{120}$$

§ 2.

Abhängige Darstellungsweise der Coefficienten.

Im vorigen Paragraphen war die Gleichung gefunden worden:

$$f'x=-e^{-s}.s^2$$

d. i.:

$$f'x=-\frac{f(x)}{(1-x)^2}$$

oder:

$$(1-x)^2f'x+f(x)=0.$$

Differentiirt man diese Gleichung weiter, so erhält man eine Beziehung zwischen drei aufeinander folgenden Differentialquotienten, nämlich:

6) $$(1-x)^2f^{(n+1)}x+(2nx-(2n-1))f^{(n)}x+n(n-1)f^{(n-1)}x=0$$

und somit auch, indem man $x=0$ setzt, zwischen drei aufeinander folgenden Coefficienten der Reihe 1). Leichter gelangt man folgendermassen zu derselben Formel. Differentiiren wir Gl. 1) nach x, so kommt:

$$-\frac{e^{-1:(1-x)}}{(1-x)^2}=\frac{1}{e}(b_1+2b_2x+3b_3x^2+\ldots)$$

folglich:

$$e^{-\frac{1}{1-x}}=-\frac{(1-2x+x^2)}{e}(b_1+2b_2x+3b_3+x^2+\ldots)$$

1) Das Symbol 0! ist durch 1 zu ersetzen.

Führen wir die Multiplication aus und vergleichen die Coefficienten der rechten Seite mit denjenigen in 1), so erhalten wir die Gleichungen:

$$-b_1 = b_0$$
$$-2b_2 + 2b_1 = b_1$$
$$-3b_3 + 4b_2 - b_1 = b_2$$
$$-4b_4 + 6b_3 - 2b_2 = b_3$$
$$-5b_5 + 8b_4 - 3b_3 = b_4$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$-(n+1)b_{n+1} + 2nb_n - (n-1)b_{n-1} = b_n$$

oder:

7) $$(n+1)b_{n+1} - (2n-1)b_n + (n-1)b_{n-1} = 0$$

Ich führe jetzt die neue Bezeichnung

8) $$nb_n = \beta_n, \quad b_n = \frac{1}{n}\beta_n$$

ein, dann nimmt die Gl. 7) die Form an:

$$\beta_{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n}\right)\beta_n + \beta_{n-1} = 0$$

woraus folgt:

9) $$\beta_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\beta_n - \beta_{n-1}$$

und

10) $$(\beta_{n+1} - \beta_n) - (\beta_n - \beta_{n-1}) + \frac{1}{n}\beta_n = 0$$

Aus der Gl. 9) sind nach einander die β's und mittelst 8) gleichzeitig die b's berechnet worden, sowie sie in den Tafeln am Schlusse dieser Arbeit angeführt sind. Die Gl. 10) bildet die Grundlage der weiteren Untersuchung.

Noch eine andere Formel zwischen den Grössen b und β, die für uns von Wichtigkeit werden wird, erhalten wir, wenn wir in die Recursionsformel der allgemeinen Entwickelung

11) $$e^{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots} = 1 + A_1x + A_2x_2 + A_3x^3 + \dots$$

nämlich [1])

---

1) A. a. O. F. 2.) S. 389.

Digitized by Google

12) $$A_n = \frac{1}{n}(a_1 A_{n-1} + 2a_2 A_{n-2} + \dots + (n-1) a_{n-1} A_1 + n a_n)$$

statt $A_1 A_2 \dots b_1 b_2 \dots$ und für $a_1 a_2 \dots$ den Wert -1 einsetzen, folgendes:

$$nb_n + b_{n-1} + 2b_{n-2} + 3b_{n-3} + \dots + (n-1)b_1 + n = 0$$

ebenso:

$$(n+1)b_{n+1} + b_n + 2b_{n-1} + 3b_{n-2} + \dots + nb_1 + (n+1) = 0$$

Ziehen wir die erstere Formel von der zweiten ab, schreiben statt nb_n und $(n+1)b_{n+1}$ bzhw. β_n und β_{n+1} und am Ende b_0 statt 1, so entsteht folgende:

13) $$b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n + \beta_{n+1} - \beta_n = 0$$

und dies ist die erwähnte Beziehung. Sie folgt übrigens auch aus 10), wenn man diese

$$\beta_{n+1} - 2\beta_n + \beta_{n-1} + b_n = 0$$

schreibt, darin nach einander $n = 2, 3, 4, \dots$ setzt, addirt und $\beta_1 = b_1$, $\beta_2 = 2b_2$ und $-1 = -b_0$ substitnirt.

§ 3.

Die Grössen β und die von ihnen näherungsweise befriedigte Differentialgleichung.

Werfen wir einen Blick auf Tafel II, welche der Grössen β enthält, so sehen wir sofort, dass dieselben in Gruppen von abwechselnd positiven und negativen Gliedern zerfallen. Die Anzahl Glieder nimmt von Gruppe zu Gruppe zu, und zwar beträgt dieselbe bezüglich:

14) 1 3 9 13 19 23

In jeder Gruppe nimmt der Absolutwert der Glieder von Anfang zu, erreicht ein Maximum und nimmt dann wieder ab. Diese Maxima sind in den sechs berechneten Gruppen:

15) 0 1 1,56 1,94 2,26 2,55

Sie nehmen also zu. Betrachtet man die Gliedzahl n als Abscisse, β_n als Ordinate, so macht das Ganze den Eindruck einer Zusammensetzung von Sinus-Curven mit stets grösserer Spannung und stets grösserer Pfeilhöhe. Wir wollen nun sehen, wie weit diese Vorstellung sich mit der Gl. 10) in Uebereinstimmung bringen lässt. Wir

denken uns n bereits recht gross geworden und betrachten den Zuwachs 1 als dn; dann ist:

$$\beta_n - \beta_{n-1} = \frac{d\beta}{dn}$$

$$(\beta_{n+1} - \beta_n) - (\beta_n - \beta_{n-1}) = \frac{d^2\beta}{dn^2}$$

und daher geht die Gl. 10) über in

16) $$\frac{d^2\beta}{dn^2} + \frac{\beta}{n} = 0$$

Wir wollen im Anschluss an diese Gleichung nur eine bestimmte Gruppe in's Auge fassen. Wir bezeichnen den Index des grössten β (immer absolut verstanden) in ihr mit λ und setzen:

17) $$n = \lambda + \xi$$

so dass ξ bei wachsendem n aus dem Negativen ins Positive übergeht, Dadurch wird die Gleichung 16):

18) $$\frac{d^2\beta}{d\xi^2} + \frac{\beta}{\lambda + \xi} = 0.$$

Nun ist der Maximalwert von ξ klein gegen λ, wenn n sehr gross ist. Das Verhältniss desselben zu λ ist:

in der Gruppe (13; 25) etwa $\frac{7}{19}$

„ „ „ (26; 44) „ $\frac{10}{35}$

„ „ „ (45; 67) „ $\frac{12}{56}$

Ich entwickele daher $\frac{1}{\lambda + \xi}$ nach Potenzen von $\frac{\xi}{\lambda}$ und lasse in der Gl. 18) nach einander drei Annäherungen eintreten, ich setze nämlich statt $\frac{\beta}{\lambda + \xi}$

1) $\frac{\beta}{\lambda}$; 2) $\frac{\beta}{\lambda}\left(1 - \frac{\xi}{\lambda}\right)$; 3) $\frac{\beta}{\lambda}\left(1 - \frac{\xi}{\lambda} + \frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)$

Allerdings lässt sich die Gl. 18) oder 16) streng integriren, doch ist die Form des Resultates, ein bestimmtes Integral, als dessen Parameter $\lambda + \xi$ oder n auftritt, für unseren Zweck nicht bequem, schon deshalb nicht, weil dieser Parameter immer grösser wird, in-

dem wir gerade unserer Betrachtung grosse Werte von n zu Grunde legen müssen.

§ 4.

Erste Annäherung.

Die Gl. 18) nimmt in erster Annäherung die Form an:

19) $$\frac{d^2\beta}{d\xi^2}+\frac{\beta}{\lambda}=0.$$

Ihr Integral lässt sich schreiben:

20) $$\beta=A\cos\left(\frac{\xi+\gamma}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Nun soll $\xi=0$ sein, wenn β seinen grössten Wert annimmt, folglich ist $\gamma=0$

21) $$\beta=A\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

und A der Maximalwert von β. Letzteres verschwindet für $\xi=\mp\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$. Bezeichne ich nun den Unterschied des Anfangs- und End-Index der Gruppe [1]) mit z, so muss sein:

22) $$z=\pi\sqrt{\lambda} \quad \text{oder} \quad z^2=\pi^2\lambda$$

Benenne ich dieselben Grössen für die Gruppen, die der betrachteten folgen, mit $\lambda_1 z_1$, $\lambda_2 z_2$, etc., so müssen analog 22) die Gleichungen stattfinden:

23) $$\begin{cases} z_1^2=\pi^2\lambda_1 \\ z_2^2=\pi^2\lambda_2 \\ z_3^2=\pi^2\lambda_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Andererseits ist aber auch:

$$\lambda_1=\lambda+\frac{z}{2}+\frac{z_1}{2}$$

$$\lambda_2=\lambda_1+\frac{z_1}{2}+\frac{z_2}{2}$$

$$\lambda_3=\lambda_2+\frac{z_2}{2}+\frac{z_3}{2} \quad \text{etc.}$$

also folgt aus 22) und 23) durch Subtraction:

1) Diese Indices, also auch z, sowie λ sind durch Interpolation zu bestimmen; s. später.

$$z_1^2 - z^2 = \pi^2(\lambda_1 - \lambda) = \frac{\pi^2}{2}(z + z_1)$$

$$z_2^2 - z_1^2 = \pi^2(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\pi^2}{2}(z_1 + z_2)$$

$$z_3^2 - z_2^2 = \pi^2(\lambda_3 - \lambda_2) = \frac{\pi^2}{1}(z_2 + z_3) \quad \text{etc.}$$

und daher:

24) $$z_1 - z = z_2 - z_1 = z_3 - z_2 = \ldots = \frac{\pi^2}{2}$$

Die Gliederanzahlen der aufeinander folgenden Gruppen bilden also eine arithmetische Reihe 1. Ordnung mit der Differenz $\frac{\pi^2}{2}$.

Wir wollen nun zunächst prüfeu, wie weit die Resultate 22) und 23) mit dem berechneten Teil der β's übereinstimmen. Die Tafel II giebt

$$\beta_{12} = 0{,}193 \qquad \beta_{13} = -0{,}303.$$

Durch einfache Interpolation folgt dann:

$$\beta_{12{,}39} = 0$$

Diesen Anfangsindex einer Gruppe wollen wir μ, den Endindex derselben oder Anfangsindex der folgenden μ_1 nennen, sodass $z = \mu_1 - \mu$ wird. Dann ist für die Gruppe (13,25): $\mu = 12{,}39$; $\mu_1 = 25{,}96$. Ferner ist nach Taf. II:

$$-\beta_{18} = 1{,}912; \quad -\beta_{19} = 1{,}943; \quad -\beta_{20} = 1{,}872$$

Setze ich für diese Stelle der Tafel:

$$-\beta = a + bx + cx^2$$

sodass gleichzeitig

$$\begin{cases} x = 0 \\ \beta = \beta_{18}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ \beta = \beta_{19}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ \beta = \beta_{20} \end{cases}$$

wird, so folgt aus den angegebenen Zahlen:

$$a = 1{,}912 \quad b = 0{,}082 \quad c = -0{,}051$$

und:

$$-\frac{d\beta}{dx} = b + 2cx = 0 \quad \text{für} \quad x = 0{,}80$$

Es ist also der Maximalindex λ der Gruppe 18,80. In dieser Art ergiebt sich:

$$25)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{Gr.}(13;25)\left\{\begin{array}{l}\mu = 12{,}39\\ \lambda = 18{,}80\\ \mu_1 = 25{,}96\end{array}\right. & z = 13{,}57 & \pi\sqrt{\lambda} = 13{,}62\\ \text{Gr.}(26;44)\left\{\begin{array}{l}\lambda_1 = 34{,}84\\ \mu_2 = 44{,}47\end{array}\right. & z_1 = 18{,}51 & \pi\sqrt{\lambda_1} = 18{,}55\\ \text{Gr.}(45;67)\left\{\begin{array}{l}\lambda_2 = 55{,}81\\ \mu_3 = 67{,}91\end{array}\right. & z_2 = 23{,}44 & \pi\sqrt{\lambda_2} = 23{,}47\end{array}\right.$$

$$z_1 - z_4 = 4{,}94 \quad z_2 - z_1 = 4{,}93, \quad \frac{\pi^2}{2} = 4{,}9348$$

Wir können also sagen, dass **die Gültigkeit unserer Betrachtungen bereits im berechneten Teil der Tafel II beginne**, was sich auch weiterhin bestätigen wird.

Dem Werte 21) von β gemäss erreicht der Differentialquotient $\frac{d\beta}{d\xi}$ seine, absolut genommen, grössten Werte am Anfang und Ende der Gruppe; dies bestätigt auch die Rechnung; es sind z. B. die Differenzen

$$\beta_{12} - \beta_{13} = 0{,}496 \quad \text{und} \quad \beta_{26} - \beta_{25} = 0{,}411$$

grösser als irgend welche andere im ersten, bzhw. zweiten Teil der Gruppe; dass dieselben verschiedenes Zeichen haben, versteht sich auch von selbst, da der Differentialquotient an der Grenze zweier Gruppen für beide identisch ist. Hingegen müssten die beiden Differentialquotienten am Anfang und Ende der Gruppe Gl. 21) zufolge gleiche Absolutwerte haben; damit stimmt aber die Rechnung nicht überein; wol aber stimmt sie hierin mit der Gl. (16), denn denken wir uns zwei β im ersten und zweiten Teil der Gruppe die einander gleich sind, so ist für das zweite $\frac{\beta}{n}$ also $\frac{d^2\beta}{d\xi^2}$ (absolut genommen) kleiner als für das erste, also der Krümmungsradius grösser und der Bogen selbst flacher, also der Absolutwert des Differentialquotienten kleiner. Aus demselben Grunde muss auch das Maximum von β etwas näher dem Anfang als dem Ende der Gruppe liegen, was man aus den Zahlen in 25) in der Tat erkennen kann.

Wir dürfen annehmen, dass die 2te (oder eine noch engere) Annäherung an die Gl. 18) uns über diese Umstände genauer unterrichten werde.

§ 5.

Zweite Annähernng.

Wir geben jetzt der Gl. 18) die sich ihr besser als 19) anschliessende Form:

$$\frac{d^2\beta}{d\xi^2} + \frac{\beta}{\lambda}\left(1 - \frac{\xi}{\lambda}\right) = 0 \tag{26}$$ [1]

Ein particnläres Integral von 19) hat die Form $e^{a\xi}$, es liegt also nahe, jetzt mit der Form $e^{a\xi+b\xi^2}$ zu versuchen, oder indem man Imaginäres von Reellem sondert, zn setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \beta &= Ae^v \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ u &= (1+A_1)\xi + A_2\xi^2 + \gamma \\ v &= B_1\xi + B_2\xi^2 \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Hierin sind A nnd γ die Integrationsconstanten, während $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ gefnnden werden sollen. Dann wird

$$\frac{d\beta}{d\xi} = Ae^v\left\{\frac{dv}{d\xi}\cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{du}{d\xi}\sin\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\beta}{d\xi^2} = {} & Ae^v\cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\left\{-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dv}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\xi^2}\right\} \\ & - Ae^v\sin\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{2\frac{du}{d\xi}\frac{dv}{d\xi} + \frac{d^2u}{d\xi^2}\right\} \end{aligned} \tag{29}$$

Ich werde im Folgenden nnter der Voraussetznng, dass λ und anch schon $\sqrt{\lambda}$ sehr gross sei, die Glieder trennen in solche von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{\lambda^2}$ etc., so dass also, wie immer, Glieder geringerer Ordnnng einen grösseren Absolutwert haben als solche von höherer Ordnnng. Dabei müssen wir, um grobe Irrtümer zn vermeiden, streng an dem Grundsatz festhalten, dass, wenn wir irgend ein Glied von der Ordnnng $\frac{1}{\lambda^p}$ fortlassen, es fehlerhaft ist ein anderes von derselben oder höherer Ordnnng beiznbehalten.

Wir gehen nnnmehr zur Ausführung der Rechnnng über. Es ist

---

1) Bezüglich der strengen Integration dieser Gleibhung gilt dasselbe, was von derjenigen der Gl. 18) am Ende von § 3. gesagt ist.

$$30)\qquad \frac{du}{d\xi} = 1 + A_1 + A_2\xi; \quad \frac{dv}{d\xi} = B_1 + 2B_2\xi$$

folglich muss nach 26) und 29) sein:

$$31)\; Ae^v \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\Big\{-\frac{1}{\lambda}(1+2A_1+A_1^2+4A_2(1+A_1)\xi+4A_2^2\xi^2)+B_1^2$$
$$+4B_1B_2\xi+4B_2^2\xi^2+2B_2+\frac{1}{\lambda}-\frac{\xi}{\lambda^2}\Big\}$$
$$-Ae^v\sin\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big\{2B_1(1+A_1)+4(B_1A_2+B_2(1+A_1))\xi$$
$$+8A_2B_2\xi^2+2A_2\Big\} = 0$$

Wir setzen nun in den Coefficienten von $Ae^v\cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)$ und von $Ae^v\sin\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)$ die Factoren von ξ^0 und ξ einzeln gleich 0. Das giebt:

$$32)\quad \begin{cases} \text{a)} & -\frac{1}{\lambda}(2A_1+A_1^2)+2B_2+B_1^2 = 0 \\ \text{b)} & -\frac{4}{\lambda}A_2(1+A_1)+4B_1B_2-\frac{1}{\lambda^2} = 0 \\ \text{c)} & \frac{2}{\sqrt{\lambda}}(B_1(1+A_1)+A_2) = 0 \\ \text{d)} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(B_1A_2+B_2(1+A)) = 0 \end{cases}$$

Nehme ich nun A_1 als von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ an, so folgt aus a), dass B_2 und B_1^2 von keiner geringeren, und mindestens eine dieser Grössen auch von keiner höheren Ordnung sein können als $\frac{1}{\lambda^2}$. Aus c) folgt dann A_2 von der Ordnung B_1. Sind also $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$ endliche Zahlen so ist es das Natürlichste:

$$A_1 = \frac{a_1}{\lambda}, \quad B_2 = \frac{b_1}{\lambda}, \quad A_2 = \frac{a_2}{\lambda}, \quad B_2 = \frac{b_2}{\lambda^2}$$

zu setzen. Jetzt haben wir den Factor von ξ^2 im Coefficienten des Cosinus, nämlich $\frac{4A_2^2}{\lambda}$ d. i. $\frac{4a_2^2}{\lambda^3}$ als 0 betrachtet und mussten das, weil wir auch das Glied $\frac{\beta}{\lambda}\cdot\frac{\xi^2}{\lambda^2}$, also innerhalb des genannten Coef-

ficienten das Glied $\frac{\xi^2}{\lambda^3}$ fortgelassen haben; nun kann aber, wie die erste Annäherung zeigt, ξ bis zur Ordnung $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$ wachsen; wenn wir also das Glied $\frac{4a_2{}^2\xi^2}{\lambda^3}$ fortlassen, so lassen wir ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ fort, müssen also alle Glieder fortlassen. Im Coefficienten des Sinus lassen wir das Glied $\frac{8A_2B_2\xi^2}{\sqrt{\lambda}}$ d. i. ein Glied, dessen Ordnung mindestens $\frac{1}{\lambda^{2,5}}$ ist, fort, wodurch also keine weitere Beschränkung der Genauigkeit veranlasst wird. Sehen wir nun die Gl. (32) an, so ist die linke Seite der a) von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^2}$; wir können also aus ihr keine weiteren Schlüsse ziehen, die Gl. b) lautet:

$$-\frac{4a^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{a_1}{\lambda}\right)+\frac{4b_1b_2}{\lambda^3}-\frac{1}{\lambda^2}=0$$

ihre linke Seite ist ebenfalls von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^2}$, aber sie erhält den Factor ξ, kann also bis zur Grösse eines Gliedes der Ordnung $\frac{1}{\lambda^{1\frac{1}{2}}}$ steigen und ist daher zu berücksichtigen. Sie liefert, bei Fortlassung der Glieder höherer (nämlich mindestens $2\frac{1}{2}$ter) Ordnung:

$$a_2=-\tfrac{1}{4}$$

Die Gl. c) lautet:

$$\frac{2}{\lambda^{1\frac{1}{2}}}\left(b_1\left(1+\frac{a_1}{\lambda}\right)+a_2\right)=0$$

Ihre linke Seite ist von der $1\frac{1}{2}$ten Ordnung, ihr Coefficient 1, sie ist also zu berücksichtigen. Sie giebt:

$$b_1=-a_2=\tfrac{1}{4}$$

Die Gl. d) ist von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^{2\frac{1}{2}}}$; die linke Seite erhält den Coefficienten ξ, bleibt also stets mindestens von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^2}$, ist also ausser Betracht zu lassen.

Wir haben also a_2 und b_1 gefunden, während a_4 und b_2 unbestimmt, d. h. für den erreichten Grad der Genauigkeit gleichgültig bleiben. Wir können sie also auch $=0$ setzen und haben daher:

33) $$\begin{cases} \beta = Ae^v \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ u = \xi - \frac{\xi^2}{4\lambda} + \gamma; \quad v = \frac{\xi}{4\lambda} \end{cases}$$

Nun könnte jemand in der vorangehenden Deduction die nötige Schärfe vermissen, zumal wir erstere an eine Gleichung anknüpften, die sich später als unerheblich erwies. Darauf wäre zu erwidern: Wir haben in 33) einen Ausdruck für β gewonnen, bei dessen Substitution in die Gl. 26) sich alle diejenigen Glieder identisch zerstören, deren Grösse gleich oder bedeutender ist als die Grösse eines Gliedes von der Ordnung $\frac{1}{\lambda^{1\frac{1}{2}}}$. Solange wir uns also mit dieser Genauigkeit begnügen – und das müssen wir, weil in der Gl. 26) selbst Glieder höherer als der $1\frac{1}{2}$ten Ordnung fortgelassen sind — haben wir den obigen Ausdruck für β, der auch zwei willkürliche Constanten A und γ enthält, als das vollständige Integral der Differentialgleichung 26) anzusehen.

Wir bestimmen nun wieder γ so, dass β für $\xi = 0$ seinen Maximalwert erreicht. Setzen wir die Werte:

$$\left.\frac{du}{d\xi}\right]_{\xi=0} = 1, \qquad \left.\frac{dv}{d\xi}\right]_{\xi=0} = \frac{1}{4\lambda}$$

in $\frac{d\beta}{d\xi}$, Gl. (28), ein und dies dann $= 0$, so erhalten wir die Gleichung:

34) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}}$$

also

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(4\sqrt{\lambda})^3} \pm \cdots$$

oder

$$\gamma = \frac{1}{4} - \frac{1}{192\lambda} \pm$$

Schon die Hinzufügung des Gliedes $-\frac{1}{192\lambda}$ zu $\frac{1}{4}$ wäre mindestens überflüssig, da es für grosse Werte von ξ das einzige Glied von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ wäre; sie wäre aber auch geradezu fehlerhaft, da in u Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ fortgelassen sind, welche erst bei der nächsen (3ten) Annäherung hinzugefügt werden. Aber selbst da noch nicht, erst bei der vierten Annäherung wäre γ von

$\frac{1}{\lambda}$ verschieden anzunehmen. Dann wäre aber der Coefficient von $\frac{1}{\lambda}$ nicht $-\frac{1}{192}$, sondern ein ganz anderer. Wir setzen also:

35)
$$\gamma = \tfrac{1}{4}$$

Der Maximalwert von β, er sei B, ist jetzt:

36)
$$B = A\left(1 - \frac{1}{32\lambda}\right)$$

odec solange wir andere Glieder von der Ordnnng $\frac{1}{\lambda}$ fortlassen:

37)
$$B = A$$

Wir wollen jetzt die Werte berechnen, welche ξ annimmt, wenn

$$u = \mp\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$$

wird. Sei gleichzeitig:

38)
$$\left\{\begin{array}{l} u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} \\ \xi = p \end{array}\right. \quad \text{sowie} \quad \left\{\begin{array}{l} u = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} \\ \xi = -q \end{array}\right.$$

so werden p und q auch nahezu $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$ sein. Setze ich nach 33) und 35):

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = p - \frac{p^2}{4\lambda} + \tfrac{1}{4}$$

und nehme für p die Form an:

$$p = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + c$$

woraus:

$$p^2 = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{\lambda}$$

so folgt:

$$c = \frac{\pi^2 - 4}{16}$$

Wir dürfen nämlich keine Glieder von der Ordnnng $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ nehmen, da erst die dritte Annäherung ein solches Glied in $\frac{\xi^3}{\lambda^2}\left(\text{für } \xi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)$ hinzubringt. — Setze ich $\xi = -q$ in 33), so erhalte ich die Gleichungen:

$$-\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = -q - \frac{q^2}{4\lambda} + \tfrac{1}{4}$$

und

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = q + \frac{q^2}{4\lambda} - \tfrac{1}{4}$$

$$q = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + c'$$

$$c' = -\frac{\pi^2 - 4}{16}$$

Also haben wir:

39) $$\begin{cases} p = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + \dfrac{\pi^2 - 4}{16} \\ q = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} - \dfrac{\pi^2 - 4}{16} \end{cases}$$

Also auch jetzt ist noch

$$p + q = \pi\sqrt{\lambda}$$

aber nicht mehr

$$p = q$$

sondern:

40) $$p - q = \frac{\pi^2 - 4}{8} = 0{,}7338$$

womit die zweite Bemerknng am Ende des § 5. ihre Erledigung gefunden hat. Die in 25) zusammengestellten Zahlen geben für $p - q$ die Werte:

$$(\mu_1 - \lambda) - (\lambda - \mu) = 0{,}75; \quad (\mu_2 - \lambda_1) - (\lambda_1 - \mu_1) = 0{,}75$$
$$(\mu_3 - \lambda_2) - (\lambda_2 - \mu_2) = 0{,}76$$

Die verhältnissmässig weniger gute Uebereinstimmung als früher erklärt sich leicht dadurch, dass, abgesehen von der Voranssetznng sehr grosser Werte von n, in der Gl. 40) die grosse Zahl $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$ sich fortgehoben hat.

Wir wenden uns nun zur Bestimmung der Werte für $\frac{d\beta}{d\xi}$ am Anfang und Endo der Gruppe, welche bei der 1ten Annäherung sich als gleich ergeben. Ersteres mag mit

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha \quad \text{und sein Absolutwert mit} \quad \left(\overline{\frac{d\beta}{d\xi}}\right)_\alpha$$

letzteres mit

$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega$ und sein Absolutwert mit $\overline{\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)}_\omega$

bezeichnet werden. Nach 28) ist für $u = \mp \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha = \frac{Ae^v}{\sqrt{\lambda}}\frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=-q} \qquad \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{Ae^v}{\sqrt{\lambda}}\frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=p}$$

Um uns über die beizubehaltenden Glieder vollkommen klar zu werden, schreibe ich mit Rücksicht auf 33):

41)
$$\begin{cases} u = \xi - \frac{\xi^2}{4\lambda} + \gamma + \frac{a\xi^3}{\lambda^2} \\ v = \frac{\xi}{4\lambda} + \frac{b\xi^2}{\lambda^2} \end{cases}$$

dann sind alle diejenigen Glieder fortzulassen, deren Ordnung mit denen übereinstimmt, welche die (unbekannten) Factoren a oder b haben. Aus 41) folgt:

$$\frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=p} = 1 - \frac{p}{2\lambda} + \frac{3ap^2}{\lambda^2}; \quad e^v\Big]_{\xi=p} = 1 + \frac{p}{4\lambda} + \left(b + \frac{1}{32}\right)\frac{p^2}{\lambda^2}$$

also:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{p}{4\lambda} + \frac{cp^2}{\lambda^2}\right)$$

worin

$$c = 3a + b - \frac{3}{32}$$

also ebenfalls unbekannt ist. Nach 39) folgt dann weiter:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{\pi^2-4}{64\lambda} + \frac{c\pi^2}{4\lambda}\right)$$

Wir müssen also die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ fortlassen und haben den Absolutwert, wenn wir denjenigen von A auch mit $\overline{A}$ bezeichnen:

42) $$\overline{\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)}_\omega = \frac{\overline{A}}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}\right)$$

Ganz in derselben Art folgt für $\xi = -q$:

43) $$\overline{\left(\frac{d\beta}{\partial\xi}\right)}_\alpha = \frac{\overline{A}}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}\right)$$

so dass in der Tat jetzt der absolute Schlusswert kleiner als der absolute Anfangswert sich herausstellt. (Vgl. § 4. am Schlusse). Die Formeln 42) und 43) führen uns aber noch zu weiteren wichtigen Resultaten. Zunächst ist nämlich mit dem bisherigen Grade der Annäherung:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right)$$

Ferner ist aber der Endwert von $\frac{d\beta}{d\xi}$ bei der vorliegenden Gruppe identisch mit dem Anfangswert bei der folgenden; schreibe ich für diese λ_1, α_1, ω_1, bei den dann folgenden λ_2, α_2, ω_2 etc. statt λ, α, ω, so entstehen die Gleichungen:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega_1} = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\alpha_1} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_1}}\right)$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega_2} = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\alpha_2} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_2}}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega_r} = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\alpha_r} \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_r}}\right)$$

und daher durch Multiplication:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega_r} = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right)\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_1}}\right)\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_2}}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_r}}\right)$$

Die zweiten Glieder in den Klammern werden immer kleiner, und ich habe daher, indem ich zur Grenze übergehe:

$$\lim\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega_r} = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha \left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}\right)\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_1}}\right)\left(1-\frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_2}}\right)\cdots$$

Setze ich hierin für $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda_1}$ ... die Werte aus 22) und 23), so wird:

$$44) \quad \lim\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega_r} = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha \left(1-\frac{\pi^2}{4z}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4z_1}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4z_2}\right)\cdots$$

Jetzt bilden aber die Grössen z, z_1, z_2 ... eine arithmetische Reihe 1. Ordn. (s. § 4. Gl. 24)), folglich divergirt die Reihe:

Digitized by Google

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\dots\right)$$

daher convergirt das Product in 44) zur Null hin und wir haben das für vorliegende Untersuchung sehr wichtige Resultat:

$$45)\qquad \lim\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\omega_r}=0$$

wobei daran erinnert werden mag, dass $\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{\overline{d\beta}}{\partial\xi}\right)_\omega$ die grössten Werte von $\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}$ sind (s. § 4., letzter Absatz).

Bezeichnen wir die den A entsprechenden Grössen in den folgenden Gruppen mit $A_1 A_2 \dots$ und drücken die Gleichheit von $\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_\omega$ und $\left(\frac{\overline{d\beta}}{d\xi}\right)_{\alpha_1}$ analytisch aus, so folgt aus 44) und 43):

$$\frac{\overline{A_1}}{\sqrt{\lambda_1}}\left(1+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda_1}}\right)=\frac{\overline{A}}{\sqrt{\lambda}}\left(1-\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}\right)$$

oder:

$$46)\quad\begin{cases}\overline{A_1}=\overline{A}\,\dfrac{z_1}{z}\,\dfrac{1-\frac{\pi^2}{8z}}{1+\frac{\pi^2}{8z_1}}\\[2ex]\overline{A_2}=\overline{A_1}\,\dfrac{z_2}{z_1}\,\dfrac{1-\frac{\pi^2}{8z_1}}{1+\frac{\pi^2}{8z_2}}\\[2ex]\overline{A_3}=\overline{A_2}\,\dfrac{z_3}{z_2}\,\dfrac{1-\frac{\pi^2}{8z_2}}{1+\frac{\pi^2}{8z_3}}\\ \dots\dots\dots\\ \overline{A_r}=\overline{A_{r-1}}\,\dfrac{z_r}{z_{r-1}}\,\dfrac{1-\frac{\pi^2}{8z_{r-1}}}{1+\frac{\pi^2}{8z_r}}\end{cases}$$

Die Multiplication dieser Gleichungen ergiebt bei bisheriger Annäherung:

$$\overline{A}_r = \overline{A}\,\frac{z_r}{z}\,\frac{1-\frac{\pi^2}{8z}}{1-\frac{\pi^2}{8z_{-r}}}\left(1-\frac{\pi^2}{4z_1}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{\pi^2}{4z_r}\right)$$

Indem wir zur Grenze übergehen, wird $\left(1-\frac{\pi^2}{8z_r}\right)=1$ nnd wir erhalten:

$$47)\qquad \lim \overline{A}_r = \overline{A}\,\frac{8z-\pi^2}{8z^2}\lim P_r$$

$$P_r = z_r\left(1-\frac{\pi^2}{4z_1}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{4z_2}\right)\ldots\left(1-\frac{\pi^2}{4z_r}\right)$$

Der Wert von P_r lässt sich nicht unmittelbar angeben, da es in der Form $\infty . 0$ erscheint. Es ist aber, wenn ich natürliche Logarithmen mehme,

$$\log P_r = \log z_r - \left(\frac{\pi^2}{4z_1}+\frac{\pi^2}{4z_2}+\ldots+\frac{\pi^2}{4z_r}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi^2}{4z_1}\right)^2+\left(\frac{\pi^2}{4z_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\pi^2}{4z_r}\right)^2\right\}$$
$$-\text{ etc.}$$

Setze ich nun

$$z_1 = \frac{\pi^2}{2}(a+\alpha)$$

wobei a eine posit. ganze Zahl und α ein positiver echter Bruch ist, so ist nach 24):

$$z_2 = \frac{\pi^2}{2}(a+1+\alpha),\quad z_3 = \frac{\pi^2}{2}(a+2+\alpha),\ \ldots\ z_r = \frac{\pi^2}{2}(a+r-1+\alpha)$$

folglich, wenn ich zur Abkürzung

$$\frac{1}{(a+\alpha)^p}+\frac{1}{(a+1+\alpha)^p}+\ldots+\frac{1}{(a+r-1+\alpha)^p} = U_p$$

setze:

$$48)\ \log P_r = \log z_r - \frac{U_1}{2} - \frac{1}{2}\frac{U_2}{2^2} - \frac{1}{3}\frac{U_3}{2^3} - \frac{1}{4}\frac{U_4}{2^4} - \ldots$$

Jetzt ist

$$U_p < \frac{1}{a^p}+\frac{1}{(a+1)^p}+\ldots+\frac{1}{(a+r-1)^p}$$
$$< 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\text{ in infin.}$$

also:

$$U_2 < \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{U_2}{2^2} < \frac{\pi^2}{24};$$

$$U_4 < 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots < \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)^2$$

also:

$$\frac{U_4}{2^4} < \left(\frac{\pi^2}{24}\right)^2$$

ebenso:

$$U_6 < 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots < \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)^3$$

folglich:

$$\frac{U_6}{2^6} < \left(\frac{\pi^2}{24}\right)^3$$

In dieser Art fortgehend findet man:

$$\frac{1}{2}\frac{U_2}{2^2} + \frac{1}{4}\frac{U_4}{2^6} + \frac{1}{6}\frac{U_6}{2^6} + \dots < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{24}\right)^3 + \dots\right)$$

also da $\frac{\pi^2}{24}$ ein echter Bruch ist, gleich einer endlichen Zahl, die kleiner als $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-\frac{\pi^2}{24}}\right)$ ist nnd sowol von a wie von r abhängt, ich bezeichne sie mit D_r nnd in der Grenze für $r = \infty$ mit D. Ebenso wird

$$\frac{1}{3}\frac{U_3}{2^3} + \frac{1}{5}\frac{U_5}{2^5} + \frac{1}{7}\frac{U_7}{2^7} + \dots = E_r$$

d. i. ebenfalls gleich einer endlichen Zahl $< D_r$ sein, die für $r = \infty$ in E übergehen mag. Jetzt bleibt noch $\frac{U_1}{2}$; dies bringe ich auf die Form:

$$\frac{1}{2}U_1 = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{a-1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a+r-1}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\alpha}\right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+1+\alpha}\right) + \dots\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{a+r-1} - \frac{1}{a+r-1+\alpha}\right)\right\}$$

Der Wert der letzten Klammer ist kleiner als

$$\alpha\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \dots + \frac{1}{(a+r-1)^2}\right)$$

d. i. wieder eine endliche Zahl $< \alpha \frac{\pi^2}{6}$; sie sei F_r und in der Grenze αF, daher wird:

$$\frac{1}{2} U_1 = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{a-1}\right) - \frac{\alpha}{2} F_r + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a+r-1}\right)$$

Endlich ist:

$$\log z_r = \log \frac{\pi^2}{2} + \log\left(1 + \frac{\alpha}{a+r-1}\right) + \log(a+r-1)$$

folglich wird, wenn ich auf beiden Seiten von 48) $\frac{1}{2}\log z_r$ abziehe:

$$\log\left(\frac{P_r}{\sqrt{z_r}}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\alpha}{a+r-1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a-1}\right)$$
$$+ \frac{\alpha}{2}F_r - D_r - E_r - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a+r-1} - \log(a+r-1)\right)$$

Jetzt ist:

$$\lim\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{a+r-1} - \log(a+r-1)\right) = \text{Const} = 0{,}57\dots$$

gehen wir also zur Grenze über, so wird:

$$\lim \log\left(\frac{P_r}{\sqrt{z_r}}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a-1}\right)$$
$$+ \frac{\alpha}{2}F - D - E - \frac{1}{2}\,0{,}577\,\dots$$

d. h. gleich einer von a und α oder von x abhängigen Constanten. Dasselbe ist also mit der Grenze von $\frac{P_r}{\sqrt{z_r}}$ selbst der Fall, und bezeichne ich deren Wert, um an ihre Abhängigkeit von x zu erinnern, mit C_x, so folgt aus 47), wenn ich diese Gleichung durch $\sqrt{z_r}$ dividire:

$$\lim\left(\frac{\overline{A_r}}{\sqrt{z_r}}\right) = \overline{A}\,\frac{8x + \pi^2}{8x}\,C_x$$

In dieser Gleichung hängt A sowol wie x von derjenigen Gruppe ab, die den Ausgangspunkt bildet. Bezeichne ich die rechte Seite mit K, so habe ich:

49) $$\lim\left(\frac{\overline{A_r}}{\sqrt{z_r}}\right) = K$$

d. h. wenn z selbst schon gross genug ist, so gilt für genügend grosse r die Gleichung:

50) $$\overline{A_r} = K.\sqrt{z_r}$$

die sich auch, wenn H eine andere Constante ist, mit demselben Rechte (d. h. mit etwa derselben Annäherung) wegen 22):

51) $$\overline{A_r} = H.\lambda_r^{\frac{1}{4}}$$

schreiben lässt. In beiden Formeln können wir B statt A setzen: denn, nehmen wir die Gl. 37), so bleibt Alles ungeändert, nehmen wir aber die Gl. 36), so hebt sich im Producte der Gll. 46) alles neu Hinzukommende bis auf den Factor $\frac{1}{1+\frac{1}{32\lambda}}$ auf der rechten Seite fort, wodurch nur die Constanten K und H eine Aenderung erfahren. Wir können also auch die Gleichungen:

52) $$\begin{cases} \overline{B_r} = K_1 \sqrt{z_r} \\ \overline{B_r} = H_1 \lambda_r^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

aufstellen. Prüfen wir die Genauigkeit dieser Gleichungen für mässig grosse Werte von n, so ist nach Taf. II [1]) und den in 25) zusammengestellten Zahlen:

Gruppe	B	z	λ	$\frac{\log B : \sqrt{z}}{\log 10}$	$\frac{\log B : \sqrt[4]{\lambda}}{\log 10}$
(13; 25)	1,943	13,57	18,80	9,7222	9,9699
(26; 44)	2,264	18,51	34,84	9,7212	9,9694
(45; 67)	2,545	23,44	55,81	9,7208	9,9690

Hier stimmen also die in den letzten beiden Rubriken unter einander stehenden Zahlen schon gut überein. Ich bemerke noch, dass durch Substitution des Grenzwertes von A aus 51) in 43) die Gleichung

1) Vielleicht wäre es richtiger, den Wert von B vermöge der zur Bestimmung der Zahlen 25) angewandten Interpolationsformel zu berechnen, doch würden die Resultate sich kaum wesentlich verändern.

Digitized by Google

$$\lim \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\alpha} = H \lim \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\left(1+\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}\right)_{\lambda=\infty}$$
$$= 0$$

erhalteu wird, die mit 45) in Einklaug steht.

Addire ich die Gleichnngen 42) und 43), so entsteht nach Substitution von 51):

53) $$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\alpha} + \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega} = \frac{2H}{\lambda^{\frac{1}{4}}};\quad \lambda \text{ genügend gross.}$$

Diese Gleichnng wird für nns von besonderer Bodentnng werden. Bezeichne ich ihro linke Seite mit $\overline{G}$, so wird:

54) $$\overline{G} = \frac{2H}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \quad \text{oder} \quad G\lambda^{\frac{1}{4}} = \text{const}$$

Prüfon wir wieder dio Genanigkeit diesor Formol für dio berehneten Zahleu! Es ist Gruppe (13,25):

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\alpha} = \beta_{13} - \beta_{12} = -0{,}4962$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\omega} = \beta_{26} - \beta_{25} = 0{,}4107$$

daher:

$$\overline{G} = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\alpha} + \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right) = 0{,}9069$$

ebenso für Gr. (26; 44): $G = 0{,}7711$

„ „ (45; 67) „ „ 0,841

Dadurch orgiebt sich für diese drei Gruppen:

55) $$\frac{\log}{\log 10}\left(\overline{G}\sqrt[4]{\lambda}\right) = 0{,}2761;\quad 0{,}2727;\quad 0{,}1719$$

Diese Uebereiustimmnng ist merklich geringer als die frühere. Dies ist dadurch zn erklären, dass in 53) sich das Glied niedrigster Ordnung $\frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}$ fortgehoben hat, nnd dass somit die Glieder höherer Ordnung, zunächst von der Ordnnug $\frac{1}{\lambda}$, an Bedentung gewinnen. Diese Glieder lehrt aber erst die dritte Aunäherung kennen. — Selbstverständlich werden die Gl. 53) und 54) desto genauer erfüllt, je grösser n oder λ sind.

§ 6.

Dritte Annäherung.

Da der Zweck der dritten Annäherung von untergeordneter Bedeutung, nämlich eigentlich nur die Bildung eines Correctionsgliedes ist, so wollen wir uns bei ihrer Darstellung, zumal die Methode genügend erörtert wurde, kurz fassen.

Die Gl. 18) erhält nunmehr die Form:

56) $$\frac{d^2\beta}{d\xi^2}+\frac{\beta}{\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)=0$$

Setzen wir

57) $$\begin{cases}\beta = Ae^v\cos\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\\ u=(1+A_1)\xi-\frac{\xi^2}{4\lambda}(1+A_2)+A_3\xi^3+\gamma\\ v=\frac{\xi}{4\lambda}(1+B_1)+B_2\xi^2+B_3\xi^3\end{cases}$$

so ist der Ausdruck 29) für $\frac{d^2\beta}{d\xi^2}$ zu bilden. Wird derselbe in 56) substituirt, so lassen sich sechs Gleichungen aufstellen, vermöge derer die Glieder mit $\xi^0 \xi \xi^2$ identisch verschwinden sollen. Der Umstand, dass die Glieder mit ξ^3 vernachlässigt werden, erfordert es, nur Glieder bis zur Ordnung $\frac{1}{\lambda^2}$ einschliesslich beizubehalten (bei der 2ten Annäherung bis $\frac{1}{\lambda^{1\frac{1}{2}}}$ einschliesslich). Dadurch werden drei Gleichungen bedeutungslos und in Folge dessen $A_2 B_1 B_3$ unbestimmbar, während für die andern sich sichere Werte ergeben; nehmen wir die ersteren als Null an, so sind die Resultate:

58) $$\begin{cases}u=\left(1-\frac{3}{32\lambda}\right)\xi-\frac{\xi^2}{4\lambda}+\frac{\xi^3}{8\lambda^2}+\gamma\\ v=\frac{\xi}{4\lambda}-\frac{\xi^2}{8\lambda^2}\end{cases}$$

59) $$\begin{cases}\frac{du}{d\xi}=\left(1-\frac{3}{32\lambda}\right)-\frac{\xi}{2\lambda}+\frac{3\xi^2}{8\lambda^2}\\ \frac{dv}{d\xi}=\frac{1}{4\lambda}-\frac{\xi}{4\lambda^2}\end{cases}$$

Digitized by Google

Jeder dieser Ausdrücke geht jetzt um eine halbe Ordnung weiter, u — für ξ (nahezu) gleich $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$ — bis $\frac{1}{\lambda}$, v bis $\frac{1}{\lambda}$ etc. Wiederum ist $\gamma = \frac{1}{4}$ zu setzen, weil in u Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ fehlen, (vgl. oben vor Gl. 35)). Die Grössen p und q sind ähnlich zu bestimmen wie früher und erhalten ebenfalls ein Glied hinzu:

60) $$\begin{cases} p = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{\pi^2-4}{16} - \frac{\pi}{64\sqrt{\lambda}} \\ q = \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} - \frac{\pi^2-4}{16} - \frac{\pi}{64\sqrt{\lambda}} \end{cases}$$

woraus für z der wenig geänderte Wert

61) $$z = p + q = \pi\sqrt{\lambda} - \frac{\pi}{32\sqrt{\lambda}}$$

folgt, während $p - q$ ungeändert bleibt.

Ferner wird jetzt für $u = \pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha = \frac{Ae^v}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=-q}$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{Ae^v}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{du}{d\xi}\Big]_{\xi=p}$$

Hier geht $\frac{du}{d\xi}$ bis $\frac{1}{\lambda}$ herab, entwickeln wir e^v ebensoweit, setzen also

$$e^v = 1 + \frac{\xi}{4\lambda} - \frac{3}{32}\,\frac{\xi^2}{\lambda^2}$$

so wird:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\xi}{4\lambda} - \frac{3}{32\lambda} + \frac{5}{32}\,\frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)_{\xi=-q}$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\xi}{4\lambda} - \frac{3}{32\lambda} + \frac{5}{32}\,\frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)_{\xi=p}$$

d. i. nach 60) bis $\frac{1}{\lambda}$ in der Klammer einschliesslich:

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{3\pi^2-4}{128\lambda}\right)$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{3\pi^2-4}{128\lambda}\right).$$

Jetzt darf nicht mehr A mit B identificirt werden, sondern muss nach 36):

62) $$A = B\left(1 + \frac{1}{32\lambda}\right)$$

gesetzt werden, so dass

63) $$\begin{cases} \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha = \frac{B}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{3\pi^2}{128\lambda}\right) \\ \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = -\frac{B}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{3\pi^2}{128\lambda}\right) \end{cases}$$

sich ergeben [1]). Hieraus folgt:

$$\overline{G} = \overline{\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha} + \overline{\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega} = \frac{\overline{2B}}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + \frac{3\pi^2}{128\lambda}\right)$$

und schliesslich (für genügend grosse r nach 52)):

64) $$\frac{G \,.\, \lambda^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{3\pi^2}{128\lambda}\right)} = \frac{2B}{\lambda^{\frac{1}{2}}} = \text{const}$$

Ziehen wir nun von den Zahlen 55) die briggischen Logarithmen des Nenners nämlich bzhw.

	0,0053	0,0029	0,0018
ab, so bleiben:			
	0,2708	0,2698	0,2701

deren Uebereinstimmung viel besser ist.

§ 7.

Die Grössen b und die Convergenz ihrer Reihe.

Nachdem uns die Auflösung der Gl. 18) in 1ter und 2ter Annäherung die hauptsächlichen Eigenschaften der Grössen β enthüllt, und die 3te Annäherung einen auffälligen Mangel an Uebereinstimmung zwischen Theorie und Zahlenrechnung grossenteils beseitigt

1) Bildet man aus den Formeln 63) Gleichungen, die den 46) analog sind, so ist der Unterschied nur, dass noch andere convergente Reihen von der Art der oben $U_2\, U_3\, \ldots$ genannten und zwar teils mit negativem, teils mit positivem Vorzeichen hinzukommen, sodass man schliesslich ebenfalls zu einer Gleichung gelangt (sei es in z oder in λ mit Rücksicht auf 61), die genau die Form der Gl. 52) besitzt.

hat, können wir nun die bei der Untersuchung der Grössen β gewonnenen Resultate für die Grössen b selbst nutzbar machen. Wir können letztere zunächst in folgender Art charakterisiren, wobei ich daran erinnere, dass (Gl. 8)):

$$b_n = \frac{1}{n} \beta_n \quad \text{ist.}$$

Die Grössen b zerfallen (vgl. Taf. I) in Gruppen von abwechselnd positiven und negativen Gliedern. Die Anzahl der Gruppenglieder wächst von Gruppe zu Gruppe in arithmetischer Reihe[1]) mit der Differenz $\frac{\pi^2}{2}$ (Gl. 24)). In jeder einzelnen Gruppe nehmen die Glieder von nahe an Null bis zu einem Maximalwerte zu und von da an wieder ab. Die Maximalwerte verringern sich von Gruppe zu Gruppe, und zwar schneller als umgekehrt proportional der Anzahl ihrer Glieder; denn n ist nahezu prop. z_r^2, also $B_r : n$ nahezu prop. $z^{-\frac{3}{2}}$.

Die wichtigste Frage ist nun die nach der Convergenz der Reihe in 1):

$$65) \qquad S = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

Ich nehme zuerst $x = 1$ an und erhalte dadurch:

$$S_1 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

Seien jetzt r und s die Anfangsgliedzahlen zweier aufeinander folgenden Gruppen, so ist nach 13) für $u = r - 1$:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{r-1} + \beta_r - \beta_{r-1} = 0$$

Nun ist aber $\beta_r - \beta_{r-1}$ nach unserer Auffassung soviel als $\frac{d\beta}{d\xi}$ für das Ende der mit b_{r-1} schliessenden oder den Anfang der mit b_r beginnenden Gruppe; die letztere fasse ich aber in's Auge und schreibe daher die obere Gleichung:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{r-1} + \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha = 0$$

Ebenso erhalte ich für den Schluss der mit b_r beginnenden Gruppe:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{s-1} + \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega = 0$$

---

1) Hiebei, wie im Folgenden, wird n genügend gross vorausgesetzt.

Die Subtraction der ersten Gleichung von der letzten giebt:

66) $$b_r + b_{r+1} + \dots + b_{s-1} = \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha - \left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega$$

Nun ist aber das Zeichen von $\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\omega$ demjenigen von $\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_\alpha$ entgegengesetzt, also ist, wenn ich die absoluten Werte einführe (und durch Ueberstreichung bezeichne) und für jede negative Gruppe $(r, s-1)$ die Gleichung 66) noch mit -1 multiplicire:

67) $$\overline{b_r + b_{r+1} + \dots + b_{s-1}} = \overline{\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)}_\alpha + \overline{\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)}_\omega$$

Die rechte Seite ist früher (nach Gl. 53)) mit G bezeichnet worden. Behalte ich diese Bezeichnung in der Bedeutung **Gruppensumme** bei, so ist nach 54):

$$\overline{G}\,\lambda^{\frac{1}{2}} = \text{const.}$$

oder (immer genügend grosses n vorausgesetzt):

$$\overline{G}\sqrt{z} = \text{const} = C$$

68) $$G = \frac{C}{\sqrt{z}}$$

Betrachten wir also die Gruppensummen als Glieder einer neuen Reihe, so convergirt diese, da die wirklichen Gruppensummen abwechselnde Vorzeichen haben, wie

69) $$\frac{C}{\sqrt{z}} - \frac{C}{\sqrt{z+d}} + \frac{C}{\sqrt{z+2d}} - \frac{C}{\sqrt{z+3d}} \pm \cdots$$

Die Reihe S 65) convergirt also für $x = 1$ und umso schneller, wenn $x < 1$ ist.

Nachdem wir die Convergenz der Reihe S_1 erkannt haben, ist es auch leicht ihre wirkliche Summe zu erfahren. Dazu dient uns die hier schon einmal benutzte Gl. 13). Das so zu nennende Restglied $\beta_{n+1} - \beta_n$ ändert sich von nahe an 0 bis zu einem Maximalwert am Anfang oder Ende der Gruppe. Aber auch in letzterem Falle ist wie 45) aussagt:

$$\lim \overline{(\beta_{n+1} - \beta_n)} = \lim \overline{\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)}_\omega = 0$$

folglich ist:

$$\lim (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n)_{n=\infty} = 0$$

d. i.

70) $$S_1 = 0$$

Setzen wir aber in 1) $x = 1$, so erhalten wir die in der Tat richtige Gleichung:

$$e^{-\frac{1}{0}} = \frac{1}{e}.S_1$$

d. i.

$$e^{-\infty} = 0$$

Dass die Reihe S auch für negative Werte von x bis $x = -1$ einschl., und zwar noch schneller convergirt, ist fast selbstverständlich; ich begnüge mich daher, nur als Resultat anzugeben, dass sie im letzteren Falle, wie die Reihe:

$$\frac{C}{s^{2\frac{1}{4}}} + \frac{C}{(s+d)^{2\frac{1}{4}}} + \frac{C}{(s+2d)^{2\frac{1}{4}}} + \ldots$$

convergirt.

Bemerkung. Betrachten wir die Grössen β und b als Coordinaten von Curven, deren Abscisse n ist, so liegen (im weiteren Verlaufe) die Maxima und Minima bei der ersteren auf einer Curve, die sich langsamer öffnet als die Parabel, bei der letzteren auf einer zweiästigen Curve, die der Abscissenaxe die convexen Seiten zukehrt und sich ihr (von oben bzhw. von unten her) asymptotisch nähert, aber langsamer als eine Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenaxen sind.

§ 8.

Anwendungen.

I. Setze ich in 1) $x = 1 - y$, so erhalte ich:

71) $$e^{-\frac{1}{y}} = \frac{1}{e}(b_0 + b_1(1-y) + b_2(1-y)^2 + \ldots)$$

Diese Reihe ist gültig für y von 2 herunter bis zur 0 einschliesslich, doch darf eine Umordnung nach Auflösung der Klammern nicht stattfinden.

II. Bestimmung des Integrals:

$$U = \int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y}$$

Durch partielle Integration ergiebt sich:

$$U = -\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_1^\infty - \int_1^\infty e^{-y}\frac{dy}{y^2}$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y^2} = -\left[\frac{e^{-y}}{y^2}\right]_1^\infty - 2\int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y^3}$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y^3} = -\left[\frac{e^{-y}}{y^3}\right]_1^\infty - 3\int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y^4}$$

. . . .

$$\int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y^k} = -\left[\frac{e^{-y}}{y^k}\right]_1^\infty - k\int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y^{k+1}}$$

also, indem ich diese Gleichnngen der Reihe nach mit $1, -1, 1.2$ $-1.2.3, \dots (-1)^{k-1}.1.2.3 \dots (k-1)$ multiplicire nnd addire:

$$U = \frac{1}{e}(1-1+1.2-1.2.3+\dots+(-1)^{k-1}.1.2.3\dots(k-1)) + (-1)^k.1.2.3\dots k.\int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y^{k+2}} \qquad 73)$$

Für das Integral rechter Hand setze ich:

$$y = \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{y} = 1-x$$

so wird:

$$\frac{dy}{y^2} = dx; \quad \frac{dy}{y^{k+1}} = (1-x)^{k-1}dx$$

und daher das Integral:

$$74) \quad U_k = \int_1^\infty \frac{e^{-y}dy}{y^{k+1}} = \int_0^1 e^{-1:(1-x)}(1-x)^{k-1}dx$$

Jetzt ist:

$$75) \int_0^1 (1-x)^{k-1}dx = \frac{1}{k}; \int_0^1 x^n(1-x)^{k-1}dx = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(k)}{\Gamma(n+1+k)}$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\frac{1.2.3\dots n}{(k+1)\dots(k+n)}$$

Substituire ich also für $e^{-\frac{1}{1-x}}$ die Reihe 1), multiplicire sie mit $(1-x)^{k-1}$ und integrire von 0 bis 1, so erhalte ich:

$$76)\quad kU_k = \frac{1}{e}\left(b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{k+1} + b_2 \cdot \frac{1.2}{(k+1)(k+2)} + \dots + b_{n-1}\frac{1.2\dots(n-1)}{(k+1)\dots(k+n-1)}\right) + \frac{kT}{e}$$

$$77)\quad T = \int_0^1 (1-x)^{k-1}(b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots)\,dx$$

Jetzt nehme ich an, dass b_n das Anfangsglied einer Gruppe und zwar will ich sagen, einer positiven Gruppe sei; die Anfangsglieder der folgenden Gruppen seien b_r, b_s, b_t, ... oder um nur mit positiven Grössen zu tun zu haben: $-c_r$, $+b_s$, $-c_t$, ... wobei also $b_\alpha = -c_\alpha$ gesetzt ist. Dann ist:

$$b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_{r-1}x^{r-1} < x^n(b_n + b_{n+1} + \dots + b_{r-1})$$

oder wenn ich die Summe einer mit b_α beginnenden Gruppe ihrem wirklichen Werte nach (d. h. mit Rücksicht auf das Vorzeichen) durch G_α bezeichne:

$$b_n x^n + \dots + b_{r-1}x^{r-1} \leqq x^n . G_n$$

$$c_r x^r + \dots + c_{s-1}x^{s-1} \geqq x^s . \overline{G}_r$$

$$b_s x^s + \dots + b_{t-1}x^{t-1} \leqq x^s . G_s$$

etc.

also:

$$78)\quad b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots \text{ in infin.} \leqq G_n x^n - \overline{G}_r x^s + G_s x^s \mp \dots$$

wobei das Gleichheits-Zeichen nur für $x = 1$ gilt. Nun bilden G_n, $\overline{G}_r$, G_s, ... eine abnehmende Reihe folglich ist

$$G_n x^n - \overline{G}_r x^s \pm \dots = G_n x^n - \vartheta_1 \overline{G}_r x^s \quad 0 < \vartheta_1 < 1$$

aber es ist auch

$$b_n + b_{n+1} + \dots \text{ in infin.}$$

eine positive Grösse, denn nach 13):

$$b_0+b_1+\dots+b_{n-1}=\beta_{n-1}-\beta_n=(n-1)\,b_{n-1}-n\,b_n=\text{neg.}$$

also wegen 70):

$$b_n+b_{n+1}+\dots=-(b_0+\dots+b_{n-1})=\text{pos.}$$

Daher ist für $x \leqq 1$ die rechte Seite von 78) positiv und $< G_n x^n$ also:

79) $\quad b_n x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\dots < G_n x^n$ und positiv

Multiplicire ich diese Beziehung beiderseits mit der positiven Grösse $(1-x)^{k-1}$ und summire von 0 bis 1, so kommt:

$$\int\limits_0^1 (b_n x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\dots)(1-x)^{k-1}dx < G_n \int\limits_0^1 x^n(1-x)^{k-1}dx$$

also wird, wenn ich unter ϑ einen positiven echten Bruch verstehe:

80)
$$\begin{aligned}T&=\vartheta\,.\,G_n\int\limits_0^1 x^n(1-x)^{k-1}dx\\&=\vartheta\,.\,G_n\,.\,\frac{1}{k}\,.\,\frac{1\,.\,2\,\dots\,n}{(k+1)\,\dots\,(k+n)}\end{aligned}$$

Ich nahm b_n als Anfangsglied einer positiven Gruppe an, aber durchaus ähnliche Betrachtungen gelten auch, wenn es das Anfangsglied einer negativen Gruppe ist, d. h. wir gelangen wieder zur Formel 80), worin dann G_n den wirklichen Wert der Gruppensumme und ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet. Durch Combination der Gl. 73) 76) 80) wird nun:

81)
$$U=\frac{1}{e}\Big\{1-1+1.2\mp\dots+(-1)^{k-1}.1.2\dots(k-1)+(-1)^k.1.2\dots(k-1).$$
$$\Big(b_0+b_1\,.\,\frac{1}{k+1}+b_2\,.\,\frac{1.2}{(k+1)(k+2)}+\dots+b_{n-1}\,.\,\frac{1.2\dots(n-1)}{(k+1)\dots(k+n-1)}\Big)$$
$$+(-1)^k\,.\,\frac{1.2\dots(k-1).n!}{(k+1)\dots(k+n)}\,.\,\vartheta\,.\,G_n\Big\}$$

Mittelst der am Schlusse der Tafeln angegebenen Werte der Gruppensumme G_a ist es also möglich den Maximalfehler zu ermessen, den man bei Fortlassung des letzten Gliedes begeht.

Die Formel 81) lässt noch eine Willkür übrig, nämlich die Wahl der Zahl k, und wir können diese nun so wählen, dass erwähnter

Fehler so klein wie möglich wird. Dabei nehme ich an, es sei n (als Anfangsindex einer Gruppe), also die Anzahl der zu berechnenden Glieder schon vorweg bestimmt worden. Dann ist dem Rest- oder Fehlergliede — es sei $\vartheta . V_k . (-1)^k$

$$V_k = \frac{1.2 \ldots (k-1)\, n!}{(k+1) \ldots (k+n)} G_n -$$

$n!\,G_n$ fest gegeben, das Andere hängt aber von k ab. Dieser Teil nimmt mit wachsendem k anfänglich ab, dann wieder zu; er wird also sein Minimum erreichen, wenn so nahe wie möglich $V_k = V_{k+1}$ ist. Nun ist

$$V_{k+1} = \frac{1.2 \ldots (k-1)\, k . n!}{(k+2) \ldots (k+n+1)}$$

also

$$\frac{V_{k+1}}{V_k} = \frac{k(k+1)}{n+k+1}.$$

Dies ist $= 1$, wenn

$$k(k+1) = n+k+1$$

$$(k+1)(k-1) = n$$

82) $$k = \sqrt{n+1} \quad \text{ist.}$$

Ist k grösser als $\sqrt{n+1}$, so ist V_{k+1} grösser als V_k. Wir müssen also $k = \sqrt{n+1}$ oder, falls dies irrational ist, gleich der nächst grösseren ganzen Zahl wählen. Da bei solcher Bestimmung immer n grösser als k ist, so heben sich in 81) in den Coefficienten der b von b_k an Factoren vom Zähler gegen Nenner fort und wir können schreiben:

83) $$U = \frac{1}{e}\Big\{1-1+1.2-1.2.3 \pm \ldots + (-1)^{k-1}.(k-1)!$$
$$+(-1)^k (k-1)!\Big(b_0 + b_1 . \frac{1}{k+1} + \ldots + b_{k-1} . \frac{1.2 \ldots (k-1)}{(k+1)\ldots(2k-1)}$$
$$+1.2 \ldots k \Big\{\frac{b_k}{(k+1)\ldots(2k)} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{n(n+1)\ldots(k+n-1)}\Big\}\Big) + W\Big\}$$

$$W = (-1)^k \frac{(k-1)!\,k!}{(n+1)\ldots(k+n)} . \vartheta\, G_n \quad \left(\begin{array}{c} G_n \text{ Summe der Gruppe, deren} \\ \text{erster Index } n \text{ ist} \end{array}\right)$$

$$k \overset{=}{(>)} \sqrt{n+1}$$

Hierin hebt sich noch das Glied mit b_0 gegen das vorangehende fort.

Beispiele. $n = 4$, $k \overline{(>)} \sqrt{5} = 3$, $G_n = +1{,}16$, also:

$$\text{Maximalfehler} = -\frac{2}{35} \cdot \frac{1{,}16}{e} = -\frac{0{,}066}{e}.$$

$n = 13$, $k \overline{(>)} \sqrt{14} = 4$, $G_n = -0{,}907$, also:

$$\text{Maximalfehler} = -\frac{3}{1190} \cdot \frac{0{,}907}{e} = -\frac{0{,}0023}{e}.$$

Die Rechnung giebt in diesem Falle für den Wert des Factors von $\frac{1}{e}$ in 83) ausser dem Restgliede:

$$1 - 1 + 2 - 6 + 6(1 - 0{,}23389) = 0{,}59666$$

Es ist also:

84) $$U = \frac{0{,}5967 - \vartheta \,.\, 0{,}0023}{e}, \quad 0 < \vartheta < 1$$

Man kann bei etwa demselben Fehler sich die Berechnung einiger Glieder ersparen, wenn man nämlich bei der vorangehenden Gruppenmitte abbricht. Die Gl. 81) oder 83) gilt mit Ausschluss des Restgliedes für jedes n, es kommt jetzt also darauf an, dies Rest-Glied zu bestimmen. Seien zu dem Zweck n, p, q die Anfangsindices dreier auf einander folgender Gruppen, ferner in der vorangehenden Gruppe der Index r so (mit Hülfe der Taf. II.) gewählt, dass $\beta_r - \beta_{r-1}$ den möglich kleinsten Absolutwert hat, ebenso s für die Gruppe $(n, p-1)$, t für die Gruppe $(p, q-1)$, u für die folgende Gruppe, also:

Gruppenmitten bezeichnet durch	r	s	t	u
Gruppenanfänge „ „		n	p	q

und:

86) $$\begin{cases} \beta_r - \beta_{r-1} = \delta_1 \\ \beta_s - \beta_{s-1} = \delta_2 \\ \beta_t - \beta_{t-1} = \delta_3 \end{cases}$$

wobei also $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ sehr kleine positive oder negative Grössen sind. Nun folgt bei zweimaliger Benutzung von 13):

$$\begin{aligned} b_r + b_{r+1} + \dots + b_{n-1} &= (\beta_r - \beta_{r-1}) - (\beta_n - \beta_{n-1}) \\ &= -(\beta_n - \beta_{n-1}) + \delta_1 \end{aligned}$$

ebenso:

$$\begin{aligned} b_n + b_{n+1} + \dots + b_{s-1} &= (\beta_n - \beta_{n-1}) - \delta_2 \\ b_s + b_{s+1} + \dots + b_{p-1} &= -(\beta_p - \beta_{p-1}) + \delta_2 \\ b_p + b_{p+1} + \dots + b_{t-1} &= (\beta_p - \beta_{p-1}) - \delta_3 \end{aligned}$$

Jetzt nehme ich der Bequemlichkeit wegen, und um die Vorstellung zu fixiren, vorläufig an, dass mit b_n eine negative Gruppe beginne, dass also $b_r \dots b_{n-1}$ positive Grössen seien. Bezeichne ich wieder negative b's durch $-c$, so werden die obigen Gleichungen:

$$86)\quad \begin{cases} b_r + \dots b_{n-1} = (\beta_{n-1} - \beta_n) + \delta_1 \dots a) \\ c_n + \dots c_{s-1} = (\beta_{n-1} - \beta_n) + \delta_2 \dots b) \\ c_s + \dots c_{p-1} = (\beta_p - \beta_{p-1}) - \delta_2 \dots c) \\ b_p + \dots b_{t-1} = (\beta_p - \beta_{p-1}) - \delta_3 \dots d) \end{cases}$$

worin $(\beta_{n-1} - \beta_n)$ und $(\beta_p - \beta_{p-1})$ positive Grössen sind. Ich will jetzt den Fehler bestimmen, der beim Abbruch der Rechnung mit b_{r-1} begangen wird. Derselbe ist (vgl. 73) und 76)):

$$87)\quad \begin{cases} (-1)^k k! \dfrac{T}{e} \\ T = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{k-1} (b_r x^r + b_{r+1} x^{r+1} + \dots) \, dx \end{cases}$$

Es ist aber:

$$b_r x^r + \dots + b_{n-1} x^{n-1} < x^r (b_r + \dots + b_{n-1})$$
$$c_n x^n + \dots + c_{s-1} x^{s-1} > x^{s-1} (c_n + \dots + c_{s-1})$$

also:

$$b_r x^r + \dots + b_{n-1} x^{n-1} - (c_n x^n + \dots + c_{s-1} x^{s-1})$$
$$< x^r (b_r + \dots b_{n-1}) - x^{s-1} (c_n + \dots c_{s-1})$$

(Den Grenzfall $x = 1$ lasse ich ausser Betracht, weil das entsprechende Glied in der Summation wegen des Factors $(1-x)^{k-1}$ verschwindet). Indem ich nun die Gl. 86) benutzen will, lasse ich darin die für die Beurteilung des Fehlers unerheblichen Grössen δ fort, und erhalte, nachdem dies geschehen:

$$88)\quad b_r x^r + \dots + b_{n-1} x^{n-1} - (c_n x^n + \dots + c_{s-1} x^{s-1})$$
$$< (\beta_{n-1} - \beta_n)(x^r - x^{s-1})$$

Ferner ist:

$$c_s x^s + \dots + c_{p-1} x^{p-1} > x^p (c_s + \dots c_{p-1})$$
$$b_r x^r + \dots + b_{t-1} x^{t-1} < x^p (b_p + \dots b_{t-1})$$

folglich nach 86) c) d):

$$c_s x^s + \dots + c_{p-1} x^{p-1} > x^p (\beta_p - \beta_{p-1}) > b_r x^r + \dots + b_{t-1} x^{t-1}$$

daher ist die Differenz

Digitized by Google

$$c_s x^s + \dots + c_{p-1} x^{p-1} - (b^p x^p + \dots + b_{t-1} x^{t-1})$$

eine positive Grösse, ebenso auch

$$b_t x^t + \dots b_{q-1} x^{q-1} - (c_q x^q + \dots c_{u-1} x^{u-1})$$

und zwar kleiner als die frühere, wie man erkennen kann, wenn man den 86) ähnliche Gleichungen bildet und daran denkt, dass der Absolutwert von $\beta_n - \beta_{n-1}$ mit wachsendem n abnimmt und desgleichen auch x^n. Bezeichne ich jetzt die Reihe unter dem Integralzeichen in 87) mit R, so ist:

$$\begin{aligned} R = & \{b_r x^r + \dots + b_{n-1} x^{n-1} - (c_n x^n + \dots + c_{s-1} x^{s-1})\} \\ & - \{(c_s x^s + \dots + c_{p-1} x^{p-1}) - (b_p x^p + \dots + b_{t-1} x^{t-1})\} \\ & + \{(b_t x^t + \dots + b_{q-1} x^{q-1}) - (c_q x^q + \dots + c_{u-1} x^{u-1})\} \\ & \mp \text{etc.} \end{aligned}$$

also eine abnehmende Reihe von abwechselnd positiven und negativen Gliedern, also kleiner als das erste und daher nach 88) sicher:

$$89) \qquad R < (\beta_{n-1} - \beta_n)(x^r - x^{s-1})$$

daher (unter der Voraussetzung: $r > k$) nach 75):

$$T = \vartheta (\beta_{n-1} - \beta_n) \cdot \frac{1}{k} \left(\frac{1.2 \dots k}{(r+1) \dots (r+k)} - \frac{1.2 \dots k}{s \dots (s+k-1)} \right)$$

worin ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet. Ist nun b_n das Anfangsglied einer positiven Gruppe, so kommt man durch ganz entsprechende Betrachtungen ebenfalls zur obigen Gleichung, nur ist dann $\beta_{n-1} - \beta_n$ eine negative Grösse. Somit haben wir, ähnlich wie 83):

$$\begin{aligned} 90) \quad U = \frac{1}{e} \Big\{ & 1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 \pm \dots + (-1)^k . 1.2.3 \dots (k-1) \\ & + (-1)^k (k-1)! \Big(b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{k+1} + b_2 \cdot \frac{1.2}{(k+1)(k+2)} + \dots \\ & + b_{k-1} \cdot \frac{1.2 \dots (k-1)}{(k+1) \dots (2k-1)} + k! \Big\{ \frac{b_k}{(k+1) \dots (2k)} \\ & + \frac{b_{k+1}}{(k+2) \dots (2k+1)} + \dots + \frac{b_{r-1}}{r(r+1) \dots (r+k-1)} \Big\} \Big) + W \Big\} \end{aligned}$$

$$W = (-1)^k (k-1)! k! \left(\frac{1}{(r+1) \dots (r+k)} - \frac{1}{s(s+1) \dots (s+k-1)} \right) \times \vartheta . (\beta_{n-1} - \beta_n)$$

Wir hatten nnn die Reihe 1) bis b_{12} benutzt, es war also $n=13$; in der vorangehenden Gruppe ist $s=8$, also die Rechnung mit b_7 abzubrechen, in der folgenden Gruppe $s=19$, dann:

$$\beta_{12}-\beta_{13}=0{,}496$$

endlich, wie früher, $k=4$; daher:

$$W=1.2.3.1.2.3.4\left(\frac{1}{9.10.11.12}-\frac{1}{19.20.21.22}\right).\vartheta.0{,}496$$
$$=\vartheta.0{,}0019$$

nnd daher:

$$U=\frac{0{,}5938+\vartheta.0{,}0019}{e}\quad 0<\vartheta<1$$

Wir haben jetzt also bei etwa demselben Maximalfehler die Berechnung von 5 Gliedern erspart. Halten wir aber dies Resultat mit dem früheren 84)

$$U=\frac{0{,}5967-\vartheta_1.0{,}0023}{e}\quad 0<\vartheta_1<1$$

zusammen, so können wir die Grenzen enger machen; $e.U$ kann nur zwischen 0,5944 und 0,5957 liegen, so dass wir

91) $$U=\frac{0{,}5950\pm 0{,}0007}{e}$$

schreiben können.

Anmerkung. Ist das allgemeinere Integral

$$\int_1^y \frac{e^{-y}\,dy}{y}$$

zu bestimmen, so convergirt die Reihe noch schneller, es sind dann aber Integrale von der Form:

$$\int_0^x x^n(1-x)^{k-1}\,dx$$

zu ermitteln, die man nacheinander, wie man sie braucht, mittelst der Formeln:

Digitized by Google

92)
$$\begin{cases} \int\limits_0^x (1-x)^{k-1}\,dx = \frac{1}{k}\left(1-(1-x)^k\right) \\ (n+k)\int\limits_0^x x^n(1-x)^{k-1}\,dx = -x^n(1-x)^k \\ \qquad\qquad + n\int\limits_0^x x^{n-1}(1-x)^{k-1}\,dx \end{cases}$$

berechnen kann.

III. Bestimmung des Integrals:

93)
$$U = \int\limits_1^\infty e^{-y^4}\,dy$$

Im Voraus bemerke ich, dass nach derselben Methode sich auch das allgemeinere Integral

$$\int\limits_1^\infty e^{-y^n}\,dy$$

behandeln lässt, wobei n eine positive Zahl bedeutet.

Schreibe ich:

$$U = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,.\,4y^3\,dy}{4y^3}$$

so wird durch partielle Interation:

$$U = -\left[\frac{e^{-y^4}}{4y^3}\right]_1^\infty - \frac{3}{4}\int\limits_1^\infty \frac{e^{-y^4}}{y^4}$$

In letzterem Integral multiplicire ich Zähler und Nenner wieder mit $4y^3$ und integrire partiell. In dieser Art fortgehend gelange ich zu folgender Reihe von Gleichungen:

94)
$$\begin{cases} U = \frac{1}{4e} - \frac{3}{4}\int\limits_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^4} \\ \int\limits_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^4} = \frac{1}{4e} - \frac{7}{4}\int\limits_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^8} \end{cases}$$

94)
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^8} = \frac{1}{4e} - \frac{11}{4}\int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^{12}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^{4(k-1)}} = \frac{1}{4e} - \frac{4k-1}{4}\int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^{4k}} \end{array}\right.$$

Multiplicire ich diese Gleichungen der Reihe nach mit $1,\ -\frac{3}{4},\ \frac{3.7}{4.4},$ $\ldots\ (-1)^{k-1}.\frac{3.7\ldots(4k-5)}{4.4\ldots4}$ und addire, so erhalte ich:

95)
$$\left\{\begin{array}{l} U = \dfrac{1}{4e}\left(1 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}.\dfrac{7}{4} \mp \ldots + (-1)^{k-1}\dfrac{3}{4}.\dfrac{7}{4}\ldots\left(\dfrac{4k-5}{4}\right)\right) \\ \qquad\qquad + (-1)^k.\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{7}{4}\ldots\dfrac{4k-1}{4}.U_k \\ \qquad\qquad U_k = \displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-y^4}\,dy}{y^{4k}} \end{array}\right.$$

Zur Berechnung von U_k setze ich:

$$y = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$$

so wird es:

96)
$$\left\{\begin{array}{l} U_k = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{1-x}}(1-x)^{\frac{4k-1}{4}-1}\,dx \\ \quad = \dfrac{1}{4e}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{p-1}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)\,dx \\ \qquad\qquad p = \dfrac{4k-1}{4} \end{array}\right.$$

Mittelst der Formeln:

97)
$$\int_0^1 (1-x)^{p-1}\,dx = \frac{1}{p};$$

$$\int_0^1 x^n(1-x)^{p-1}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{p(p+1)\ldots(p+n)}$$

die für jedes beliebige positive p gelten, wird nunmehr:

$$98)\quad U = \frac{1}{4e}\Big\{1 - \frac{3}{4} + \frac{3.7}{4.4} \mp \dots + (-1)^{k-1}.\frac{3}{4}.\frac{7}{4}\dots\frac{4k-5}{4}$$
$$+ (-1)^k.\frac{3}{4}.\frac{7}{4}\dots\frac{4k-5}{4}\Big(b_0 + \frac{4}{4k+3}b_1 + \frac{4.8}{(4k+3)(4k+7)}b_2$$
$$+ \dots + \frac{4.8.12\dots4(n-1)}{(4k+3)\dots(4k+4n-5)}b_{n-1}\Big) + W\Big\}$$

$$99)\quad W = (-1)^k.\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\dots\frac{(4k-5)}{4}\cdot\frac{(4k-1)}{4}\int_0^1(1-x)^{p-1}$$
$$.(b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots)\,dx$$

Ich nehme nun an, dass die Berechnung mit dem letzten Gliede einer Gruppe abgebrochen werde, dass also b_n das Anfangsglied einer neuen Gruppe sei; dann ist nach 79) für eine positive Gruppe

$$b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots < G_n x^n$$

also, wenn ich mit der positiven Grösse $(1-x)^{p-1}$ multiplicire und integrire:

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1}(b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots) < G_n\int_0^1 x^n(1-x)^{p-1}dx \quad \text{oder}$$
$$= \vartheta G_n \int_0^1 x^n(1-x)^{p-1}dx$$

Ist b_n Anfangsglied einer negativen Gruppe, so ist ebenso:

$$c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + \dots < \overline{G}_n x^n$$
$$\int_0^1 (1-x)^{p-1}(c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + \dots)\,dx < \overline{G}_n\int_0^1 x^n(1-x)^{p-1}dx$$
$$= \vartheta\,.\,\overline{G}_n\int_0^1 x^n(1-x)^{p-1}dx$$

also beiderseits mit -1 multiplicirt:

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1}(b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots)\,dx = \vartheta G_n\int_0^1 x^n(1-x)^{p-1}dx$$
$$= \frac{\vartheta\,.\,G_n}{p}\cdot\frac{1.2\dots n}{(p+1)\dots(p+n)}$$

daher in beiden Fällen nach 99) und wenn ich für p den Wert $\frac{4k-1}{4}$ einsetze:

100) $$W=(-1)^k.\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdots\frac{4k-5}{4}\cdot\frac{4.8\ldots4n}{(4k+3)\ldots(4k+4n-1)}\cdot\vartheta G_n$$

oder:

$$W=(-1)^k.4^{n-k+1}.\frac{3.7\ldots(4k-5).1.2.3\ldots n}{(4k+3)(4k+7)\ldots(4k+4n-1)}.\vartheta G_n$$
$$0<\vartheta<1$$

Die erste Form von $W_\circ$ schliesst sich direct der Berechnung der einzelnen Glieder an, die zweite benutzen wir, um den zweckmässigsten Wert von k zu finden. Der von k abhängige Teil in W ist (ohne Rücksicht auf das Zeichen):

$$V_k=\frac{3.7\ldots(4k-5)}{4^k(4k+3)\ldots(4k+4n-1)}$$

ebenso:

$$V_{k+1}=\frac{3.7\ldots(4k-5)(4k-1)}{4^{k+1}(4k+7)\ldots(4k+4n+3)}$$

folglich:

$$\frac{V_{k+1}}{V_k}=\frac{(4k-1)(4k+3)}{4(4k+4n+3)}$$

Dies müsste (vgl. II.) = 1 sein, und wäre es, wenn

$$(4k-1)^2=16(n+1)$$

oder

101) $$k=\frac{1}{4}+\sqrt{n+1}$$

sein könnte. Genau kann diese Forderung niemals erfüllt werden, und es ist daher für k die nächst grössere ganze Zahl zu nehmen.

Für die Berechnung ist also k nach 101) zu wählen, nachdem n von vornherein angenommen ist, dann folgt U aus 98) und der Maximalfehler aus 100).

Beispiel. $n=13$, $k \gtreqless \frac{1}{4}+\sqrt{14}=3,99$ also $k=4$.

$$\text{Fehler}=\frac{W}{4e}=\frac{3.7.11}{4.4.4}\cdot\frac{4.8\ldots52}{19.23\ldots67}\cdot\frac{\vartheta.(-0,907)}{4e}$$
$$=-\vartheta.0,00018$$

$$U=\frac{0,6702+W}{4e}=0,06163-\vartheta.0,00018\quad 0<\vartheta<1$$

oder:

102) $$U = 0{,}06154 \pm 0{,}0009$$

Auch hier kann, wie beim früheren Integral mit Vorteil in der Gruppenmitte abgebrochen und der Fehler mit Hülfe der Formel 89) bestimmt werden, doch will ich darauf nicht weiter eingehen.

IV. Das Integral:

103) $$U = \int_0^1 e^{-\frac{1}{z^p}} dz$$

Ist zuerst im besonderen p der reciproke Wert einer ganzen Zahl r, so setze man:

$$z = y^{-r}$$

Dann wird:

$$U = r \int_1^\infty \frac{e^{-y}\, dy}{y^{r+1}}$$

und dies Integral wird durch die Gl. 73) auf das in II. behandelte $\int_1^\infty \frac{e^{-y}\, dy}{y}$ zurückgeführt.

Ist p oder $r = 1$, so geschicht diese Reduction durch die erste der Gll. 72).

Ist $p > 1$, so kann U durch die Substitution

$$z = y^{-\frac{1}{p-1}}$$

auf das Integral

$$\int_1^\infty e^{-y^{\frac{p}{p-1}}} dy$$

zurückgeführt werden, welches nach der Methode von III. zu behandeln ist (s. III. am Anfang), z. B. wenn: $p = \frac{4}{3}$ ist, so wird:

$$z = y^{-3}; \quad dz = -3y^{-4} dy$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{z^{4/3}}} dz = 3 \int_1^\infty e^{-y^4} \frac{dy}{y^4}$$

Digitized by Google

und dies ist durch die erste der Gl. 94) auf $\int_1^\infty e^{-y^s} dy$ zurückgeführt.

Ist endlich $p<1$, so lässt es sich auf den Fall eines Exponenten grösser als 1 zurückführen. Zunächst gilt nämlich die Gleichung:

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{z^q}} dz = \int_0^1 \frac{q e^{-\frac{1}{z^q}}}{z^{q+1}} \cdot \frac{z^{q+1}\,dz}{q}$$

$$= \left[-e^{-\frac{1}{z^q}} \cdot \frac{z^{q+1}}{q}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-\frac{1}{z^q}} \cdot \frac{(q+1)}{q} z^q\,dz$$

$$= -\frac{1}{qe} + \frac{q+1}{q}\int_0^1 e^{-\frac{1}{z^q}} z^q\,dz$$

woraus:

$$104)\quad \int_0^1 e^{-\frac{1}{z^q}} \cdot z^q\,dz = \frac{1}{(q+1)e} + \frac{q}{q+1}\int_0^1 e^{-\frac{1}{z^q}}\,dz$$

Ist nun in dem Integral

$$U = \int_0^1 e^{-\frac{1}{z^p}}\,dz$$

p kleiner als 1, so setze ich:

$$z = u^{\frac{1}{1-p}}$$

dann wird:

$$U = \frac{1}{1-p}\int_0^1 e^{-u^{\frac{p}{1-p}}} \cdot u^{\frac{p}{1-p}}\,du$$

also, wenn ich

$$\frac{p}{1-p} = q$$

setze, vermöge 104) auf

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{u^q}} du$$

zurückgeführt. Jetzt ist q grösser als p; ist es noch kleiner als 1, so setze ich wiederum

$$u = v^{\frac{1}{1-q}}$$

und führe dadurch das Integral zurück auf:

$$\int_0^1 e^{\frac{1}{v^r}} dv$$

worin:

$$r = \frac{q}{1-q}$$

In dieser Art gelange ich nach und nach zu den Exponenten $p, q, r, s \ldots$ wobei

$$q = \frac{p}{1-p}, \quad r = \frac{q}{1-q}, \quad s = \frac{r}{r-1} \ldots$$

also

$$q > p, \quad r > q, \quad s > r \ \ldots$$

so dass schliesslich ein Exponent grösser als 1 erhalten wird. Z. B.

$$p = \frac{3}{11}, \quad q = \frac{3}{8}, \quad r = \frac{3}{5}, \quad s = \frac{3}{2}$$

Dann aber ist dieser Fall auf den vorigen ($p > 1$) zurückgeführt.

Königsberg, im August 1886.

Einige Differenzen.

$\beta_4 - \beta_3 = +0{,}6667$	
$\beta_{13} - \beta_{12} = -0{,}4962$	$\beta_8 - \beta_7 = +0{,}0405$
$\beta_{26} - \beta_{25} = +0{,}4107$	$\beta_{19} - \beta_{18} = -0{,}0316$
$\beta_{45} - \beta_{44} = -0{,}3603$	$\beta_{35} - \beta_{34} = +0{,}0223$
$\beta_{68} - \beta_{67} = +0{,}3237$	$\beta_{56} - \beta_{55} = -0{,}0145$

Digitized by Google

Tafel I.

n	b_n	n	b_n
0	+1	35	+0,064580
1	−1	36	0,061724
2	−0,5	37	0,057246
3	−0,166667	38	0,051498
4	+0,041667	39	0,044723
5	0,158333	40	0,037170
6	0,209722	41	0,029078
7	0,216468	42	0,020679
8	0,194469	43	0,012190
9	0,155792	44	0,003810
10	0,109198	45	−0,004283
11	0,061182	46	−0,011930
12	0,016069	47	−0,018998
13	−0,023338	48	−0,025376
14	−0,055449	49	−0,030976
15	−0,079583	50	−0,035732
16	−0,095725	51	−0,039601
17	−0,104338	52	−0,042560
18	−0,106197	53	−0,044604
19	−0,102271	54	−0,045745
20	−0,093624	55	−0,046016
21	−0,081342	56	−0,045453
22	−0,066480	57	−0,044114
23	−0,050019	58	−0,042059
24	−0,032846	59	−0,039362
25	−0,015733	60	−0,036098
26	+0,000669	61	−0,032350
27	0,015831	62	−0,028200
28	0,029344	63	−0,023735
29	0,040914	64	−0,019038
30	0,050349	65	−0,014193
31	0,057551	66	−0,009281
32	0,062504	67	−0,004376
33	0,065263	68	+0,000449
34	0,065940		

Tafel II.

n	$\beta_n = nb_n$	n	$\beta_n = nb_n$
0	0	35	+2,264308
1	−1	36	2,222075
2	−1	37	2,118118
3	−0,5	38	1,956915
4	+0,166667	39	1,744214
5	0,791667	40	1,486790
6	1,258334	41	1,192196
7	1,515279	42	0,868524
8	1,555756	43	0,524173
9	1,401764	44	0,167632
10	1,091980	45	−0,192719
11	0,672998	46	−0,548787
12	0,192834	47	−0,892925
13	−0,303399	48	−1,218065
14	−0,776294	49	−1,517829
15	−1,193740	50	−1,786617
16	−1,531603	51	−2,019673
17	−1,773741	52	−2,213128
18	−1,911541	53	−2,364023
19	−1,943144	54	−2,470314
20	−1,872476	55	−2,530860
21	−1,708184	56	−2,545390
22	−1,462550	57	−2,514467
23	−1,150436	58	−2,439430
24	−0,788303	59	−2,322334
25	−0,393324	60	−2,165876
26	+0,017388	61	−1,973320
27	0,427431	62	−1,748414
28	0,821643	63	−1,495308
29	1,186511	64	−1,218467
30	1,510465	65	−0,922588
31	1,784070	66	−0,612516
32	2,000124	67	−0,293163
33	2,153674	68	+0,030566
34	2,241961		

Gruppensummen.

$$b_0 = 1$$

$$(1;3) = b_1 + b_2 + b_3 = -1{,}66667$$

$$(4;12) = b_4 + \dots + b_{12} = +1{,}162900$$

$$(13;25) = b_{13} + \dots + b_{25} = -0{,}906945$$

$$(26;44) = b_{26} + \dots + b_{44} = +0{,}771063$$

$$(45;67) = b_{45} + \dots + b_{67} = -0{,}684080$$

XVII.

Bemerkung zu der Formel für das Differential einer Function mehrerer Variabeln.

Von

R. Hoppe.

Hat man die Richtigkeit der Formel

$$\partial f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y \tag{1}$$

unter der Einschränkung bewiesen, dass die 2 Terme zur Rechten gleiches Vorzeichen haben, so folgt daraus leicht ihre allgemeine Geltung.

Diesen Weg habe ich in meinem „Lehrb. d. Differentialr." zur Begründung jener Formel gewählt, d. h. ich habe unter der Voraussetzung, dass $f(x, y)$ nebst seinen partiellen Differentialquotienten 1. und 2. Ordnung in Bezug auf x und y einzeln stetig ist, erst unter der genannten Beschränkung bewiesen, dass bei gleichzeitigem Verschwinden von u und v

$$\lim \frac{f(x+u, y+v)-f(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}v} = 1 \tag{2}$$

ist, dann das beabsichtigte Resultat daraus abgeleitet.

Hierdurch ist die Frage umgangen, ob Gl. (2) ohne Einschränkung gilt, ob also die rechte Seite von Gl. (1) ein Aequivalent der linken für beliebige unendlich kleine ∂x, ∂y darstellt. Im Folgenden wird diese Frage verneinend entschieden und im Gegenteil der Satz bewiesen:

„Ist $f(x, y)$ nebst seinen partiellen Differentialquotienten 1. und 2. Ordnung stetig in Bezug auf x und y einzeln, und man setzt

$$M = f(x+u, y+v) - f(x,y); \quad N = \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v; \quad K = \frac{M}{N}$$

so kann, bei beliebigem u durch Bestimmung von v, $\lim K$ (für gleichzeitiges Verschwinden von u und v) jeder vorgegebenen Grösse gleich, auch K nach Belieben unendlich gross oder unendlich klein gemacht werden."

Beweis. Nach dem taylor'schen Satze, angewandt nach einander auf u und v, lässt sich M in der Form $M = hu+kv+au^2+buv$

$+cv^2$ darstellen, wo $hu+kv=N$ und a, b, c Mittelwerte der Functionen $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sind, entsprechend Mittelwerten von x, und y auf dem Wege des Wachsens um u und v, so dass a, b, c bei Verschwinden von u und v in endliche (oder Null-)Werte a_0, b_0, c_0 stetig übergehen.

Durch Bestimmung von v kann man $N=u^2 w$ machen, wo w nach freier Verfügung unabhängig von u oder Function davon ist. Eliminirt man v und dividirt die Ausdrücke von M und N, so erhält man:

$$K = 1+\frac{1}{w}\left\{a+b\,\frac{uw-h}{k}+c\left(\frac{uw-h}{k}\right)^2\right\}$$

Ist nun w endlich, w_0 sein Grenzwert bei verschwindendem u, und $w=w_0+r$, so wird

$$\lim K = 1+\frac{1}{w_0}\left(a_0-\frac{b_0 h}{k}+\frac{c_0 h^2}{k^2}\right)$$

woraus:

$$w_0 = \frac{a_0 k^2 - b_0 hk + c_0 h^2}{k^2(\lim K - 1)}; \qquad v = \left\{\frac{a_0 k^2 - b_0 hk + c_0 h^2}{k^2(\lim K - 1)} + r\right\} u^2$$

wo r eine beliebige mit u verschwindende Grösse, der andere Teil der Klammer nur von x und y abhängig ist. Dieser Wert entspricht jedem endlichen und unendlich kleinen K mit der Ausnahme $\lim K=1$. Um K unendlich gross zu erhalten, braucht man nur $w_0=0$, also $v=ru^2$ zu setzen. Den Fall $\lim K=1$ erhält man nach Gl. (3), wenn man w unendlich gross, dagegen uw nicht unendlich gross nimmt.

Um mit der Berechnung, welche zum Beweise des aufgestellten Satzes gedient hat, die geometrische Darstellung zu verbinden, sei P ein Punkt der Fläche $z=f(x,y)$, ferner E die Berührungsebene der Fläche in diesem Punkte, und F die Ebene, welche parallel der xy Ebene durch P geht. E und F schneiden sich in der Geraden T. Da T Tangente der Fläche ist, so kann man auf letzterer eine Curve S ziehen, welche T in P berührt. Auf S liege der Nachbarpunkt Q von P, dessen Coordinaten $x+u$, $y+v$, $f(x+u, y+v)$ seien, wodurch u, v in gegenseitiger Abhängigkeit definirt sind. Man fälle das Lot QR auf F, welches E in L trifft. Dann ist die Strecke

$$RQ = f(x+u, y+v) - f(x, y) = M$$

$$RL = \frac{\partial z}{\partial u}u + \frac{\partial z}{\partial v}v \qquad = N$$

Beide Strecken sind zufolge der 2 genannten Berührungen unendlich klein mindestens 2 Ordnung. Den Wert ihres Quotienten ergibt die obige Rechnung.

XVIII.

Die intermediäre Bahn des Planeten (17) Thetis nach Herrn Gyldén's Theorie.

Von

Victor Wellmann.

Die vorliegenden Blätter behandeln die intermediäre Bahn des Planeten (17) Thetis unter dem Einflusse der Anziehung der Sonne und des Jupiter und bezwecken eine erste Annäherung der von Thetis beschriebenen Bahn darzustellen, während eine eingehendere Behandlung des Problems — die Bestimmung der absoluten Bahn — einer späteren Untersuchung vorbehalten bleibt. — Zu dieser Arbeit veranlasst wurde ich durch Herrn Gyldén, welcher die Freundlichkeit hatte, mich in seine Theorie des Drei-Körper-Problems einzuführen, sowie mich bei Herstellung der folgenden Blätter durch seinen Rat zu unterstützen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen mich veranlasst fühle.

Die Vorzüge der Gyldén'schen Theorie [1]) vor der Methode der Variation liegen auf der Hand. Zwar reicht die letztere hin, innerhalb eines beschränkten Zeitraumes die Oerter der Planeten mit hin-

---

1) Ueber dieselbe s.

H. Gyldén, Undersökningar af Theorien för himlakropparnas rörelser. Bitrag till K. Svenska Vet.-Akad. Handlinger. Bd. V—VII.

" Die intermediäre Bahn des Mondes. Acta mathematica, 7: 2.

" Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden. Acta mathematica. 9: 3.

reichender Genauigkeit darzustellen, aber die Ausdrücke, welche zur Angabe der Coordinaten dienen, enthalten die Zeit explicit und versagen somit ihren Dienst, wenn t eine gewisse Grenze überschreitet, auch ist klar, dass Entwickelungen dieser Art, welche für grössere Werte von t divergiren, der Natur der Sache — unter Voraussetzung der Stabilität des Planetensystems — nicht entsprechen können. Diese Uebelstände werden nun durch Herrn Gyldén's Theorie vollständig vermieden. Die Reihen, welche in der absoluten Bahn die Coordinaten des gestörten Planeten angeben, enthalten die Zeit nur innerhalb des Winkelarguments und können somit für keinen Wert von t aufhören convergirt zu sein.

Es mögen hier noch einige Worte über den Unterschied zwischen absoluter und intermediärer Bahn statthaben.

Die bei der intermediären Bahn auftretenden Differentialgleichungen enthalten Glieder von der Form

$$\frac{d^2\xi}{dv^2} = \Sigma \alpha_n \cos(\sigma_n v + B)$$

wo α und σ kleine Grössen von der Ordnung der störenden Masse sind.

Das Integral erhält die Form

$$\xi = -\Sigma \frac{\alpha_n}{\sigma_n^2} \cos(\sigma_n v + B)$$

und hier sind die einzelnen Glieder durch eine Grösse von der Ordnung der störenden Masse dividirt, und erscheinen also als sehr gross — als hyperelementär. Zwar heben sich die grossen Werte

---

P. Harzer, Quelques remarques sur un cas spécial du problème des trois corps. — Astronomiska iakttagelser och undersökningar austälda på Stockholms Observatorium.

" Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Mémoires de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXXIV. Nr. 12.

A. Shdanow, Recherches sur le mouvement de la lune autour de la terre d'après la théorie de M. Gyldén. Astronomiska iakttagelser etc. 1885.

Mn. Brendel, Ueber einige in neuerer Zeit angewandte Formen für die Differentialgleichungen im Problem der 3 Körper. Astr. Nachr. Bd. 116.

K. Bohlin, Om en grupp af differentialeqnationer hvilkas solution medför s. k. små divisorer. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. 1887. Nr. 5. Stockholm.

in der Summe der einzelnen Glieder fort, das Resultat ist aber, da es, selbst eine kleine Zahl, die Differenz grosser Zahlen ist, nicht genau zu bestimmen. Man muss sich deshalb bei der intermediären Bahn mit Reihen-Entwickelungen behelfen, welche nach Potenzen von σv fortschreiten. In der absoluten Bahn vermeidet Herr Gyldén derartige Glieder nun vollständig, und zwar dadurch, dass er die pag. 4) auftretende Grösse c als variabel annimmt. — In den folgenden Blättern werde ich mich, wie schon bemerkt, auf eine Behandlung der intermediären Bahn beschränken und habe es, in Anbetracht der verhältnissmässigen Neuheit der Gyldén'schen Theorie, nicht für unnützlich gehalten, auf die analytische Entwicklung der Bahngleichungen des näheren einzugehen.

I.

Die Bedingung, welche eine intermediäre Bahn erfüllen soll, ist dass sie sich der wahren Bahn des Planeten nächst möglich anschmiegt, so dass die Abweichungen, welche als Störungen der intermediären Bahn zu betrachten sind, stets sehr kleine Grössen bleiben — eine Bedingung, welcher die Ellipse in vielen Fällen bekanntlich nicht genügt.

Es sollen also die Coordinaten der intermediären Bahn, x_0, y_0, den Coordinaten der wahren Bahn, x, y, nahezu gleich sein, d. h.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(1+\psi) \\ y_0 &= y(1+\psi) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo ψ eine Function ist, die stets sehr klein bleibt und als Störung der intermediären Coordinaten aufzufassen ist.

Demnach hat man auch für die radii vectores

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r(1+\psi) \qquad (2)$$

und, wenn v die wahre Länge des gestörten Körpers in seiner Bahn bezeichnet

$$x = r \cos v \qquad y = r \sin v$$
$$x_0 = r_0 \cos v \qquad y_0 = r_0 \sin v$$

Sei nun die Masse der Sonne $= 1$, die des störenden Körpers (Jupiter) $= M$, die des gestörten Körpers ((17) Thetis) $= m$, und sei

$$\mu_1 = k^2(1+m)$$
$$\mu' = k^2 M$$

wo l^2 die Gauss'sche Constante bezeichnet, so ist die Bewegung des gestörten Körpers innerhalb seiner Bahnebene gegeben durch die bekannten Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu_1 x}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu_1 y}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

wo $\Omega = \mu' \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} - \frac{xx'+yy'}{r'^3} \right\}$ ist, und die mit einem Strich versehenen Buchstaben für den störenden Körper gelten.

Führt man statt der Zeit eine neue Variable, die „reducirte Zeit", τ, ein, durch die Gleichung

$$dt = \frac{1+S}{(1+\psi)^2} d\tau \tag{3}$$

wo S eine Grösse von derselben Ordnung wie ψ ist, und ersetzt in den obigen Bewegungs-Gleichungen x, y, r, t durch x_0, y_0, r_0, τ, so findet man

(4)

$$\frac{d^2x_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{dx_0}{d\tau} \left\{ -\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1 \frac{(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} \right\} \frac{x_0}{1+\psi}$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{dy_0}{d\tau} + \left\{ -\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1 \frac{(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} \right\} \frac{y_0}{1+\psi}$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit y_0 und x_0 und subtrahirt die erste von der zweiten, so wird

$$x_0 \frac{d^2y_0}{d\tau^2} - y_0 \frac{d^2x_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\left(x_0 \frac{dy_0}{d\tau} - y_0 \frac{dx_0}{d\tau} \right)$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\left(x_0 \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

Wenn man sich nun der Relation

$$x_0 \frac{dy_0}{d\tau} - y_0 \frac{dx_0}{d\tau} = r_0{}^2 \frac{dv}{d\tau}$$

erinnert, so erhält man als Integral der obigen Gleichung

$$r_0{}^2 \frac{dv}{dt} = (1+S) \left\{ \sqrt{c} + \int \frac{1+S}{(1+\psi)^2} \frac{\partial \Omega}{\partial v} d\tau \right\} \tag{5}$$

Nun setzt man

$$v = v_0 + \chi \tag{6}$$

und bestimmt v_0, — dem Keppler'schen Gesetz entsprechend — durch die Gleichung

$$\frac{dv_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{c}}{r_0{}^2} \tag{6$_1$}$$

dann wird nach Gl. (6)

$$r_0{}^2 \frac{dv}{d\tau} = r_0{}^2 \frac{dv_0}{d\tau} + r_0{}^2 \frac{d\chi}{d\tau} = \sqrt{c} + r_0{}^2 \frac{d\chi}{d\tau}$$

also nach Gl. (5)

$$\sqrt{c} + r_0{}^2 \frac{d\chi}{d\tau} = (1+S) \left\{ \sqrt{c} + \int \frac{1+S}{(1+\psi)^2} \frac{\partial \Omega}{\partial v} d\tau \right\}$$

oder

$$1 + \frac{d\chi}{dv_0} = (1+S) \left\{ 1 + \int (1+S) \frac{r^2}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial v} dv_0 \right\}$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt

$$\frac{d^2\chi}{dv_0{}^2} = (1+S)^2 \frac{r^2}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{dS}{dv_0} \left\{ 1 + \int (1+S) \frac{r^2}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial v} dv_0 \right\}$$

Die Glieder der rechten Seite theilt man nun in zwei Gruppen, deren eine man dazu benutzt, die intermediäre Bahn zu bestimmen, während die zweite Gruppe zur Bestimmung der Störungen der intermediären Bahn dient; man setzt also

$$(1+S) \frac{r^2}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial v} = (1+S) Q_0 + Q_1 \tag{A}$$

— wobei zu bemerken ist, dass Q_0 und Q_1, als Glieder der Störungsfunction, von der Ordnung der Masse des störenden Körpers sind, also in höheren Potenzen vernachlässigt werden können — und erhält so

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = \frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + (2S+S^2)\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{dS}{dv_0}\left\{1 + \int(1+S)\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial v}dv_0\right\}$$

$$= Q_0 + \frac{Q_1}{1+S} + (2S+S^2)\left(Q_0 + \frac{Q_1}{1+S}\right) + \frac{dS}{dv_0}\frac{1}{1+S}\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right]$$

Znr Bestimmung der intermediären Länge verwendet man nun nur das erste Glied, Q_0, und hat also:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = Q_0 \tag{7}$$

wonach man zur Bestimmung der Störnngen zurückbehält

$$\frac{dS}{dv_0}\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right] + (2S+S^2)(Q_0+Q_1) + Q_1 = 0 \tag{8}$$

Oder, mit Vernachlässignng der Prodncte $S^2 Q_0$ nnd SQ_1

$$\frac{dS}{dv_0}\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right] + 2SQ_2 = -Q_1$$

Ersetzt man Q_0 durch $\frac{d^2\chi}{dv_0^2}$, so wird

$$\frac{dS}{dv_0}\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right]^2 + 2S\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right]\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\left[1+\frac{d\chi}{dv_0}\right]Q_1$$

und das Integral dieser Gleichnng ist

$$S = -\frac{\int Q_1\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)dv_0}{\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2} \tag{9}$$

Zur Bestimmung des intermediären radins vector multiplicirt man die Gln. (4) resp. mit x_0 nnd y_0 und addirt sie, so wird

$$x_0\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + y_0\frac{d^2y_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\left\{x_0\frac{dx_0}{d\tau} + y_0\frac{dy_0}{d\tau}\right\}$$

$$+\frac{r_0^2}{1+\psi}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1\frac{(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}$$

$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

Nun ist aber

Digitized by Google

$$x_0 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + y_0 \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} = r_0 \frac{d^2 r_0}{d\tau^2} + \left(\frac{dr_0}{d\tau}\right)^2 + \left[\left(\frac{dx_0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{d\tau}\right)^2\right]$$
$$= r_0 \frac{d^2 r_0}{d\tau^2} - r_0^2 \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2$$

Mithin wird aus der vorhergehenden Gleichung

$$r_0 \frac{d^2 r_0}{d\tau^2} - r_0^2 \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau} \cdot r_0 \frac{dr_0}{d\tau} + \frac{r_0^2}{1+\psi} \times$$
$$\times \left\{ -\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1 \frac{(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau} \right\}$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\, r \,\frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

Ersetzt man hierin v durch $v_0+\chi$ und τ durch v_0 gemäss den Formeln

$$\frac{dr_0}{d\tau} = -r_0^2 \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{d\tau} = -\sqrt{c}\, \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0}$$

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} = -\frac{c}{r_0^2}\, \frac{d^2\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0^2}$$

so erhält man

$$-\frac{d^2\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0^2} - \frac{1}{r_0}\left\{1 + \frac{2d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv}\right)^2\right\}$$
$$+ \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0} + \frac{r_0^3}{c(1+\psi)}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu_1 \frac{(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}$$
$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\frac{r_0}{c}\, r\, \frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

oder, da

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\sqrt{c}}{r_0^2}\,\frac{d\psi}{dv_0},$$

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = \frac{c}{r_0^4}\frac{d^2\psi}{dv_0^2} + \frac{2c}{r_0^3}\,\frac{d\psi}{dv_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0} \quad \text{ist,}$$

$$-\frac{d^2\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0^2} - \frac{1}{r_0}\left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0} + \frac{\mu_1}{c}(1+S)^2$$

(19)

$$+\frac{1}{1+\psi}\left\{-\frac{1}{r_0}\frac{d^2\psi}{dv_0^2}-\frac{\mu_1}{c}(1+S)^2\psi-2\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}+\frac{1}{r_0(1+S)}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}\right\}$$
$$=\frac{(1+S)^2}{1+\psi}\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r} \qquad (10)$$

Diese Gleichnng mnltiplicirt man mit einem Factor, a, — welchen man mit der mittleren Entfernung des gestörten Körpers identificiren kann —, und teilt sie dann, ganz analog dem früheren Verfahren, wieder in zwei Grnppen, durch die Definitions-Gleichung

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r}=P_0+P_1 \qquad \text{(B)}$$

wonach man wieder nur das erste Glied, P_0, zur Bestimmnng des intermediären radius vector verwendet, das zweite Glied, P_1, zur Bestimmung seiner Störungen. Lässt man ferner aus der Gleichung für den radius vector diejenigen Glieder fort, welche von der zweiten Ordnnng in Bezug auf Q, S und ψ sind, so erhält man

$$\frac{d^2\left(\frac{a}{r_0}\right)}{dv_0^2}+\frac{a}{r_0}\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}-\frac{\mu_1 a}{c}=-P_0 \qquad (11)$$

Nun ersetzt man den radins vector, r_0, durch eine neue Variable, ϱ_0, indem man setzt

$$r_0=\frac{a\mu}{1+\varrho_0} \qquad (12)$$
$$\mu=\frac{c}{\mu_1 a}$$

so wird

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2}+\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\varrho_0=-\frac{2d\chi}{dv_0}-\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2-\mu P_0 \qquad (13)$$

Es sei noch bemerkt, dass Gl. (12) mit der Gleichung der Ellipse identisch wird, wenn $\varrho_0=e\cos v$ wird.

Zur Bestimmung der Störungen des radius vector behält man dann aus Gl. (10) die Gleichung zurück

$$a\frac{d^2\psi}{dv_0^2}+\frac{a\mu_1}{c}(1+S)^2 r_0\psi-\frac{1+\psi}{1+S}r_0\frac{dS}{dv_0}\frac{d\left(\frac{a}{r_0}\right)}{dv_0}$$
$$-\frac{a\mu_1}{c}(+\psi)r_0(2S+S^2)+2r_0\frac{d\left(\frac{a}{r_0}\right)}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}$$
$$-\frac{a}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}=-(1+S)^2 r_0 P_1-(2S+S^2-\psi)r_0 P_0$$

Ersetzt man ψ durch

$$\xi = \frac{a}{r_0}\psi$$

so wird nach einigen Transformationen

$$\frac{d^2\xi}{dv_0^2} + \left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\xi - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0}$$

$$-\frac{a\mu_1}{c}(2S+S^2) - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\left(\frac{a}{r_0}\right)}{dv_0}$$

$$= -P_1 - (2S+S^2)(P_0+P_1) \tag{14}$$

Die Bedeutnng von ξ ersieht man ans folgender Betrachtnng. Es war

$$r = \frac{r_0}{1+\psi} = \frac{a\mu}{1+\varrho_0}\,\frac{1}{1+\psi}$$

$$\psi = \frac{r_0}{a}\xi = \frac{\mu}{1+\varrho_0}\xi$$

Mithin

$$r = \frac{a\mu}{1+\varrho_0}\,\frac{1}{1+\frac{\mu}{1+\varrho_0}\xi} = \frac{a\mu}{1+\varrho_0+\mu\xi}$$

oder, wenn man

$$\varrho_0 + \mu\xi = \varrho$$

setzt,

$$r = \frac{a\mu}{1+\varrho}$$

Es ist also $\mu\xi$ die Grösse, welche zu der, in der intermediären Bahn auftretenden Function ϱ_0 zngefügt werden muss, nm die analoge Fnnction ϱ_0 für die wahro Bahn zn erhalten.

Die Gleichnngen (7), (12) nnd (13) geben die Gleichnng der intermediären Bahn in Polar-Coordinaten, während die Gleichnngen (9) und (14) die als Störungen anfzufassende — Abweichnng der intermediären und wahren Bahn aufstellen.[2])

II.

Entwickelt man die Störungsfnnction nach Herrn Gyldéns Methode nach Vielfachen des Winkels H zwischen den radii vectores des störenden nnd gestörten Körpers, so findet man:

2) Gyldén, Undersökningar II, p. 18. u. f.
Harzer, Untersuchungen p. 25. u. f.

$$\Omega = 2\Sigma'\Sigma\Sigma\Omega_{(n,r,s')}\,\varrho^r\,\varrho'^{s'}\cos nH \tag{C}$$

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r} = P_0 + P_1 = \frac{2}{\mu}\,\Sigma'\Sigma\Sigma P_{(n,r,s')}\,\varrho^r\varrho'^{s'}\cos nH \tag{D}$$

$$\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial v} = Q_0 + \frac{Q_1}{1+S} = 2\Sigma'\Sigma\Sigma Q_{(n,r,s')}\,\varrho^r\varrho'^{s'}\,\frac{\partial\cos nH}{\partial v} \tag{E}$$

Hier hedeuten $\Omega_{(n,r,s')}$, $P_{(n,r,s')}$, $Q_{(n,r,s')}$ numerische Coustanten, welche aus dem Verhältuiss der mittleren Geschwindigkoiten des störenden nnd des gestörten Körpers abgeleitet werdon nnd späterhin augegeben werden.

ϱ_0 ist die durch Gl. (12) gegebene Fnnction, ϱ_0' dieselbe Function für den störenden Körper, von welcher wir hier jedoch nur das erste Glied mitznnehmen brauchen und setzen können

$$\varrho_0' = \varkappa'\cos[(1-\varsigma')v_0' - \Gamma'] \tag{15}$$

wo $\varkappa'$ die Exceutricität der Jnpiters-Bahn bedentet, $\varsigma' v_0'$ dio Bewegung ihrer Apsidenlinie nnd Γ' die Längo seines Perihels.

Für den Winkel H hat man unter Vernachlässignng der Quadrate der Neigung

$$H = v - v' = v_0 + \chi - v_0' - \chi'$$

wo χ' die den χ analoge Functiou für Jupiter ist. Bei der nachfolgenden Bestimmuug von ϱ_0 könuen in erster Aunäherung χ und χ' fortgelasseu werden, während bei der späteren Bestimmung von $\frac{d^2\chi}{dv^2}$ die Function χ wieder in obigeu Ausdruck eingeführt wird. Wir haben also zunächst

$$H = v_0 - v_0'.$$

In diesem Ausdrucke muss nun v_0' dnrch v_0 ersotzt werden.

Bezeichnot man die mittlere Bowogung des gestörten Körpers mit n, diejenige des störenden mit n' uud setzt

$$\frac{n'}{n} = \mu$$

nennt man ferner die mittleren Läugen beider Himmelskörper zu einer bestimmten Epocho A und A', so wird

$$v_0' - A' = \mu(v_0 - A) + G$$

wo G eine kleine Grösse ist, welcho von den Bahn-Exentricitäten abhängt. Diesolho wird folgendor Weise bestimmt.

Nach Gl. (6_1) ist

$$\frac{dv_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{c}}{r_0^2}$$

oder, da man unter Vernachlässigung der Störungsglieder ψ und S die wahre Zeit t statt der reducirten setzen kann:

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{\sqrt{c}}{r_0^2}$$

und da

$$c = \mu_1 a \mu \quad \text{und} \quad r_0^2 = \frac{a^2 \mu^2}{(1+\varrho_0)^2} \quad \text{ist:}$$

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{\frac{3}{2}}} \frac{(1+\varrho_0)^2}{\mu^{\frac{3}{2}}} \qquad\qquad \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho_0)^2} dv_0 = \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{\frac{3}{2}}} dt$$

Multiplicirt man beide Seiten mit l, so wird, da $\sqrt{\mu_1} = l\sqrt{1+m}$ ist,

$$\frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho_0)^2} l\, dv_0 = \frac{l^2 \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} dt = n\, dt$$

Ganz analog wird für den störenden Körper

$$\frac{\mu'^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho^{2\cdot})^2} l\, dv_0' = n' dt$$

und durch Division

$$\frac{dv_0'}{dv_0} = \mu \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{(1+\varrho_0')}{(1+\varrho_0)^2}\right)$$

Bestimmt man nun die willkürliche Constante μ so, dass $\frac{\mu'}{\mu} = 1$ wird, und entwickelt nach Potenzen von ϱ_0 und ϱ_0', so erhält man

$$dv_0' = \mu(1 + 2\varrho_0' - 2\varrho_0 \ldots) dv_0$$

und endlich durch Integration

$$v_0' - \mu v_0 = 2\mu \int \varrho_0' dv_0 - 2\mu \int \varrho_0 dv_0 \ldots$$

Diese, von der Excentricität abhängige Differenz ist also die oben mit G bezeichnete Function, und man hat demnach

$$v_0' = \mu v_0 + 2\mu \int \varrho_0' dv_0 - 2\mu \int \varrho_0 dv_0 + \Lambda' - \mu \Lambda$$

und

$$H = v_0(1-\mu) - 2\mu \int \varrho_0' dv_0' + 2\mu \int \varrho_0 dv_0 + (\Lambda' - \mu \Lambda)$$

Indem man den Taylor'schen Lehrsatz anwendet, findet man

$$\begin{aligned}\cos nH = & \cos\left[nv_0(1-\mu)-n(\varDelta'-\mu\varDelta)\right] \\ & + 2n\left(\mu\int\varrho_0' dv_0 - \mu\int\varrho_0 dv_0\right)\sin\left[nv_0(1-\mu)-n(\varDelta'-\varDelta)\right] \\ & + n^2\left(\mu\int\varrho_0' dv_0 - \mu\int\varrho_0 dv_0\right)^2\cos\left[nv_0(1-\mu)-n(\varDelta'-\varDelta)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (16)$$

und ferner

$$\begin{aligned}\frac{\partial\cos nH}{\partial v_0} = & -n\sin\left[nv_0(1-\mu)-n(\varDelta'-\mu\varDelta)\right] \\ & + 2n\left(\mu\int\varrho_0' dv' - \mu\int\varrho_0 dv_0\right)\cos\left[nv_0(1-\mu)-n(\varDelta'-\mu\varDelta)\right] \\ & - 2n^3\left(\mu\int\varrho_0' dv_0' - \mu\int\varrho_0 dv_0\right)^2\sin\left[nv_0(1-\mu)-n(\varDelta'-\mu\varDelta\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (17)$$

Durch die Glu. (C), (D), (E), (16) (17) sind die Componenten der Störungsfunction bestimmt.

Die Gln. (C), (D), (E) enthalten nun zwar unendlich viele Glieder, aber nur eine beschränkte Anzahl derselben — welche Herr Gyldén elementäre oder charakteristische Glieder nennt — werden durch die Integrale so gross, dass sie bei Aufstellung der intermediären Bahn berücksichtigt werden müssen, und nur diese Glieder werden zur Bildung von P_0, resp. Q_0, verwandt.

Beobachtet man also, aus der dreifachen Summe nur die Glieder mitzunehmen, welche durch die Integration gross werden, so folgen aus den Gln. (7) und (13), indem man zugleich das Quadrat von $\frac{d\chi}{dv_0}$ vernachlässigt, die Gleichungen:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = 2\Sigma'\Sigma\Sigma Q_{(n,\sigma,\tau')}\,\varrho_0^{\sigma}\,\varrho_0'^{\tau'}\frac{\partial\cos nH}{\partial v_0} \quad (18)$$

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2} + \left(1+\frac{2d\chi}{dv_0}\right)\varrho_0 = -2\frac{d\chi}{\partial v_0} - 2\Sigma'\Sigma\Sigma P_{(n,\sigma,\tau')}\,\varrho_0^{\sigma}\varrho_0'^{\tau'}\cos nH \quad (19)$$

III.

Es ist nun zunächst zu untersuchen, welche Glieder in Gl. (19) durch die Integration gross werden.

Die Gleichung ist von der Form

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2} + (1+\beta)\,\varrho_0 = \gamma\cos(\alpha v_0 - C) + \ldots$$

wo β eine kleine Grösse ist.

Das zweite Integral dieser Gleichung hat die Form

$$\varrho_0 = M\cos(\alpha v_0 - C) + \ldots$$

Um M zu bestimmen differentiirt man dies zweimal und erhält, wenn man noch $\alpha = 1 - \sigma$ setzt:

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2} = -M(1+\sigma)^2\cos((1+\sigma)v_0 - C) + \ldots$$

woraus, in Verbindung mit den obigen beiden Relationen, folgt

$$M = \frac{\gamma}{2\sigma - \sigma^2 + \beta}$$

Mithin wird M, und damit ϱ_0, gross werden, wenn σ klein ist, d. h. wenn die Argumente der rechter Hand stehenden Sinus, resp. Cosinus die Form haben

$$v_0(1+\sigma) + C$$

wo σ eine kleine Grösse bedeutet.

Die Glieder in der dreifachen Summe der Gl. (19) haben nun, wenn man zunächst nur die ersten Potenzen von ϱ_0 und ϱ_0' in Betracht zieht, die Form

$$a\;\varrho_0\cos[nv_0(1-\mu) + C_1]$$

resp.

$$a'\varrho_0'\cos[nv_0(1-\mu) + C_1]$$

Ferner hat ϱ_0' die Form

$$k'\cos[(1-\varsigma')v_0' + D] = k[(1-\varsigma')\mu v_0 + D]$$

und ebenso hat ϱ_0, wenigstens in seinem Hauptgliede, die Form

$$k.\cos[(1-\varsigma)v_0 + E]$$

Mithin erhalten die zu untersuchenden Glieder die Form

$$ak\cos[nv_0(1-\mu) + C_1]\cos[(1-\varsigma)v_0 + E] \qquad \text{(I)}$$

oder

$$a'k'\cos[nv_0(1-\mu) + C_2]\cos[(1-\varsigma')\mu v_0 + D] \qquad \text{(II)}$$

Erinnert man sich nun der Relation

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

so sieht man, dass die Glieder die Form annehmen

$$\tfrac{1}{2}ab\cos[v_0[(1-\varsigma)\pm n(1-\mu)] + C_1 \pm E] \qquad \text{(I)}$$

$$\tfrac{1}{2}a'k\cos[v_0[(1-\varsigma')\mu \pm n(1-\mu)] + C_2 \pm D] \qquad \text{(II)}$$

Nun sind ς und ς' — die Apsidenbewegungen — sehr kleine Grössen; ferner ist in unserem Falle — bei (17) Thetis) — μ nahezu gleich $\tfrac{1}{3}$, nämlich $\mu = 0.3277046$. Mithin sieht man, dass der Factor von v_0 von der Form $(1+\sigma)$ wird

im Falle (I) wenn $n = 0$ oder $n = 3$ ist
" " (II) " $n = 1$ " $n = 2$ "

Auf diese Weise ergeben sich aus der Summenformel der Gl. (19) folgende Glieder

$$-P_{010}\varrho_0 + P_{300}\sin[\lambda v_0 - 3B]12\mu\int\varrho_0 dv_0 - P_{000}$$
$$-2P_{101}\cos[v_0(1-\mu)-B]\varrho_0' - 2P_{201}\cos[v_0 2(1-\mu)-2B]\varrho_0'$$
$$-2P_{100}2\mu\sin[v_0(1-\mu)-B]\int\varrho_0' dv_0$$
$$-2P_{200}4\mu\int\varrho_0' dv_0\sin[2v_0(1-\mu)-2B] - 2P_{310}\cos[\lambda v_0 - 3B]\varrho_0$$

wo $B = A' - \mu A$ und $\lambda = 3(1-\mu)$ ist.

Auf gleiche Weise erhält man aus der Summenformel der Gl. (18) die grossen Glieder, und, indem man dieselben einmal integrirt, erhält man als die Glieder, welche für $2\frac{d\chi}{dv_0}$ in der rechten Seite der Gl. (19) eingesetzt werden müssen, die folgenden

$$+12Q_{300}\int\cos[\lambda v_0 - 3B]dv_0\int 6\mu\varrho_0 dv_0$$
$$-12Q_{310}\int\varrho_0\sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0 + 4Q_{101}\int\sin[v_0(1-\mu)-B]\varrho_0' dv_0$$
$$+8Q_{201}\int\sin[v_0 2(1-\mu)-2B]\varrho_0' dv_0 - 4Q_{100}\int\cos[v_0(1-\mu)-B]dv_0$$
$$\times\int 2\mu\varrho_0' dv_0 - 4\mu Q_{200}\int\cos[v_0 2(1-\mu)-2B]dv_0\int 8\mu\varrho_0' dv_0$$

und für das linkerseits stehende Glied

$$-12Q_{300}\int\sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0$$

Setzt man dies in Gl. (19) ein, nnd schafft die Glieder, welche ϱ_0 enthalten, auf die linke Seite, so erhält man

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2}+\left\{1+P_{010}+\left(2P_{310}+\frac{4}{1-\mu}Q_{300}\right)\cos[\lambda v_0-3B]\right\}\varrho_0$$
$$-P_{300}\sin[\lambda v_0-3B]12\mu\int\varrho_0 dv_0$$
$$-12Q_{300}\int\cos[\lambda v_0-3B]dv_0\int 6\mu\varrho_0 dv_0-12Q_{310}\int\sin[\lambda v_0-3B]\,\varrho_0 dv_0$$
$$=-P_{000}-2P_{101}\cos[v_0(1-\mu)-B]\varrho_0'=2P_{201}\cos[v_0 2(1-\mu)-2B]\varrho_0'$$
$$-2P_{100}\sin[v_0(1-\mu)-B]2\mu\int\varrho_0' dv_0$$
$$-2P_{200}\sin[v_0 2(1-\mu)-2B]4\mu\int\varrho_0' dv_0$$
$$+4Q_{101}\int\sin[v_0(1-\mu)-B]\varrho_0' dv_0+8Q_{201}\int\sin[v_0 2(1-\mu)-2B]\varrho_0' dv_0$$
$$-4Q_{100}\int\cos[v_0(1-\mu)-B]dv_0\int 2\mu\varrho_0' dv_0$$
$$-4Q_{200}\int\cos[v_0 2(1-\mu)-2B]dv_0\int 8\mu\varrho_0' dv_0 \qquad (19_1)$$

IV.

Die Glieder, welche ϱ_0 nnter dem Integralzeichen enthalten, müssen nnn derart transformirt werden, dass ϱ_0 nur ausserhalb des Integralzeichens vorkommt.

Bezeichnet man die rechte Seite der Gl. (19) mit W_1, so ist

$$\varrho_0=-\frac{1}{1+P_{010}}\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2}+\frac{W_1}{1+P_{010}}\cdots$$

plns einer Anzahl von Gliedern, welche mit der Masse mnltiplicirt sind; diese kann man jedoch in folgender Betrachtnng fortlassen, da die zu transformirenden Glieder ebenfalls mit der Masse multiplicirt sind, also der durch obige Fortlassung entstehende Fehler von der Ordnnng des Quadrats von der Masse ist. Mithin wird

$$\int\varrho_0 dv_0=-\frac{1}{1+P_{010}}\int\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2}dv_0+\frac{1}{1+P_{010}}\int W_1 dv_0$$
$$=-\frac{1}{1+P_{010}}\frac{d\varrho_0}{dv_0}+\frac{1}{1+P_{010}}\int W_1 dv_0$$

Ferner

$$\int \cos[\lambda v_0 - 3B]dv_0 \int \varrho_0 dv_0 = -\frac{1}{1+P_{010}} \int \cos[\lambda v_0 - 3B] \frac{d\varrho_0}{dv_0} dv_0$$
$$+ \frac{1}{1+P_{010}} \int \cos[\lambda v_0 - 3B]dv_0 \int W_1 dv_0$$
$$= -\frac{1}{1+P_{010}} \cos[\lambda v_0 - 3B]\varrho_0 + \frac{\lambda}{1+P_{010}} \int \varrho_0 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv$$
$$+ \frac{1}{1+P_{010}} \int \cos[\lambda v_0 - 3B]dv_0 \int W_1 dv_0$$

Endlich

$$\int \varrho_0 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0 = -\frac{1}{1+P_{010}} \int \sin[\lambda v_0 - 3B] \frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2} dv_0$$
$$+ \frac{1}{1+P_{010}} \int \sin[\lambda v_0 - 3B]\, W_1 dv_0$$
$$= -\frac{1}{1+P_{010}} \left(\frac{d\varrho_0}{dv_0} \sin[\lambda v_0 - 3B] - \lambda\varrho_0 \cos[\lambda v_0 - 3B]\right.$$
$$\left. - \lambda^2 \int \varrho_0 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0 + \int W_1 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0\right)$$

Mithin

$$(\lambda^2 - P_{010} - 1) \int \varrho_0 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0 = \frac{d\varrho_0}{dv_0} \sin[\lambda v_0 - 3B]$$
$$- \lambda\varrho_0 \cos[\lambda v_0 - 3B] - \int W_1 \sin[\lambda v_0 - 3B]dv_0$$

Setzt man diese Werte in Gl. (19_1) ein, so erhält man

$$\frac{d^2\varrho}{dv_0^2} + \frac{d\varrho_0}{dv_0} \left\{\frac{12\mu P_{300}}{1+P_{010}} + \frac{72\mu\lambda Q_{300}}{\eta_0(1+P_{010})} - \frac{12}{\eta_0} Q_{310}\right\} \sin[\lambda v_0 - 3B]$$
$$+ \varrho_0 \left\{1 + P_{010} + \left[2P_{310} + \frac{4}{1-\mu} Q_{300} + \frac{12\lambda}{\eta_0} Q_{310}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{72\mu}{1+P_{010}} Q_{300} \cdot \left(1 - \frac{\lambda^2}{\eta_0}\right)\right] \cos[\lambda v_0 - 3B]\right\} = W_1 \quad (20)$$

wo $\eta_0 = \lambda^2 - P_{010} - 1$ ist.

In diesem Ausdruck muss man nun den ersten Differentialquotienten verschwinden machen; zu diesem Zwecke führt man eine neue Variable, E, ein durch die Gleichung

$$\varrho_0 = E\,\varphi(v_0)$$

wo $\varphi(v_0)$ so zu bestimmen ist, dass der Coefficient von $\frac{dE}{dv_0}$ zu null wird. Es ist

$$\frac{d\varrho_0}{dv_0} = \frac{dE}{dv_0}\varphi(v_0) + E\frac{d\varphi(v_0)}{dv_0}$$

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2} = \frac{d^2E}{dv_0^2}\varphi(v_0) + 2\frac{dE}{dv_0}\frac{d\varphi(v_0)}{dv_0} + E\frac{d^2\varphi(v_0)}{dv_0^2}$$

Schreibt man nun Gl. (20) in der Form

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2} + A'\sin(\lambda v_0 - 3B)\frac{d\varrho_0}{dv_0} + A''\varrho = W_1$$

und setzt man hierin obige Werte ein, so erhält man

$$\frac{d^2E}{dv_0^2}\varphi(v_0) + 2\frac{dE}{dv_0}\frac{d\varphi(v_0)}{dv_0} + E\frac{d^2\varphi(v_0)}{dv_0^2} + A'\sin(\lambda v_0 - 3B)\frac{dE}{dv_0}\varphi(v_0)$$
$$+ A'\sin(\lambda v_0 - 3B)\frac{d\varphi(v_0)}{dv_0}E + A''E\varphi(v_0) = W_1$$

Unserer Forderung gemäss soll sein

$$2\frac{d\varphi(v_0)}{dv_0} + A'\sin(\lambda v_0 - 3B)\varphi(v_0) = 0$$

oder

$$\frac{d\varphi(v_0)}{\varphi(v_0)} = -\frac{A'}{2}\sin(\lambda v_0 - 3B)dv_0$$

d. h.

$$\varphi(v_0) = e^{\frac{A'}{2\lambda}\cos(\lambda v_0 - 3B)}$$

Man hat also zu setzen

$$\varrho_0 = Ee^{\frac{A'}{2\lambda}\cos(\lambda v_0 - 3B)}$$

Führt man dies in Gl. (20) ein, so erhält man

$$\frac{d^2E}{dv_0^2} + \left\{1 - \bar{\beta}_0 - \bar{\beta}\cos(\lambda v_0 - 3B)\right\}E = \frac{W_1}{e^{\frac{A'}{2\lambda}\cos(\lambda v_0 - 3B)}} + W_2 \quad (21)$$

wo die zur Abkürzung eingeführten Buchstaben folgende Bedeutung haben

$$\bar{\beta}_0 = -P_{010}$$

$$\bar{\beta} = -2P_{310} + \frac{4}{1-\mu}Q_{300} + \frac{6\mu\lambda}{1-\bar{\beta}_0}P_{300} - \frac{18\lambda}{\eta_0}Q_{310} - \frac{36\mu\lambda}{\eta_0}Q_{300}$$
$$+ \frac{72\mu}{1-\bar{\beta}_0}Q_{300} - \left(\frac{3\lambda^2}{2\eta_0} - 1\right)$$

$$W_1 = -P_{000} - 2P_{101}\cos[v_0(1-\mu)-B]\varrho_0' - 2P_{201}\cos[v_0 2(1-\mu)-2B]\varrho_0'$$
$$-4P_{100}\sin[v_0(1-\mu)-B]\mu\int\varrho_0' dv_0$$
$$-P_{200}8\mu\sin[v_0(1-\mu)-2B]\int\varrho_0' dv_0 + 4Q_{101}\int\sin[v_0(1-\mu)-B]\varrho_0' dv_0$$
$$+8Q_{201}\int\sin[v_0 2(1-\mu)-2B]\varrho_0' dv_0$$
$$-8\mu Q_{100}\int\cos[v_0(1-\mu)-B]dv_0\int\varrho_0' dv_0$$
$$-32\mu Q_{200}\int\cos[v_0 2(1-\mu)-2B]dv_0\int\varrho_0' dv_0$$

$$W_2 = E\,\frac{A'^2}{4}\sin^2[\lambda v_0 - 3B]$$

$$A' = \frac{12\mu P_{300}}{1+P_{010}} + \frac{72\mu\lambda}{\eta_0(1+P_{010})}Q_{300} - \frac{12}{\eta_0}Q_{310}$$

V.

Behufs Integration obiger Gleichung setze man

$$\lambda v_0 - 3B = 2\frac{\pi}{2K}x - 180^0$$

wo K ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung ist, dessen Modul vorläufig noch unbestimmt bleibt, so wird

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\left\{1 - \beta_0 + \beta\cos\left(2\frac{\pi}{2K}x\right)\right\}E = \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda}W$$

wo

$$W = \frac{W_1}{e^{\frac{A'}{2\lambda}\cos(\lambda v_0 - 3B)}} + W_2$$

gesetzt worden ist.

Betrachtet man nun die Relation

$$\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cos 2\frac{\pi}{2K}x = \frac{k^2(1-q^2)}{16q}\cos 2\,\mathrm{am}\,x - \frac{k^2(1-q^2)}{16q}\Gamma_{(0)}{}^{(2)}$$
$$-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(1-q)^2\left\{\frac{2q}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \frac{3q^2}{1-q^6}\cos 6\frac{\pi}{2K}x + \dots\right\}$$

und bestimmt q aus der Gleichung

$$q' = \frac{\bar{\beta}(1-q^2)}{4\lambda^2}$$

so erhält man

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \left[k^2\cos 2\mathrm{am}\, x + \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1-\bar{\beta}_0) - k^2\Gamma_0^{(2)}\right]E$$

$$= \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\left\{W + \bar{\beta}(1-q^2)E\left[\frac{2q}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \ldots\right]\right\}$$

Nun ist q von der Ordnung der Masse, mithin der Factor von E auf der rechten Seite von der zweiten Ordnung und daher zu vernachlässigen. Mithin erhält man, wenn man noch setzt

$$\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1-\bar{\beta}_0) - k^2\Gamma_0^{(2)} = 1 - k^2\mathrm{sn}^2 i\omega \qquad (21_1)$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist:

$$\frac{d^2E}{dx^2} - [2k^2\mathrm{sn}^2x - 1 - k^2 + k^2\mathrm{sn}^2 i\omega]E = \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\{W + \ldots\} \qquad (22)$$

Dies ist die von Herrn Hermite[1]) angewandte Form der Lamé'schen Differentialgleichung, deren Integral das folgende ist

$$E = C_1\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta i\omega}x} + C_2\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \qquad (23)$$

Hier bedenten C_1 und C_2 Integrationsconstanten, $\Theta(x)$ die bekannte Jacobi'sche Thetafunction und

$$H(x) = \frac{\sqrt[4]{q}\, e^{i\frac{\pi}{2K}x}}{i}\Theta(x+iK')$$

Man setze nun

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} = i\frac{\pi}{2K}\tfrac{2}{3}(\nu - \tfrac{1}{2})$$

wo ν eine reelle positive Zahl bedeutet.

1) Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Comptes rendus. 1877. 2e semestre.

Da

$$\frac{\pi}{2K}x = \tfrac{3}{2}(1-\mu)v_0 - \tfrac{3}{2}B + \frac{\pi}{2}$$

war, wird also

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x = i(\nu - \tfrac{1}{2})\left((1-\mu)v_0 - B + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ferner ersetze man C_1 und C_2 durch zwei andere Constanten, $\varkappa$ und Γ, gemäss den Gleichungen

$$C_1 = \frac{\varkappa}{2}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\,e^{i\Gamma - i(\nu-\frac{1}{2})\left(\Lambda - \mu\Lambda - \frac{\pi}{3}\right) - i\frac{3}{2}(\Lambda' - \mu\Lambda)}$$

$$C_2 = \frac{\varkappa}{2}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-i\Gamma + i(\nu-\frac{1}{2})\left(\Lambda' - \mu\Lambda - \frac{\pi}{3}\right) + i\frac{3}{2}(\Lambda' - \mu\Lambda)}$$

Mithin wird nach Gl. (23)

$$\Theta(x)E = \frac{\varkappa}{2}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\,H(x+i\omega)e^{-i(\nu-\frac{1}{2})\left((1-\mu)v_0 - B + \frac{\pi}{3}\right) + i\Gamma - i(\nu-\frac{1}{2})\left(B - \frac{\pi}{3}\right) - i\frac{3}{2}B}$$

$$+ \frac{\varkappa}{2}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\,H(x-i\omega)e^{+i(\nu-\frac{1}{2})\left((1-\mu)v_0 - B + \frac{\pi}{3}\right) - i\Gamma + (\nu-\frac{1}{2})\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + i\frac{3}{2}B}$$

Nun ist die Exponentialgrösse in der oberen Reihe dieser Gleichung

$$\cos[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)] + i\sin[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)]$$

diejenige in der unteren Reihe

$$\cos[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)] - i\sin[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)]$$

Mithin wird

$$(24) \qquad \Theta(x)E =$$

$$\frac{\varkappa}{2}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\,\{H(x+i\omega) = H(x-i\omega)\}\cos[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)]$$

$$-i\frac{\varkappa}{2}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\,\{H(x+i\omega) - H(x-i\omega)\}\sin[(\nu-\tfrac{1}{2})((1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B)]$$

Erinnert man sich nun der Entwicklung

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q}\left\{\sin\frac{\pi}{2K}x - q^2\sin 3\frac{\pi}{2K}x + \ldots\right\}$$

und der Relationen zwischen den trigonometrischen Functionen und der Exponentialfunction, so findet man

$$H(x+i\omega) = -\frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega + i\frac{\pi}{2K}x} - \ldots\right\}$$

$$H(x-i\omega) = \frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\left\{e^{i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega - i\frac{\pi}{2K}x} - \ldots\right\}$$

Mithin

$$H(x+i\omega)+H(x-i\omega) = \frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\left\{e^{i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-i\frac{\pi}{2K}x} + e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\left[e^{i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-i\frac{\pi}{2K}x}\right]\ldots\right\}$$

$$= 2\sqrt[4]{q}\left[e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right]\sin\frac{\pi}{2K}x$$

$$= 2\sqrt[4]{q}\left[e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right]\cos[\tfrac{3}{2}(1-\mu)v_0 - \tfrac{3}{2}B]$$

Gleicherweise wird

$$H(x+i\omega) - H(x-i\omega) = -2i\sqrt[4]{q}\left[e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right]\sin[\tfrac{3}{2}(1-\mu)v_0 - \tfrac{3}{2}B]$$

Setzt man schliesslich diese Werte in Gl. (24) ein, so wird

$$\Theta(x)E = \varkappa\cos[\tfrac{3}{2}(1-\mu)v_0 - \tfrac{3}{2}B]\cos[(\nu-\tfrac{1}{2})(1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B]\left\{1 + e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\right\}$$

$$-\varkappa\sin[\tfrac{3}{2}(1-\mu)v_0 - \tfrac{3}{2}B]\sin[(\nu-\tfrac{1}{2})(1-\mu)v_0 - \Gamma + \tfrac{3}{2}B]\left\{1 - e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\right\}$$

$$= \varkappa\cos[(1-\mu)v_0 + v(1-\mu)v_0 - \Gamma]$$

$$+ \varkappa e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B - [(1-\mu)(\nu+1)v_0 - \Gamma]]$$

Setzt man nun

$$\frac{1}{\Theta(x)} = 1 + 2q\cos 2\frac{\pi}{2K}x \ldots = 1 - 2q\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B] \ldots$$

ein, setzt ferner

$$\mu - \nu(1-\mu) = \varsigma$$

und resubstituirt ϱ_0 für E, so erhält man

$$\varrho_0 = \varkappa e^{\frac{A'}{2\varkappa}\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B]} \times$$

$$\Big\{ \cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma][1 - qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}$$

$$-\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B - (1-\varsigma)v_0 - \Gamma][q - e^{-\frac{\pi}{K}\omega}]$$

$$-q\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B + [1-\varsigma)v_0 - \Gamma)]$$

$$-qe^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\cos[6(1-\mu)v_0 - 6B - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]] \Big\}$$

oder, da

$$e^{\frac{A'}{2\lambda}\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B]} = 1 + \frac{A'}{2\lambda}\cos[3(1-\mu)v_0 - 3B] + \ldots \quad \text{ist,}$$

$$\varrho_0 = \varkappa \Big\{ \cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\left[1 - qe^{-\frac{\pi}{K}\omega} + \frac{A'}{4\lambda}e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\right]$$

$$-\cos[\lambda v_0 - 3B - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]]\left[q - e^{-\frac{\pi}{K}\omega} - \frac{A'}{4\lambda}\right]$$

$$-\cos[\lambda v_0 - 3B + [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]]\left[q - \frac{A'}{4\lambda}\right]$$

$$-\cos]2\lambda v_0 - 6B - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]]\left[qe^{-\frac{\pi}{K}\omega} - \frac{A'}{4\lambda}e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\right]\Big\} \qquad (25)$$

Wie man aus dem ersten Gliede, $\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]$, ersieht, ist die Grösse εv_0 die mittlere Bewegung der Apsidenlinie.

VI.

Der Ausdruck in Gl. (25) ist nun noch unvollständig, weil bei Herleitung desselben die rechte Seite der Gl. (22) vernachlässigt

Digitized by Google

wurde. Diese rechte Seite, unter Vernachlässigung der in E multiplicirten Glieder, war

$$\left(\frac{\pi}{K\lambda}\right)^2 W_1 = \overline{W}$$

und die Correction, welche in Folge dieses Gliedes an den in Gl. (23) gegebenen Wert von E anzubringen ist, wird

$$E_{(\varrho)} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\pi}{2K}\frac{\Theta_{(0)}^2\Theta(i\omega)}{K'H(i\omega)H_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)}\times$$

$$e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\int\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\,\overline{W}dv_0$$

$$+\frac{1}{\lambda}\frac{\pi}{2K}\frac{\Theta_{(0)}\Theta(i\omega)}{K'H(i\omega)H_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)}\times$$

$$e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\int\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\,\overline{W}dv_0 \qquad (26)$$

Für $\overline{W}$ erhält man, indem man pag. (18) die Werte für ϱ_0' und $\int\varrho_0'dv_0$ einführt, nach einigen Reductionen

$$\overline{W} = \left(\frac{\pi}{K\lambda}\right)^2 h_0 + 2h_1\cos[1(-\mu\varsigma')v_0 - \Gamma' \cdot\cdot \varsigma' B]$$

$$+ 2h_2\cos[(1+\delta+\mu\varsigma')v_0 + \Gamma' - \varsigma' B - 3B]\} \qquad (27)$$

wo

$$h_0 = -P_{000}$$

$$2h_1 = -P_{101}\varkappa' + 2P_{100}\frac{\varkappa'}{1-\mu\varsigma'} - 2Q_{101}\frac{\varkappa'}{1-\mu\varsigma'} + 4Q_{100}\frac{\varkappa'}{(1-\varsigma')(1-\mu\varsigma')}$$

$$2h_2 = -P_{201}\varkappa' - 4\frac{P_{200}\varkappa'}{1-\varsigma'} - 4Q_{201}\frac{\varkappa'}{1+\delta+\mu\varsigma'} - 16Q_{200}\frac{\varkappa'}{(1-\varsigma')(1+\delta+\mu\varsigma')}$$

$$\delta = 1 - 3\mu$$

Ersetzt man in Gl. (27) wieder v_0 durch x und schreibt

$$\frac{2\pi}{2K}\,\frac{1-\mu\varsigma'}{\lambda} = \alpha_1 \qquad (3B - 180^0)\frac{1-\mu\varsigma'}{\lambda} - \Gamma' - \varsigma' B = \beta_1$$

$$\frac{2\pi}{2K}\,\frac{1+\delta+\mu\varsigma'}{\lambda} = \alpha_2 \qquad (3B - 180^0)\frac{1+\delta+\mu\varsigma'}{\lambda} + \Gamma' - (3+\varsigma')B = \beta_2$$

so wird

$$\overline{W} = \left(\frac{\pi}{K\lambda}\right)^2 \left\{h_0 + h_1\left[e^{i(\alpha_1 x+\beta_1)} + e^{-i(\alpha_1 x+\beta_1)}\right]\right.$$
$$\left. + h_2\left[e^{i(\alpha_2 x+\beta_2)} + e^{-i(\alpha_2 x+\beta_2)}\right]\right\}$$

Diesen Wert hat man in Gl. (26) einzusetzen, indem man zugleich dv_0 durch $\frac{\pi}{K\lambda}dx$ setzt. Ferner erhält man leicht

$$\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)}\, e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}} = \frac{\sqrt[4]{q}}{i}\, e^{\frac{\pi}{2K}\omega} \left\{e^{i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega - i\frac{\pi}{2K}x}\right\} \times$$
$$e^{i\frac{\pi}{2K}\frac{2}{3}(\nu-\frac{1}{2})x}\left\{1 + q\left(e^{i\frac{\pi}{K}x} + e^{-i\frac{\pi}{K}x}\right)\ldots\right\}$$

$$\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} = -\frac{\sqrt[4]{q}}{i}\, e^{\frac{\pi}{2K}\omega} \left\{e^{-i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega + i\frac{\pi}{2K}x}\right\}$$
$$e^{-i\frac{\pi}{2K}\frac{2}{3}(\nu-\frac{1}{2})}\left\{1 + q\left(e^{i\frac{\pi}{K}x} + e^{-i\frac{\pi}{K}x}\right)\ldots\right\}$$

Das Glied ψ werden wir später berücksichtigen.

Durch Einsetzung obiger Werte erhält man

$$\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)}\, e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\, \overline{W}\, dv_0$$
$$= \frac{\sqrt{q}}{i}\,\frac{\pi}{K\lambda}\, e^{\frac{\pi}{K}\omega}\left[h_0\left\{\frac{1}{\mu_1} - \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{\mu_1}\, e^{ix(\mu_1-\mu_2)}\right.\right.$$
$$\left. - \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{\mu_2}\, e^{-ix(\mu_1-\mu_2)} + \frac{e^{-\frac{2\pi}{K}\omega}}{\mu_2}\right\}$$
$$+ h_1\left\{\frac{e^{ix\frac{\pi}{K}\alpha_1+i\beta_1}}{\mu_1+\alpha_1} + \frac{e^{-ix\alpha_1-i\beta_1}}{\mu_1-\alpha_1} - \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega-ix(\mu_1-\mu_2-\alpha_1)+i\beta_1}}{\mu_2-\alpha_1}\right.$$
$$- \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega-ix(\mu_1-\mu_2+\alpha_1)-i\beta_1}}{\mu_2+\alpha_1} - \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega-ix(\mu_1-\mu_2+\alpha_1)+i\beta_1}}{\mu_1+\alpha_1}$$
$$- \frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega-ix(\mu_1-\mu_2-\alpha_1)+i\beta_1}}{\mu_1-\alpha_1}$$
$$\left.\left. + \frac{e^{-\frac{2\pi}{K}\omega-ix\alpha_1-i\beta_1}}{\mu_2+\alpha_1}\right\} + h_2\left\{\ \ldots\ \right\}\right]$$

Das Glied in h_2 ist dem in h_1 analog, nur hat man α_2 und β_2 für α_1 und β_1 zu setzen, und es bedentet

$$\mu_1 = \frac{\pi}{K\lambda}(1-\varsigma) \qquad \mu_2 = \mu_1 - \frac{\pi}{K\lambda}$$

Der Ausdruck

$$\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta i\omega} x} \int \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} x} \overline{W} dv_0$$

ist ganz analog gebaut, nur entspricht jedem Glied von der Form he^{igx-iC} in obigem Ausdruck ein Glied von der Form $he^{-igx+iC}$

Man kann demnach für ihre Summe setzen $\cos(gx+C)$

Nennt man ferner den gemeinschaftlichen Factor in Gl. (26) φ und ersetzt schliesslich wieder x durch v_0, so erhält man

(28)

$$E_{(v)} = 2\,\frac{\sqrt{q}}{i}\left(\frac{\pi}{K\lambda}\right)^3 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\,\varphi\Bigg[h_0\left\{\frac{1}{\mu_1}+\frac{e^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{\mu_2} + \left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_1}\right)\cos(\lambda v_0-3B)\right\}$$

$$+\left\{h_1\left(\frac{2\mu_1}{\mu_1^2-\alpha_1^2}+e^{-\frac{2\pi}{K}\omega}\,\frac{2\mu_2}{\mu_2^2-\alpha_1^2}\right) + h_2\,e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\left(\frac{1}{\mu_1-\alpha_2}+\frac{1}{\mu_2+\alpha_2}\right)\right\}\cos[(1-\mu\varsigma')v_0-\Gamma'-\varsigma' B]$$

$$+h_1\,e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\left(\frac{1}{\mu_1+\alpha_1}+\frac{1}{\mu_2-\alpha_1}\right)\cos[(1+\lambda-\mu\varsigma')v_0+(3+\varsigma')B-\Gamma']$$

$$+\left\{h_1 e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\left(\frac{1}{\mu_1-\alpha_1}+\frac{1}{\mu_2+\alpha_1}\right)+h_2\left(\frac{2\mu_1}{\mu_1^2-\alpha_2^2}+e^{-\frac{2\pi}{K}\omega}\,\frac{2\mu_2}{\mu_2^2-\alpha_1^2}\right)\right\}\times \cos[(\lambda-1+\mu\varsigma')v_0-(3-\varsigma')B+\Gamma']$$

$$+h_2 e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\left(\frac{1}{\mu_1+\alpha_2}+\frac{1}{\mu_2-\alpha_2}\right)\cos[(1+\lambda+\delta+\mu\varsigma')v_0-(6-\varsigma')B+\Gamma']$$

Nimmt man nun das oben fortgelassene Glied mit q mit, so verändern sich nur die Coefficienten obiger Cosinus und man hat zu dem Factor

von	zu addiren
$\cos[(1-\mu\varsigma')v_0-\varsigma'A-\Gamma']$	$-\left(\dfrac{h_1qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{\varsigma-\mu\varsigma'}-\dfrac{h_2q}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}\right)$
$\cos[(\lambda+1-\mu\varsigma']v_0-(3+\varsigma')B-\Gamma']$	$-\left(\dfrac{h_1q}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}+\dfrac{h_2qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}\right)$
$\cos[(\lambda-1+\mu\varsigma')v_0-(3-\varsigma')B+\Gamma']$	$-\left(\dfrac{h_1q}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}+\dfrac{h_2qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{\varsigma-\mu\varsigma'}\right)$
$\cos[(1+\lambda+\delta+\mu\varsigma')v_0-(6-\varsigma')B+\Gamma']$	$-\dfrac{h_1qe^{-\frac{\pi}{K}\omega}}{2(\varsigma-\mu\varsigma')}$

Es ist nun noch der gemeinschaftliche Factor

$$\bar{\varphi}=\frac{2}{i}\,\frac{\pi}{2\lambda KK'}\,\frac{\Theta_{(0)}{}^2\Theta(i\omega)}{H(i\omega)\,H_1(i\omega)\,\Theta_1(i\omega)}\sqrt{q}$$

zu bestimmen. Mit Hülfe der Relationen

$$\Theta(i\omega)=\frac{\Theta_{(0)}}{[(1-q)(1-q^3)\ldots]^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cos\left(2\,\frac{\pi}{2K}\,i\omega\right)+q^{4n-2}\right)$$

$$H(i\omega)=\frac{2\sqrt[4]{q}\;\Theta(0)\sin\left(\frac{\pi}{2K}\,i\omega\right)}{[(1-q)(1-q^3)\ldots]^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-2q^{2n}\cos\left(2\,\frac{\pi}{2K}\,i\omega\right)+q^{4n}\right)$$

$$\Theta_1(i\omega)=\Theta\left(i\omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_1(i\omega)=H\left(i\omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

findet man [1])

---

1) Sholomow, Recherches etc. pag. 19.

$$\bar{\varphi} = -\frac{2}{\lambda}\frac{\pi}{2K}\frac{1}{K'} \times$$

$$\frac{\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1})^4 \prod_{n=1}^{n=\infty}\{(1-q^{2n-1})^2-q^{2n-1}x^2\}}{\left(e^{\frac{\pi}{K}\omega}-e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\{(1-q^{2n})^2-q^{2n}x^2\} \times \prod_{n=1}^{n=\infty}\{(1+q^{2n-1})+q^{2n-2}x^2\}\prod_{n=1}^{n=\infty}\{(1+2q^{2n})^2+q^{2n}x^2\}}$$

wo

$$x = e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}$$

gesetzt ist, oder, indem man die Producte entwickelt

$$\bar{\varphi} = -\frac{2}{n}\frac{\pi}{2K}\frac{1}{K'}\frac{(1-q)^4}{e^{\frac{\pi}{K}\omega}-e^{-\frac{\pi}{K}\omega}}\frac{1-q\left(e^{\frac{\pi}{K}\omega}+e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\right)}{1+q\left(e^{\frac{\pi}{K}\omega}+e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\right)} \tag{29}$$

Schliesslich kann man in Gl. (28) $\varrho_{(\omega)}$ für $E_{(\omega)}$ setzen, da in der Gleichnng

$$\varrho = E\left(1+\frac{A'}{2\lambda}\cos[\lambda v_0 - 3B]\right)$$

das zweite Glied vernachlässigt werden kann.

Eine weitere Correction ist noch dem Integral Gl. (23) zuzufügen, um die auf der rechten Seite der Gl. (22) stehenden Glieder, welche mit E multiplicirt sind,

$$\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\bar{\beta}(1-q)^2\left[\frac{2q}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \ldots\right]E$$

$$+\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\frac{A'^2}{4}\sin^2[\lambda v_0 - 3B]E$$

zu berücksichtigen. Erwägt man, dass

$$\sin^2[\lambda v_0 - 3B] = \tfrac{1}{2}\left(1-\cos 4\frac{\pi}{2K}x\right)$$

ist, so kann man hierfür schreiben

$$\frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{\frac{A'^2}{8}+\left[\bar{\beta}(1-q^2)\frac{2q}{1-q^4}-\frac{A'^2}{8}\right]\cos 4\frac{\pi}{2K}x\ldots\right\}E$$

Digitized by Google

Das erste Glied, welches nicht mit einem Cosinus multiplicirt ist, berücksichtigt man nun sehr einfach dadurch, dass man es auf die linke Seite der Gl. (21) und zu $\overline{\beta}_0$ schlägt, so dass man also nur statt

$$\overline{\beta}_0 = -P_{010}$$

zu setzen hat

$$\overline{\beta}_0 = -P_{010} - \frac{A'^2}{8}$$

Das mit dem Cosinus multiplicirte Glied giebt als Correction von E ein säculäres Glied; dasselbe kann man jedoch, wie Herr Gyldén gezeigt hat, dadurch verschwinden lassen, dass man ω um eine kleine Grösse, $\varDelta\omega$, variirt. Da jedoch in unserem Falle $\varDelta\omega$ so klein wird, dass wir es vernachlässigen können, soll auf seine Bestimmung hier nicht näher eingegangen werden [1])

VII

Wir kommen nun zur numerischen Berechnung der Apsiden-Bewegung ς und der Function ϱ_0.

Zunächst findet man durch Entwicklung der Störungsfunction (pag. 9. Gl. D und E) die in Gl. (20) auftretenden Constanten $P_{u,s,s'}$ und $Q_{uss'}$

P_{000}	5.8340370 [2])	Q_{100}	5.0286201	Q_{211}	6.7858956$_n$
P_{010}	6.3963098$_n$	Q_{101}	5.6616538	Q_{210}	6.2574556$_n$
P_{100}	5.5465697	Q_{200}	5.6303454	Q_{102}	5.9084426
P_{101}	6.2094726	Q_{201}	6.1404250	Q_{320}	6.4537522
P_{200}	5.9799200	Q_{300}	5.2306291		
P_{201}	6.5243287	Q_{310}	5.9506802$_n$		
P_{300}	5.7423376	Q_{110}	5.7525447$_n$		
P_{310}	6.3901285$_n$	Q_{111}	6.4044070$_n$		

Demnach erhält man für dass Verhältniss der mittleren Bewegungen

$$\mu = \frac{n'}{n} = 9.5156893$$

$$\lambda = 3(1 - \mu) = 0.3045806$$

1) Vergl. Gyldén, Die intermediäre Bahn des Mondes. pag. 158.
Sholanow, Recherches etc. pag. 30.

2) Sämtliche Zahlen sind Logarithmen.

$$\eta_0 = \lambda^2 - P_{010} - 1 = 0.4865992$$

Ferner nach den Definitions-Gleichungen pag. 369)

$$\overline{\beta_0} = 6.3963098 \qquad \bar{\beta} = 7.3290798$$

Aus der Gleichung

$$q' = \frac{\bar{\beta}(1-q^2)}{4\lambda^2}$$

(pag. 371.) findet man

$$q = 6.1178586$$

und aus den bekannten Relationen

$$k = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)\,(1+q^3)\ldots}\right\}^4$$

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1-q}\ldots$$

$$k = 8.6607613$$

$$\frac{2K}{\pi} = 0.0002279$$

Setzt man nun in Gl. (21_1)

$$1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\, i\omega = \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(1-\bar{\bar{\beta}}_0)$$

und beachtet die Relation

$$k^2\Gamma_0^{(4)}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = -32q^2\{1+2q^2+\ldots\}$$

so erhält man:

$$\bar{\bar{\beta}}_0 = \bar{\beta}_0 - 8\lambda^2 q^2\{1+2q^2+\ldots\}$$

$$\bar{\bar{\beta}}_0 = 6.3953287$$

$$k^2\,\mathrm{sn}^2 i\omega = 8.2428393$$

Nun setze man

$$\sigma = -ik\,\mathrm{sn}\, i\omega = 9.1214196 \text{ (n. imag.)}$$

Bezeichnet man ferner $e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}$ mit x, so besteht die Entwicklung

$$\sigma = \frac{\pi}{2K}x\left\{\frac{2\sqrt{q}(1+q)}{(1-q^2)-qx^2} + \frac{2\sqrt{q^3}(1+q)^2}{(1-q^3)^2-q^3x^2}\ldots\right\} \qquad (30)$$

oder

Digitized by Google

$$2\sqrt{q}(1+q)\ \frac{\pi}{2K}x+q\sigma x^2=\sigma(1-q)^2$$

woraus man die Reihe erhält

$$x=\frac{\sigma(1-q)^2}{2\sqrt{q}(1+q)}\ \frac{2K}{\pi}\left\{1-\frac{\sigma^4(1-q^2)}{4(1+q)^2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2-\ldots\right\}$$

und als Näherungswert von x findet

$$x_1=0.7597264 \text{ (n. imag.)}$$

Setzt man

$$\mu=\frac{q(1+q)^3}{(1-q^3)^2-q^3x_1^2}$$

in Gl, (30) ein, also

$$\sigma=\frac{\pi}{2K}x.2\sqrt{q}(1+q)\left\{\frac{1}{(1-q)^2-qx^2}+p\right\}$$

so findet man

$$\mu=6.1179156$$

und die zweite Näherung von x

$$x_2=0.7597617 \text{ (n. mag.)}$$

und damit

$$e^{\frac{\pi}{2K}\omega}=0.7460129 \text{ (imag.)}$$

$$e^{\frac{\pi}{K}\omega}=1.4920258$$

Wir hatten nun (pag. 372. und 374.) gesetzt

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}=i\frac{\pi}{2K}\ \tfrac{3}{2}(\nu-\tfrac{1}{3})$$

und

$$\varsigma=\mu-\nu(1-\mu)$$

Benutzt man nun die Entwicklungen

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}=2i\frac{\pi}{2K}x\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega}+e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)\times$$

$$\left\{\frac{q}{(1-q)^2-qx^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2-q^3x^2}+\ldots\right\}$$

$$\frac{2K}{\pi}=1+\frac{4q}{1-q}-\frac{4q^3}{1+q^3}+\ldots$$

so findet man

$$\varsigma = \tfrac{3}{2}\mu - \tfrac{1}{2} - 3(1-\mu)x\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right) \times$$
$$\left\{\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + \frac{q^2}{(1-q^3)^2 - q^2x^2} + \dots\right\}$$

Nach dieser Formel ist jedoch ς nicht genau zu bestimmen, weil es sehr viel kleiner ist, als die beiden Werte $\frac{3}{2}\mu$ und $\frac{1}{2}$, durch deren Differenz es gebildet wird; man benutzt deshalb die Reihe

$$\mathrm{du}\, iw = \frac{2}{n}\frac{\pi}{2K}\sqrt{1-\overline{\overline{\beta}}_0} =$$
$$1 + 2\frac{\pi}{2K}x^2 \left\{\frac{q\,\frac{1+q}{1-q}}{(1-q)^2 - qx^2} - \frac{q^3\,\frac{1+q^2}{1-q^8}}{(1-q^3)^2 - q^3x^2} + \dots\right\}$$

woraus, unter Berücksichtigung, dass $\lambda = 3(1-\mu)$ ist, sofort folgt

$$0 = \tfrac{1}{2}\overline{\overline{\beta}}_0 + \tfrac{1}{8}\overline{\overline{\beta}}_0^2 \dots - \tfrac{3}{2}\mu + \tfrac{1}{2} + 3(1-\mu)\frac{\pi}{2K}x^2 \times$$
$$\left\{\frac{q\,\frac{(1+q)}{(1-q)}}{(1-q)^2 - qx^2} - \dots\right\}$$

Addirt man diese Gleichung zu obigem Ausdruck für ς, so fallen die grossen Glieder fort, und es wird

$$\varsigma = \tfrac{1}{2}\overline{\overline{\beta}}_0 + \tfrac{1}{8}\overline{\overline{\beta}}_0^2 + \dots + \frac{6(1-\mu)q}{(1-q)[(1-q)^2 - qx^2]}\left\{e^{-\frac{\pi}{K}\omega}(1-q) - q\right\}$$

Nach dieser Form ergab sich

$$\varsigma = 6.1501240$$

Die Function ϱ_0 ergiebt sich aus den Gln. (25) und (28).

Die Grösse $\varkappa$ (Gl. (25)) ist eine Integrations-Constante, welche, streng genommen, aus Beobachtungen bestimmt werden müsste. Da dieselbe jedoch sehr nahe mit der Excentricität der elliptischen Bahn zusammenfällt, können wir sie in erster Annäherung mit dem Mittelwert der veränderlichen Excentricität identificiren und setzen

$$\varkappa = 9.1082931$$

Dieselbe Grösse ist für Jupiter

$$\varkappa' = 8.6835140$$

und dessen Apsiden-Bewegung

$$\varsigma' = 5.53914$$

Damit findet man (vergl. pag. 375) und 377))

$$h_0 = 5.83404_n$$
$$h_1 = 4.52972_n$$
$$h_2 = 5.67277_n$$

ferner

$$\alpha_1 = 9.9962180$$
$$\alpha_2 = 0.0032973$$

und

$$\mu_1 = 9.5951300$$
$$\mu_2 = 0.2055516_n$$

womit sich ergiebt

$$\begin{aligned}
\varrho_0 = & [9.1082915]\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma] + [8.2670415]\cos[(1-\mu\varsigma')v_0 - \varsigma' B - \Gamma'] \\
& + [7.6144949\cos[\lambda v_0 - 3B - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]] \\
& + [7.2993016]\cos[\lambda v_0 - 3B - [(1-\mu\varsigma')v_0 - \varsigma' B - \Gamma']] \\
& - [5.2244026]\cos[\lambda v_0 - 3B + [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]] \\
& - [4.3868209]\cos[\lambda v_0 - 3B + [(1-\mu\varsigma')v_0 - \varsigma' B - \Gamma']] \\
& - [3.73238]\cos[2\lambda v_0 - 6B - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]] - [5.8278775] \qquad (31)
\end{aligned}$$

Es möge noch erwähnt werden, dass man das letzte constante Glied fortschaffen kann, indem man in Gl. (12) Zähler und Nenner durch $1 - [5.8278775]$ dividirt.

VIII.

Zur Bestimmung der Variation χ sind nun aus Gl. (18) diejenigen Glieder auszusuchen, welche gross werden Durch eine ganz gleiche Betrachtung, wie sie in III. angestellt wurde, ersieht man, dass dies solche Glieder sind, welche die Form haben

$$A\cos(\delta v_0 + C)$$

wo δ eine kleine Grösse ist.

Solche Argumente treten, wie man sich leicht überzeugt, nur in solchen Gliedern auf, welche von der 2ten, 4ten Ordnung in Bezug auf ϱ_0 und ϱ_0' sind, und man erhält, wenn man

$$V = (1-\mu)v_0 + \chi - B$$

setzt [1])

$$\begin{aligned}\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = \sin V\{ & -2Q_{102}\varrho_0'^2 - 2Q_{111}\varrho_0\varrho_0' - 4\mu^2 Q_{100}(\textstyle\int \varrho_0' dv_0)^2 \\ & + 8\mu^2 Q_{100}(\textstyle\int \varrho_0' dv_0)(\textstyle\int \varrho_0 dv_0)\} \\ & \cos V\{4\mu Q_{101}\varrho_0' \textstyle\int \varrho_0' dv_0 + 4\mu Q_{110}\varrho_0 \textstyle\int \varrho_0' dv_0 - 4\mu Q_{101}\varrho_0' \textstyle\int \varrho_0 dv_0 \\ & + 2\mu Q_{100} \textstyle\int \varrho_0'^2 dv_0 - 8\mu Q_{100} \textstyle\int \varrho_0\varrho_0' dv_0\} \\ & + \sin 2V\{-4\mu Q_{211}\varrho_0\varrho_0' + 64\mu^2 Q_{200}(\textstyle\int \varrho_0' dv_0)(\textstyle\int \varrho_0 d_0)\} \\ & \cos 2V\{16\mu Q_{210}\varrho_0 \textstyle\int \varrho_0' dv_0 - 16\mu Q_{201}\varrho_0' \textstyle\int \varrho_0 dv_0 - 32\mu Q_{200} \textstyle\int \varrho_0\varrho_0' dv_0\} \\ & + \sin 3V\{-6Q_{320}\varrho_0^2 - 108\mu^2 Q_{300}(\textstyle\int \varrho_0 dv_0)^2\} \\ & + \cos 3V\{-36\mu Q_{310}\varrho_0 \textstyle\int \varrho_0 dv_0 + 54\mu Q_{300} \textstyle\int \varrho_0^2 dv_0\}\end{aligned}$$

Setzt man für ϱ_0' nnd ϱ_0 ihre dnrch die Gln. (15) nnd (31) gegebenen Werte ein, und zieht die trigonometrischen Functionen anf die früher beschriebene Weise zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d^2\chi}{pv_0^2} = & -a_1\sin[(\delta+2\mu\varsigma')v_0 + \chi - 3B + 2\Gamma''] \\ & -a_2\sin[(\delta+\varsigma+\mu\varsigma')v_0 + 2\chi - 3B + \Gamma + \Gamma'] \\ & -a_3\sin[(\delta+2\varsigma)v_0 + 3\chi - 3B + 2\Gamma]\end{aligned} \tag{32}$$

und es ist

$$\begin{aligned}a_1 = & \frac{\varkappa'^2}{2}Q_{112} - \frac{\varkappa'\varkappa_4}{2}Q_{111} - \mu^2\varepsilon'^2 Q_{200} + 2\mu^2\varepsilon'\varepsilon_4 Q_{100} + \mu\varkappa'\varepsilon' Q_{101} \\ & + \mu\varkappa_4\varepsilon' Q_{110} + \mu\varkappa'\varepsilon_4 Q_{101} + \frac{\varkappa'\varepsilon'}{4}\mu Q_{100} \\ & + 2\frac{\varkappa'\varepsilon_4\varepsilon'\varkappa_4}{\varkappa_4\varepsilon' - \varkappa'\varepsilon_4}\mu Q_{100} + \varkappa'\varkappa_2 Q_{211} + 16\mu^2\varepsilon'\varepsilon_2 Q_{200} + 4\mu\varkappa_2\varepsilon' Q_{210} \\ & - \mu\varkappa'\varepsilon_2 Q_{201} - 8\frac{\varkappa'\varepsilon'\varkappa_2\varepsilon_2}{\varkappa_2\varepsilon' + \varkappa'\varepsilon_2}\mu Q_{200} + \tfrac{3}{2}\varkappa_2^2 Q_{320} \\ & - \tfrac{3}{2}\varkappa_4^2 Q_{320} - 27\mu^2\varepsilon_2^2 Q_{300} + 27\mu^2\varepsilon_4^2 Q_{300} - 9\mu\varkappa_2\varepsilon_2 Q_{310} + 9\varkappa_4\varepsilon_4\mu Q_{310} \\ & + \frac{27}{4}\mu\varkappa_2\varepsilon_2 Q_{300} - \frac{27}{4}\mu\varkappa_4\varepsilon_4 Q_{300}\end{aligned}$$

---

1) Hier sind diejenigen Glieder fortgelassen, welche nur ς oder ς' als Factor von v_0 enthalten, da dieselben durch die doppelte Integration hyperelementär werden würden; ein Umstand, der vermieden wird, wenn man diese Glieder zu S schlägt, und also als Störungen der intermediären Bahn behandelt.

$$a_2 = -\frac{x' x_3}{2} Q_{111} + 2\mu^2 \varepsilon' \varepsilon_3 Q_{100} + \mu x_3 \varepsilon' Q_{110} + \mu x' \varepsilon_3 Q_{101}$$

$$+ \frac{2x' x_3 \varepsilon' \varepsilon_3}{x_3 \varepsilon' - x' \varepsilon_3} \mu Q_{100} + x' x_1 Q_{210} + 16\mu^2 \varepsilon' \varepsilon_1 Q_{200} + 4\mu x_1 \varepsilon' Q_{210}$$

$$-4\mu x' \varepsilon_1 Q_{201} - 8 \frac{x' x_1 \varepsilon' \varepsilon_1}{x' \varepsilon_1 + x_1 \varepsilon'} \mu^2 Q_{200} + 3x' x_1 Q_{320} - 3x_3 x_4 Q_{320}$$

$$-54\mu^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 Q_{300} + 54\mu^2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 Q_{300} - 9(x_1 \varepsilon_2 + x_2 \varepsilon_1)\mu Q_{310}$$

$$+9(x_3 \varepsilon_4 + x_4 \varepsilon_3)\mu Q_{310} + 27 \frac{x_1 x_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{x_1 \varepsilon_2 + x_2 \varepsilon_1} \mu Q_{300} - 27 \frac{x_3 x_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4}{x_3 \varepsilon_4 + x_4 \varepsilon_3} \mu Q_{300}$$

$$a_3 = \tfrac{3}{2} x_1^2 Q_{320} \; \tfrac{8}{2}(x_1^2 - x_3^2) Q_{320} + 27\mu^2(\varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2) Q_{300} + 9\mu(x_2 \varepsilon_3 - x_1 \varepsilon_1) Q_{310}$$

$$+ \frac{27}{4} \mu Q_{300}(x_1 \varepsilon' - x_3 \varepsilon_3)$$

wo $x_1, x_2 \ldots x_4$ der Reihe nach die Coefficienten der vier ersten Cosinus in Gl. (31) bedeuten, und

$$\varepsilon' = \frac{x'}{(1-\varsigma')\mu} \qquad \varepsilon_1 = \frac{x_1}{1-\varsigma} \qquad \varepsilon_2 = \frac{x_2}{1-\mu\varsigma'} \qquad \varepsilon_3 = \frac{x_3}{\lambda-(1-\varsigma)}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{x_4}{\lambda-(1-\mu\varsigma')} \quad \text{ist.}$$

Behufs Integration der Gl. (32) entwickeln wir die Cosinus nach Potenzen von χ, wodurch, unter Vernachlässigung des Quadrats, wird:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} + \Phi_0 \chi = \Phi_1 \tag{33}$$

$$\Phi_0 = a_1 \cos[(\delta + 2\mu\varsigma')v_0 - 3B + 2\Gamma'] + 2a_2 \cos[(\delta + \varsigma + \mu\varsigma')v_0 - 3B + \Gamma + \Gamma']$$
$$+ [3a_3 \cos[(\delta + 2\varsigma)v_0 - 3B + 2\Gamma]$$

$$\Phi_1 = -a_1 \sin[\quad „ \quad] - a_2 \sin[\quad „ \quad]$$
$$-a_3 \sin[\quad „ \quad]$$

Integrirt man znnächst unter Vernachlässiguug des in χ multiplicirten Gliedes, so erhält man

$$\chi = \frac{a_1}{(\delta + 2\mu\varsigma')^2} \sin\alpha_1 + \frac{a_2}{(\delta + \varsigma + \mu\varsigma')^2} \sin\alpha_2 + \frac{a_3}{(\delta + 2\varsigma)^2} \sin\alpha_3$$

Setzt man diesen Wert iu $\Phi_0 \chi$ ein, zieht wieder die Winkel zusammen, und integrirt von neuem, so wird

$$\chi = \frac{a_1}{(\delta+2\mu\varsigma')b}\sin\alpha_1 + \frac{a_2}{(\delta+\varsigma+\mu\varsigma')^2}\sin\alpha_2 + \frac{a_3}{(\delta+2\varsigma)^2}\sin\alpha_3$$

$$+\frac{1}{8}\frac{a_1{}^2}{(\delta+2\mu\varsigma')^4}\sin 2\alpha_1 + \frac{b_1}{4(\delta+\varsigma+\mu\varsigma')^2}\sin 2\alpha_2$$

$$+\frac{3}{8}\frac{a_3{}^2}{(\delta+2\varsigma)^4}\sin 2\alpha_3 + \frac{b_2}{4(\delta+\varsigma+3\mu\varsigma')^2}\sin\alpha_4 + \frac{b_3}{2(\delta+3\varsigma+\mu\varsigma')^2}\sin\alpha_5 \quad (34)$$

wo

$$\alpha_1 = (\delta+2\mu\varsigma')v_0 - 3B + 2\Gamma'$$
$$\alpha_2 = (\delta+\varsigma+\mu\varsigma')v_0 - 3B + \Gamma + \Gamma'$$
$$\alpha_3 = (\delta+2\varsigma)v_0 - 3B + 2\Gamma$$
$$\alpha_4 = (2\delta+\varsigma+3\mu\varsigma')v_0 - 6B + \Gamma + 8\Gamma'$$
$$\alpha_5 = (2\delta+3\varsigma+\mu\varsigma')v_0 - 6B + 3\Gamma + \Gamma'$$

$$b_1 = \frac{a_2{}^2}{(\delta+\varsigma+\mu\varsigma')^2} + \frac{a_1 a_3}{2}\left(\frac{1}{(\delta+2\varsigma)^2} + \frac{3}{(\delta+2\mu\varsigma')^2}\right)$$

$$b_2 = \frac{n_1 a_2}{2(\delta+\varsigma+\mu\varsigma')^2} + \frac{a_1 a_2}{(\delta+2\mu\varsigma')^2}$$

$$b_3 = \frac{a_2 a_3}{(\delta+2\varsigma)^2} + \frac{3}{2}\frac{a_2 a_3}{(\delta+\varsigma-\mu\varsigma')^2}$$

Die Einsetzung der numerischen Werte ergicht

$a_1 = 4.0390434_n$ $\qquad (\delta+2\mu\varsigma')^2 = 5.4562256$

$a_2 = 4.5119368_n$ $\qquad (\delta+\varsigma+\mu\varsigma')^2 = 6.4628780$

$a_3 = 5.0503829$ $\qquad (\delta+2\varsigma)^2 = 6.4694798$

und

$$\chi = [8.5909031]\sin[(\delta+2\varsigma)v_0 - 3B + 2\Gamma]$$
$$-[8.0490588]\sin[(\delta+\varsigma+\mu\varsigma')v_0 - 3B + \Gamma + \Gamma']$$
$$-[7.5828178]\sin[(\delta+2\mu\varsigma')v_0 - 3B + 2\Gamma']$$
$$+[6.7558375]\sin[2\{(\delta+2\varsigma)v_0 - 3B + 2\Gamma\}]$$

wo die übrigen Glieder ihrer Kleinheit wegen fortgelassen sind.

Im Maximum wird $\chi = 3^0 5'$.

Nachdem χ gefunden, könnte man eine zweite Näherung für ϱ_0 ableiten, indem man den Wert von χ in die Differentialgleichung für ϱ_0 einführt.

Doch soll hierauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

IX.

Dnrch die bisherigen Betrachtnngen ist die Bewegung des Planeten in seiuer momeutaneu Bahnebene bestimmt; es erübrigt nocb die Beweguug der Bahnebene selber zu untersuchen.

Aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu_1 z}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

erhält man durch Einführung der Breite b, $z = r \sin b = r\mathfrak{z}$

$$r\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \frac{2dr}{dt}\frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \left(\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r^2}\right)\mathfrak{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{c}{r^4}U$$

wo

$$U = \frac{r^3}{c}\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad \text{ist.}$$

Ersetzt man, gemäss den Gl. (3) und (6_1) t durch v_0, so wird

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv_0^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\mathfrak{z}}{dv_0} + (1+S)^2\frac{r^2}{c}\left(\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r^2}\right)\mathfrak{z} = (1+S)^2 U$$

und da

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r^2} = r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

ist, erhält man, indem man v durch seinen Wert $v_0 + \chi$ ersetzt:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv_0^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\mathfrak{z}}{dv_0} + \left\{1 + \frac{2d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 + (1+S)^2\frac{r^3}{c}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right\}\mathfrak{z} - (1+S)^2 U = 0$$

Erinnert man sich nun der Relationen

$$\frac{r^3}{c}\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \mu_1\frac{r^3}{c}\left\{-\frac{r}{\Delta^3} + r'\cos H\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right\}$$

$$U = \mu_1\frac{r^3}{c}\left\{-\frac{r}{\Delta^3}\mathfrak{z} + \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z'\right\}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = \mu' r r'\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\}$$

so sieht man, dass

$$(1+S)^2\frac{r^3}{c}\frac{\partial \Delta}{\partial r}\mathfrak{z} - (1+S)^2 U = (1+S)^2\frac{r^2}{c}\frac{\partial \Omega}{\partial \cos H}\left(\mathfrak{z}\cos H - \frac{z'}{r'}\right)$$

ist. Wählt man nun die Bahnebene Jupiters als Fundamental-Ebene so wird $s' = 0$, und man erhält

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv_0^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\mathfrak{z}}{dv_0} + \left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 + (1+S)^2\frac{r^2}{c}\cos H\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\right\}\mathfrak{z} = 0$$

und mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv_0^2} + \left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \frac{r^2}{c}\cos H\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\right\}\mathfrak{z} = 0 \tag{35}$$

Aus der Entwickelung der Störungsfunction ist bekannt

$$\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H} = 2\Sigma\Sigma\Sigma R_{nss'}\varrho_0^s\varrho_0'^{s'}\cos nH \tag{F}$$

Durch eine, der in III. angestellten analoge, Ueberlegung ersieht man leicht, dass in der mit $\mathfrak{z}$ multiplicirten Klammer (Gl. (35) diejenigen Glieder gross werden, welche das Argument v_0 mit 0 oder 2 multiplicirt enthalten. Man erhält somit

$$\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\cos H = R_{100} + (R_{200} + R_{400})\cos[\lambda v_0 - 3B]\ \ldots$$

Aus $\frac{d\chi}{dv_0}$ erhält man das Glied

$$2\frac{d\chi}{dv_0} = \frac{12}{\lambda}Q_{300}\cos[\lambda v_0 - 3B]$$

Mithin hat man

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv_0^2} + \left\{(1 + R_{100}) + \left(\frac{12}{\lambda}Q_{300} + R_{200} + R_{400}\right)\cos[\lambda v_0 - 3B]\right\}\mathfrak{z} = 0$$

oder, indem wir

$$R_{100} = \beta^{(0)}$$

$$\frac{12}{\lambda}Q_{300} + R_{200} + R_{400} = \beta^{(1)}$$

setzen:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv_0^2} + \{1 + \beta^{(0)} + \beta^{(0)}\cos[\lambda v_0 - 3B]\}\mathfrak{z} = 0 \tag{36}$$

Die Integration dieser Gleichung wird auf dieselbe Weise ausgeführt, wie die der Gl. (21).

Setzt man

$$\lambda v_0 - 3B = 2\frac{\pi}{2K}x$$

$$q = \frac{\beta^{(1)}(1-q^2)}{4\lambda^2}$$

$$\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)}{\lambda^2}(1+\beta^{(0)}) - k\Gamma_0^{(2)} = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 i\omega$$

so erhält man wieder die Lamé'sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} - [2k\,\mathrm{sn}^2 x - 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\, i\omega]\,\mathfrak{z} = w \tag{37}$$

wo w als von der zweiten Ordnung der Masse fortgelassen werden kann. Das Integral der Gl. (37) ist

$$\mathfrak{z} = C_1\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} + C_2\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}$$

Man führe die neuen Constanten J, Σ und ν ein durch die Gleichungen

$$C_1 = \frac{J}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{i\Sigma - i(\nu-\frac{1}{2})B - i\frac{3}{2}B}\cdot e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}$$

$$C_2 = \frac{J}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-i\Sigma + i(\nu-\frac{1}{2}) + i\frac{3}{2}B}\, e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}$$

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} = i\frac{\pi}{2K}\frac{3}{2}(\nu-\tfrac{1}{2})$$

so wird nach Ausführung der in V. angegebenen Transformationen

$$\mathfrak{z}\Theta(x) = Je^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\sin[\Sigma - 3B - v_0(1-\mu)(\nu-2)]$$
$$+ Je^{\frac{\pi}{2K}\omega}\sin[(1-\mu)(\nu+1)v_0 - \Sigma]$$

und da

$$\frac{1}{\Theta(x)} = 1 + 2q\cos[\lambda v_0 - 3B]\;\ldots\quad \text{ist,}$$

$$\mathfrak{z} = J \left\{ \begin{array}{l} \sin[(1+\tau)v_0 - \Sigma]\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega} q\right) + \sin[(\lambda v_0 - 3B) \\ \quad - [(1+\tau)v_0 - \Sigma]]\left(e^{-\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{\frac{\pi}{2K}\omega} q\right) \\ \quad + \sin[(\lambda v_0 - 3B) + [(1+\tau)v_0 - \Sigma]]\, e^{\frac{\pi}{2K}\omega} q \\ \quad + \sin[2(\lambda v_0 - 3B) - [(1+\tau)v_0 - \Sigma]]\, e^{-\frac{\pi}{2K}\omega} q \end{array} \right\} \qquad (37)$$

wo

$$\tau = \nu(1-\mu) - \mu$$

gesetzt ist und die Bewegung der Knotenlinie angiebt.

Analog dem Ausdruck für ς erhält man

$$\tau = \tfrac{1}{2}\bar{\beta}^{(0)} - \tfrac{1}{8}\bar{\beta}^{(0)2} \ldots - \frac{6(1-\mu)q}{(1-q)[(1-q^2)-qx^2]} \left\{ e^{-\frac{\pi}{K}\omega}(1-q) - q \right\} \qquad (38)$$

wo

$$\bar{\beta}^{(0)} = \beta^{(0)} + 8\lambda^2 q^2 (1 + 2q^2 + \ldots) \text{ ist.}$$

Die numerische Rechnung ergiebt

$\beta^{(0)} = 6.2607944$	$\beta^{(1)} = 6.3135699$
$q = 5.1023487$	$\sigma = 9.1086880$
$\frac{2K}{\pi} = 0.0000217$	$x_1 = 1.2546941$
$\bar{\beta}^{(0)} = 6.2608069$	$\mu = 5.1023487$
$k^2 \sin^2 i\omega = 8.2173760$	$x_2 = 1.2547034$
$e^{\frac{\pi}{2K}\omega} = 1.2560419$	$e^{-\frac{\pi}{2K}\omega} = 8.7439581$

$$\tau = 5.9588269$$

$$\mathfrak{z} = J \left\{ \begin{array}{l} [1.2560419]\sin[(1+\tau)v_0 - \Sigma] + [8.7421670]\sin[(\lambda v_0 - 3B) \\ \qquad - [(1+\tau)v_0 - \Sigma]] \\ + [6.3583906]\sin[(\lambda v_0 - 3B) + [(1+\tau)v_0 - \Sigma]] \\ \qquad + [3.8463068]\sin[2(\lambda v_0 - 3B) - (1+\tau)v_0 - \Sigma]] \end{array} \right.$$

XIX.

Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissoide.[1]

Von

K. Zahradnik.

I.

Berührungstripel.

Die Gleichung der Cissoide in Parameterdarstellung lautet:

$$x = \frac{a}{1+u^2} \qquad y = \frac{a}{u(1+u^2)} \tag{1}$$

Die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte u_1, u_2 ist:

$$(1+u_1^2+u_1u_2+u_2^2)x - u_1u_2(u_1+u_2)y - a = 0$$

welche für $u_1 = u_2 = u$ in die Gleichung der Tangente im Punkte u, nämlich

$$(1+3u^2)x - 2u^3y - a = 0 \tag{2}$$

übergeht. Die Berührungspunkte[2]) u_1, u_2, u_3 der aus dem Punkte $P(x, y)$ an die Cissoide gelegten Tangenten bilden das dem Punkte

1) Siehe in diesem Archiv meine diesbezüglichen Arbeiten: Rationale ebene Curven Teil 56, pg. 114; Beitrag zur Theorie der Cissoide T. 57, pg. 335; Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide T. 62 pg. 443.

2) Punkt u d. ist, dessen Parameter gleich u ist.

Digitized by Google

P entsprechende Berührungsdreieck[1]). In diesem Anfsatze wollen wir nnn die Verwandtschaft nntersnchen, in welcher der Pnnkt P zn den ansgezeichneten Pnnkten des Berührungsdreieckes steht. Den Punkt P werden wir kurz als den Pol des Berührungsdreieckes bezeichnen.

Pol und Schwerpunkt.

2. Für den Schwerpnnkt $S(\xi, \eta)$ des Berührungsdreieckes fanden wir mit Rücksicht anf die Relationen

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3x}{2y} \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= \frac{x-a}{2y} \end{aligned} \tag{3}$$

welche sich ans (2) ergeben:

$$\begin{aligned} \xi &= a\,\frac{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)x}{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2} \\ \eta &= -a\,\frac{\frac{a}{2}y}{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen geben nns die verlangte Relation zwischen dem Pole P nnd dem Schwerpnnkte S des Berührungsdreieckes.

Wir erkennen ans diesen Gleichnngen, dass zwischen P nnd S eine quadratische rationale Verwandtschaft und zwar eine Kreisverwandtschaft besteht. Wir können nämlich die erste der Gl. (4) schreiben:

$$\xi - a = -\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}}{y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2} \tag{4'}$$

Addiren wir zu dieser die zweite Gleichnng (4), nachdem wir sie mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt haben, so erhalten wir:

1) Siehe: Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide. Hoppe's Archiv d. Mathematik und Physik Teil 62, p. 443.

$$\xi - a + i\eta = -\frac{a^2}{2} \frac{x + \frac{a}{2} + iy}{y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2}$$

aus welcher Gleichung wir nach Kürzung mit dem Zähler erhalten:

$$(\xi - a + i\eta)\left(x + \frac{a}{2} - iy\right) = -\frac{a^2}{2} \tag{5}$$

Setzen wir nun

$$\zeta = \xi + i\eta$$
$$z = x - iy$$

so können wir die Gleichung (5) schreiben[1]):

$$\zeta z + \frac{a}{2}\zeta - az = 0 \tag{6}$$

Aus dieser Gleichung erhellt, dass jedem Punkte z nur ein Punkt ζ und umgekehrt entspricht. Die Gleichung (6) ist nämlich in Bezug auf ζ und z linear, und wir erhalten

$$\zeta = \frac{az}{z + \frac{a}{2}}, \quad z = \frac{\frac{a}{2}\zeta}{a - \zeta} \tag{6'}$$

Wir können aber auch direct aus Gl. (6) die Coordinaten von P mittelst der Coordinaten von S ausdrücken. Es ist nämlich

$$x + \frac{a}{2} - iy = -\frac{a^2}{2} \frac{1}{\xi - a + i\eta} = -\frac{a^2}{2} \frac{\xi - a - i\eta}{(\xi - a)^2 + \eta^2}$$

somit

$$x + \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2} \frac{\xi - a}{(\xi - a)^2 + \eta^2}$$
$$y = -\frac{a^2}{2} \frac{\eta}{(\xi - a)^2 + \eta^2} \tag{7}$$

Somit haben wir bewiesen, dass die angeführte quadratische Verwandtschaft eine rationale ist, und aus der Form der Gleichung (6) erhellt, dass sie eine Kreisverwandtschaft ist, d. i. die zugehörigen Punkte P und S entsprechen sich durch Inversion.

1) Es besteht somit $\zeta = f(z)$. Die Curven, welche P beschreibt, stehen mit den Curven, welche der zugeordnete Punkt I beschreibt, in isogonaler Verwandtschaft, d. i. schneiden sich unter demselben Winkel. Siehe Sieber: Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelle Bd. 55, pg. 228, 243.

Die Hauptpunkte des Systemes P sind $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ und die zwei imaginären Kreispunkte, die Hauptpunkte im Systeme S sind $(a, 0)$ und die beiden imaginären Kreispunkte. Bezeichnen wir den Punkt $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ mit O_p und den Punkt $(a, 0)$ mit O_s (Fig. 1). Denken wir uns, dass wir das System P parallel verschieben, so dass der Hauptpunkt O_p zusammenfällt mit dem Coordinatenanfang; gleichzeitig verschieben wir auch das Punktsystem S parallel, so dass O_s in den Coordinatenanfang fällt. In dieser neuen Lage bezeichnen wir die zugehörigen Punkte P_1, S'. Drehen wir nun das Punktsystem S' um den Coordinatenanfang um 180° und bezeichnen die Punkte S' in dieser neuen Lage mit S_1, dann liegen die entsprechenden Punkte P_1, S_1 auf einem Strahle aus O, so dass

$$OP_1 . OS_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Wir gelangen so zur nachstehenden Construction der entsprechenden Punkte. Wir construiren zuerst den Modul der Inversion $\frac{a}{\sqrt{2}}$, welcher gleich der Sehne $\overline{O_pB}$ eines Kreisquadranten vom Halbmesser $\overline{O_pO} = \frac{a}{2}$ ist, beschreiben aus O den Inversionskreis I mit dem Halbmesser $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Den Punkt P verbinden wir mit O_p, ziehen zu O_pP aus dem Coordinatenanfang eine Parallele; ebenso aus dem Punkte P zur Axe X. Der Durchschnitt dieser Parallelen ist P_1. Auf OP_1 construiren wir S_1 mittelst

$$OP_1 . OS_1 = \frac{a^2}{2}$$

verlängern S_1O über den Coordinatenanfang um seine Länge, womit wir den Punkt S' bekommen, und die Parallelprojection mit der Axe X auf die durch O_s zu $\overline{O_pP}$ gezogene Parallele gibt uns den Punkt S.

Anmerkung. Die Substitution $z' = z + \frac{a}{2}$ in die Gleichung (6') bewirkt eine Parallelverschiebung auf den neuen Anfangspunkt $O_p\left(0, -\frac{a}{2}\right)$; ebenso für $\zeta' = \zeta - a$ nehmen wir O_s als den Anfangspunkt des Punktsystems ζ'. Aus (6) erhalten wir:

$$z' . \zeta' = -\frac{a^2}{2} \tag{8}$$

Nun ist

$$O_p P \equiv z' = re^{-i\varphi}, \quad O_s S \equiv \zeta' = \varrho e^{i\psi}$$

somit:

$$O_p P.\, O_s S \equiv r\varrho e^{i(\psi-\varphi)} = \frac{a^2}{2} e^{i\pi}$$

woraus

$$\psi = \pi + \varphi, \quad r\varrho = \frac{a^2}{2}$$

in Uebereinstimmung mit (8) folgt, da

$$O_p P \equiv OP_1$$

$$O_s S \equiv OS' \equiv - OS_1$$

Auch direct können wir die Relation

$$O_p P.\, O_s S = -\frac{a^2}{2}$$

dartun; es ist nämlich

$$\overline{O_p P}^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$

$$\overline{O_s S}^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2$$

somit wegen (4) und (7) auch

$$\overline{O_s S}^2 = \frac{\left(-\frac{a^2}{2}\right)^2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{\left(-\frac{a^2}{2}\right)^2}{\overline{O_p P}^2}$$

woraus sofort folgt:

$$\overline{O_p P}.\, \overline{O_s S} = -\frac{a^2}{2}$$

Für die Praxis können wir die Construction bedeutend vereinfachen. Wir können O_p als Inversionscentrum nehmen; wir erhalten so $P \equiv P_1$, und die Construction von S_1 und somit von S ist wie früher. Somit haben wir die Verwandtschaft [1]) zwischen P und S vollständig erklärt und können somit die allgemeinen Resultate, welche für die quadratische Transformation gelten, hier verwenden. Beschreibt z. B. P eine Curve n-ter Ordnung und m-ter Classe, so beschreibt der entsprechende Punkt S eine Curve $2n$-ter Ordnung und $(2n-m)$-ter Classe, welche die Hauptpunkte des Systemes S zu

1) Ueber diese Transformation siehe Salmon-Fiedler: Höhere ebene Curven pg. 363, Kegelschnitte 2. Aufl. pg. 536, Bellavitis: Teoria della figure inverse e loro uso nella geometria elementare. An. delle scienze del regno Lombardo-Veneto 1836 T. VI., wie auch die Arbeit Liouville's in dessen Journale Bd. XII.

n-fachen Punkten hat. Geht die Curve von P $k$mal durch den Hauptpunkt O_p und $l$mal durch die imaginären Kreispunkte hindurch, so zerfällt bekanntlich die Curve von S, welche von der Ordnung $2n$ ist, in die k-fach zu zählende unendlich ferne Gerade und in die l-fach zu zählenden Verbindungslinien von O_s mit den imaginären Kreispunkten, dann in die eigentliche Inversionscurve, welche somit $2n-k-2l$-ter Ordnung und $2n-m-2k-4l$-ter Classe ist, wenn m die Classe der Polcurve ist. Der Punkt O_s ist ein $n-2l$-facher Punkt, und die imaginären Kreispunkte sind $(n-k-l)$-fache Punkte der Schwerpunktscurve.

Beschreibt z. B. der Pol P eine Parabel, deren Parameter p gleich ist dem Halbmesser des Grundkreises für die Cissoide, nämlich $\frac{a}{2}$, und deren Brennpunkt im Hauptpunkte O_p liegt, somit eine Parabel, deren Gleichung

$$y^2 = ax + \frac{3a^2}{4}$$

so beschreibt der Schwerpunkt S eine Kardioide mit dem Rückkehrpunkte in O_s und a als Durchmesser des festen Kreises. Die Gleichung dieser Kardioide lautet:

$$[(\xi-a)^2+\eta^2]^2 - 2a(\xi-a)[(\xi-a)^2+\eta^2] = a^2\eta^2$$

Beschreibt der Pol die Punkte (Scheitel in O_p)

$$y^2 = -\frac{a}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

so beschreibt der Schwerpunkt wieder eine Cissoide, welche mit der gegebenen congruent ist, nur um die Länge a parallel verschoben in der positiven Richtung der X-Axe.

Pol und Mittelpunkt des Umkreises.

3. Die Gleichung des Kreises durch drei Punkte lautet

$$(\xi^2+\eta^2)\,|\,x\,y\,1\,| - \xi\,|\,x^2+y^2, y, 1\,| + \eta\,|\,x^2+y^2, x, 1\,| - |\,x^2+y^2, x, y\,| = 0$$

Liegen nun die Punkte (x_h, y_h) auf der Cissoide, so ist

$$x_h = \frac{a}{1+u_h^2}$$

$$y_h = \frac{a}{u_h(1+u_h^2)}$$

so erhalten wir mittelst ähnlicher Reductionen, wie wir sie schon anderorts in diesem Archiv entwickelten

$$p_1(\xi^2+\eta^2)+\frac{a}{p_3}(1+p_1^2-p_2)\xi-\frac{a}{p_3}(p_1p_2-p_3)\eta-\frac{a^2}{p_3}=0 \qquad (9)$$

Führen wir nun mit den Gleichungen (3) die Bedingung ein, dass das Dreieck $u_1u_2u_3$ ein Berührungsdreieck des Poles P ist, so erhalten wir die Gleichung seines Umkreises

$$\xi^2+\eta^2+a\frac{4y^2+9x^2}{3x(x-a)}\xi+a\frac{2y}{3x}\eta-a^2\frac{4y^2}{3x(x-a)}=0 \qquad (10)$$

Die Coordinaten ξ_1, η_1 seines Mittelpunktes C sind:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=-\frac{a}{2}\frac{4y^2+9x^2}{3x(x-a)}\\ \eta_1&=-\frac{a}{2}\frac{2y}{3x}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass der Pol P in quadratischer Verwandtschaft mit dem Mittelpunkte des Umkreises seines Berührungsdreieckes steht. Wir wollen jetzt beweisen, dass diese Verwandtschaft eine rationale ist, d. i. dass jedem Punkte P der Ebene der Cissoide mittelst dieser Transformation nur ein Punkt C entspricht und umgekehrt. Aus den Gleichungen (11) folgt nämlich

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{2a^2\xi_1}{12\eta_1^2+2a\xi_1+3a^2}\\ y&=\frac{-6a\xi_1\eta_1}{12\eta_1^2+2a\xi_1+3a^2}\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

womit die Behauptung als erwiesen erscheint.

Im Punktsysteme P vereinigen sich zwei Hauptpunkte in unendlicher Ferne, und der dritte Hauptpunkt liegt im Coordinatenanfang. Das Punktsystem C hat zwei imaginäre Hauptpunkte $\left(0, \frac{a\sqrt{-1}}{2}\right)$. $\left(0, \frac{-a\sqrt{-1}}{2}\right)$, und der dritte Hauptpunkt ist in unendlicher Entfernung. Wir wollen jetzt zeigen, wie wir die Coordinaten dieser Hauptpunkte finden können. Unsere Transformation ist eine quadratische, d. i. der Geraden in einem Systeme entspricht ein Kegelschnitt im anderen Punktsysteme. Nun ist die Gerade durch zwei Punkte bestimmt, durch welche sie hindurch geht. Da nun den Kegelschnitt fünf Punkte bestimmen, da ferner jeder Geraden in einem Punktsystem ein ganz bestimmter Kegelschnitt im anderen

Punktsystem entspricht, so folgt, dass jeder Kegelschnitt des einen Systems, welcher einer Geraden des zweiten Systems entspricht, durch drei feste Punkte hindurchgeht, welche als Hauptpunkte oder Fundamentalpunkte [1]) bezeichnet werden. Dem Durchschnitte zweier Geraden entspricht ein einziger Punkt, nämlich der vierte Durchschnittspunkt der den Geraden entsprechenden Kegelschnitte. Hiermit ist in kurzem der Weg angezeigt, wie wir zu den Hauptpunkten gelangen.

Betrachten wir den Punkt $P(x, y)$ als Durchschnitt zweier mit den Axen parallelen Geraden, so sind die diesen Geraden entsprechenden Kegelschnitte

$$\begin{aligned}(12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2)\,x &= 2a^2\xi_1 \\ (12\eta_1^2 + 2a\xi_1 + 3a^2)\,y &= -\,6a\xi_1\eta_1\end{aligned} \qquad (13)$$

Führen wir aus der ersten Gleichung den Wert für ξ_1 in die zweite Gleichung, so erhalten wir:

$$(4\eta_1^2 + a^2)(ay + 3x\eta_1) = 0$$

welche Gleichung uns die Ordinaten der vier Schnittpunkte der Kegelschnitte (13) gibt. Dieselbe ist aber bloss vom dritten Grade in Bezug auf η_1, somit muss die Ordinate eines Schnittpunktes unabhängig von der Lage des Punktes $P(xy)$ unendlich gross sein. Der erste Factor gibt uns die Ordinaten weiterer zweier Schnittpunkte, nämlich

$$\eta_1' = \frac{a\sqrt{-1}}{2}, \qquad \eta_1'' = \frac{-\,a\sqrt{-1}}{2}$$

und aus dem zweiten Factor folgt die Ordinate des dem Punkte P entsprechenden Punktes

$$\eta_1 = -\frac{ay}{3x}$$

Die zugehörigen Abscissen folgen aus (13). Wir finden so

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \infty & &\text{für} \quad \eta_1 = \infty \\ \xi_1 &= 0 & &\quad ,, \quad\; \eta_1 = \pm\frac{ai}{2} \\ \xi_1 &= -\frac{a}{2}\cdot\frac{4y^2 + 9x^2}{3x\,(x - a)} & &\quad ,, \quad\; \eta_1 = -\frac{ay}{3x}\end{aligned}$$

Die drei Schnittpunkte, deren Coordinaten ganz unabhängig sind von der Lage des Punktes (x, y), sind die Hauptpunkte des Punktsystems C.

---

1) Salmon-Fiedler Höhere ebene Curven p. 369. Magnus Sammlung von Aufgaben, 1833: I pg. 229.

Auf dieselbe Weise können wir von den Gleichungen (11) ausgehen. Die Elimination von y gibt:

$$3x[(12\eta_1{}^2 + 2a\xi_1 + 3a^2)x - 2a^2\xi_1] = 0 \tag{14}$$

Da sich nun zwei Kegelschnitte in vier Punkten schneiden, und die Gleichung (14) nur vom zweiten Grade in x ist, so folgt, dass zwei Wurzeln unendlich gross sind, und eine den Wert $x = 0$ hat.

Die vierte Wurzel ist

$$x = \frac{2a^2\xi_1}{12\eta_1{}^2 + 2a\xi_1 + 3a^2}$$

Die zugehörigen Ordinaten sind somit:

$$\begin{aligned} y &= \infty & &\text{für} \quad x = \infty \\ y &= 0 & &\text{,,} \quad x = 0 \\ y &= \frac{-6a\xi_1\eta_1}{12\eta_1{}^2 + 2a\xi_1 + 3a^2} & &\text{,,} \quad x = \frac{2a^2\xi_1}{12\eta_1{}^2 + 2a\xi_1 + 3a^2} \end{aligned}$$

Wir erkennen wieder, dass drei von den Schnittpunkten von der Lage des Punktes $(\xi_1 \eta_1)$ unabhängig sind, und der vierte Schnittpunkt gibt den dem Punkte (ξ_1, η_1) entsprechenden Punkt (xy).

Somit haben wir wieder diese Verwandtschaft vollständig bestimmt, und könnten nun der allgemeinen Resultate uns bedienen, welche die Theorie[1]) der quadratischen rationalen Verwandtschaft darbietet.

Ueber die Verwandtschaft vierten Grades zwischen dem Schwerpunkte und Mittelpunkte des Umkreises des Berührungsdreieckes.

4. Durch den Pol P wird eindeutig die Lage des Schwerpunktes S sowie des Mittelpunktes C des Umkreises des zugeordneten Berührungsdreieckes; da nun durch den Punkt S oder C auch der Punkt P eindeutig gegeben ist, so folgt, dass auch S mit C in einer eindeutigen Verwandtschaft stehen muss. Den Grad der Verwandtschaft bestimmen wir folgendermassen: Der Geraden von S entspricht

1) In Bezug auf die Theorie der quadratischen rationalen Verwandtschaft siehe Salmon-Fiedler: Höhere ebene Curven pg. 359. Weyr Ed.: Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft. Schlömilch Zeitschrift. 1869 pg. 445. Reye Th.: Geometrische Verwandtschaft zweiten Grades. ibid. Teil XI, pg. 4, sowie dessen Geometrie der Lage. 2. Aufl. Hannover. Magnus: Aufgaben aus d. anal. Geometrie d. Ebene. pg. 229. Schiaparelli: Sulla Transformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla Transformazione iperbolica. Mem. d. Accad. di Torino Ser. II. Tomo XXI.

Digitized by Google

ein Kegelschnitt von P nnd diesem Kegelschnitt entspricht eine rationale Curve vierter Ordnung von C, somit entspricht der Geraden im Punktsystemo S eine rationale Curve vierter Ordnung im Punktsysteme C. Die Coordinaten des Punktes C müssen sich somit ausdrücken lassen als rationale gebrocheno Functionen vierten Grades in den Coordinaten von S mit gleichem Nenner. Dies führen wir aus, indem wir die Werte für x, y aus (7) und (12) gleichsetzen und nach den Coordinaten des Punktes $C(\xi_1, \eta_1)$ auflösen. Wir erhalten so:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{a}{6}\,\frac{4a^2\eta^2+9(\xi^2+\eta^2-a\xi)^2}{(\xi^2+\eta^2-a\xi)(3[\xi^2+\eta^2]-5a\xi+2a^2)} \\ \eta_1 &= -\frac{a}{6}\,\frac{2a\eta}{\xi^2+\eta^2-a\xi} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Aus diesen Gleichungen folgt die biquadratische rationale Verwandtschaft zwischen C und S, wie wir früher durch einfaches Resume gezeigt haben. Diese Verwandtschaft ist somit eine Cremona'sche[1]) Verwandtschaft und wir können jede solche biquadratische Transformation durch zwei quadratische ersetzen. Wir konnten ja statt vom Punktsysteme C direct auf das Punktsystem S, zuerst vom Punktsystem C auf das Punktsystem P mittelst einer quadratischen Transformation und vom Punktsysteme P auf das Punktsystem S wieder mittelst einer quadratischen Transformation übergehen. Es liegt somit ein interessantes einfaches Beispiel vor zu den Cremona'schen Transformationen.

Euler'sche Gerade.

5. Da wir nun die Coordinaten des Schwerpunktes und des Mittelpunktes des Umkreises für das Berührungsdreieck kennen, können wir die Coordinaten des Höhendurchschnitts $H(\alpha\beta)$, sowie auch des Mittelpunktes C' des Feuerbach'schen Kreises sogleich aufschreiben. Es ist nämlich

$$H\left\{\begin{aligned} \alpha &= 3\xi-2\xi_1 \\ \beta &= 3\eta-2\eta_1 \end{aligned}\right.$$

$$C'\left\{\begin{aligned} \alpha' &= \frac{3\xi-\xi_1}{2} \\ \beta' &= \frac{3\eta-\eta_1}{2} \end{aligned}\right.$$

1) Ueber die Cremona'sche Transformation sind die Arbeiten von A. Clebsch, M. Nöther, Rosanes, Clifford besonders aufzuführen. Siehe Dr. Em. Weyr: Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných Prag 1872, Salmon-Fiedler l. c. pg. 338, Clebsch-Lindemann Vorlesungen pg. 478, 489.

In diese Gleichungen sind nur die Werte für ξ, η, ξ', η' einzuführen, und wir bekommen sogleich die Coordinaten von H und C' als Functionen der Coordinaten des Poles P.

Fassen wir etwas allgemeiner die Aufgabe auf. Es sei λ das Teilverhältniss des Punktes M in Bezug auf die Punkte C und S, nämlich

$$\frac{CM}{SM} = \lambda$$

Die Coordinaten des Punktes M sind in diesem Falle

$$x_1 = \frac{\xi_1 - \lambda\xi}{1-\lambda}$$

$$y_1 = \frac{\eta_1 - \lambda\eta}{1-\lambda}$$

Führen wir nun die Werte für ξ, η, ξ_1, η_1 ein und schreiben:

$$K \equiv y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{\lambda-1} \cdot \frac{(4y^2+9x^2)K + 6\lambda x(x-a)\left(y^2 + \left[x+\frac{a}{2}\right]x\right)}{3x(x-a)K} \\ y_1 &= \frac{a}{\lambda-1} \cdot \frac{x(K-3ax)}{3xK} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Beschreibt nun der Pol P irgend eine Curve $f(x,y)=0$, so erhalten wir die Gleichung der vom Punkte M beschriebenen Curve, wenn wir aus den Gleichungen (16) und der Gleichung $f(x,y)=0$ die Coordinaten x, y des Poles P eliminiren.

Beschreibt nun P eine rationale Curve n-ter Ordnung, so beschreibt jeder Punkt der Geraden $\overline{SC}$, welche den Namen der Euler'schen Geraden führt, eine rationale Curve $4n$-ter Ordnung, ausgenommen $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, d. i. die Punkte s und S beschreiben eine rationale Curve $2n$-ter Ordnung.

Jeder Lage von P entspricht eine ganz bestimmte Euler'sche Gerade E, als Verbindungslinie $\overline{SC}$. Sind nun x_1, y_1 Coordinaten des veränderlichen Punktes der Geraden E, so ist

$$E \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a \\ y^2 + \left(x+\frac{a}{2}\right)x & -\frac{a}{2}y & y^2 + \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 \\ 4y^2 + 9x^2 & 2y(x-a) & -6x(x-a) \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

die Gleichung dieser Geraden. Beschreibt nun P die Curve

$$F(x, y) = 0 \tag{18}$$

so bekommen wir die Gleichung der Enveloppe von E, wenn wir aus den Gleichungen (17), (18) und aus

$$\begin{vmatrix} \frac{dE}{dx} & \frac{dE}{dy} \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \end{vmatrix} = 0$$

die Grössen x, y eliminiren, in der Form

$$f(x_1, y_1) = 0$$

Ist nun $F(x, y) = 0$ eine rationale Curve n-ter Ordnung, dann ist auch die Enveloppe von E eine rationale Curve und zwar der $4n$-ten Classe. Ihre Gleichung ist die gleich null gestellte Discriminante von (17), nachdem wir x, y in dieser Gleichung durch ihre Ausdrücke im Parameter ersetzt haben.

Aufgabe. Kann der Pol P eine Curve beschreiben für welche

$$SC = d = \text{constant}$$

wäre? Wir brauchen nur die Werte für ξ, η, ξ_1, η_1 in die Gleichung

$$(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 = d^2$$

einsetzen, womit sich sogleich die Gleichung der Polcurve ergibt. Dieselbe ist von der achten Ordnung und die entsprechenden Curven des Schwerpunktes S und des Mittelpunktes C sind von der sechszehnten Ordnung.

Enveloppe des Umkreises des Berührungsdreieckes.

7. Im Art. 3 fanden wir die Gleichung des Umkreises K eines dem Pole $P(x, y)$ entsprechenden Berührungsdreieckes.

$$K \equiv 3x(x-a)(\xi^2 + \eta^2) + a(9x^2 + 4y^2)\xi + 2ay(x-a)\eta - 4a^2y^2 = 0 \tag{19}$$

Beschreibt nun der Pol P eine Curve, deren Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

so ändert sich dieser Kreis der Lage und Grösse nach. Auf diese Art erhalten wir ein der Polcurve entsprechendes Kreissystem, und die Gleichung der Enveloppe dieser Kreise erhalten wir, wenn wir aus der Gleichung des Kreises $K = 0$, der Polgleichung $F(x, y)$, und der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{dK}{dx} & \frac{dK}{dy} \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

die Parameter x, y eliminiren.

Am einfachsten ist der Fall, wo die Polcurve eine rationale Curve ist; statt $F(x, y) = 0$, können wir hier schreiben

$$x = \frac{\varphi(t)}{f(t)}$$

$$y = \frac{\psi(t)}{f(t)}$$

wo φ, ψ, f ganze Functionen n-ten Grades des Parameters t sind. Die Gleichung des Kreises K ist hier von der Form

$$K \equiv \Phi(\xi, \eta, t) = 0$$

welche Gleichung von $2n$-tem Grade in t und quadratisch in ξ und η ist. Die gleich null gesetzte Discriminante dieser Gleichung in Bezug auf den Parameter t gibt die Gleichung der Enveloppe des Kreissystems, welcher der gegebenen rationalen Polcurve n-ter Ordnung entspricht.

Die besagte Discriminante ist $4(2n-1)$ten Grades in ξ und η, d. i. Enveloppe ist in diesem Falle eine Curve $4(2n-1)$-ter Ordnung. Den einfachsten Fall erhalten wir hier für $n = 1$, d. i. wenn der Pol eine Gerade beschreibt, wo die entsprechende Enveloppe eine Curve 4-ter Ordnung ist. Sei

$$y = bx + c$$

die Gleichung der Geraden, Gl. (20) lautet in diesem Falle:

$$\begin{vmatrix} \frac{dK}{dx} & \frac{dK}{dy} \\ -b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Statt zu differentiren und dann zu eliminiren, können wir umgekehrt früher aus $K = 0$ und der Gleichung der Polgeraden die Grösse y eliminiren und dann differentiren.

Die Elimination gibt:

$$K \equiv 3x(x-a)(\xi^2+\eta^2) + [9x^2 + 4(bx+c)^2]\xi + 2a(bx+c)(x-a)\eta - 4a^2(bx+c)^2 = 0$$

oder geordnet nach den Potenzen von x:

$$x^2 M + x N + P = 0 \tag{21}$$

wo

$$M \equiv 3(\xi^2 + \eta^2) + (9a + 4ab^2)\xi + 2ab\eta - 4a^2 b^2$$
$$N \equiv -3a(\xi^2 + \eta^2) + 8abc\xi + (2ac - 2a^2 b)\eta - 8a^2 bc$$
$$P \equiv 2ac(2c\xi - a\eta - 2ac)$$

Die Discriminante von (21) in Bezug auf x ist

$$N^2 - 4MP = 0 \tag{22}$$

die gesuchte Gleichung der Enveloppe.

Der veränderliche Kreis (21) berührt die Enveloppe (22) in zwei endlich gelegenen Punkten und in beiden imaginären Kreispunkten im Unendlichen, was schon aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} xM + N &= 0 \\ xN + P &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

erhellt, welche die Berührungspunkte bestimmen.

Die Verbindungslinie der endlich gelegenen Berührungspunkte ist die Chordale der Kreise, welche die Gleichungen (23) ausdrücken; ihre Gleichung lautet:

$$ax[Mx + N] + (x - a)(Nx + P) = 0$$

welche Gleichung man auch schreiben kann:

$$(aM + N)x^2 + Px - aP = 0$$

Nun ist

$$R_{m,n} \equiv aM + N = 0$$

die Chordale der Kreise $M = 0$ und $N = 0$, somit können wir die obige Gleichung schreiben

$$x^2 R_{mn} + (x - a)P = 0$$

und aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass alle Verbindungslinien der Paare der Berührungspunkte im Endlichen durch den Punkt $\overline{R_{mn}.P}$ hindurchgehen, d. i. sie bilden einen Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Schnittpunkt von P mit der Chordale der Kreise $M = 0$, $N = 0$ ist.

Der Mittelpunkt des veränderlichen Kreises K beschreibt einen Kegelschnitt, dessen Gleichungen:

$$\xi_1 = -a\frac{9x^2 + 4(bx + c)^2}{6x(x - a)}$$

$$\eta_1 = -a\frac{bx + c}{3x}$$

wo x den Parameter des veränderlichen Punktes dieses Kegelschnittes bedeutet.

Kehren wir nun zur Gleichung (22) zurück; ausgeschrieben lautet sie:

$$9a(\xi^2+\eta^2)^2+12(ab+c)(-4c\xi+a\eta)(\xi^2+\eta^2)+48ac(ab+2c)\xi^2$$
$$+72a^2c\xi\eta+(4ac^2+8a^2bc+4a^2b^2)\eta^2+144a^2c^2\xi=0 \quad (24)$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, dass die Enveloppe eine Curve vierter Ordnung ist, welche die imaginären unendlich fernen Kreispunkte zu Rückkehrpunkten hat, und die Ordinatenaxe im Coordinatenanfange berührt; somit ist die Enveloppe ein Descartes'sches Oval. Geht die Polgerade durch den Rückkehrpunkt der Cissoide, so ist $c=0$, und die Enveloppe zerfällt in zwei identische Kreise, deren Gleichung

$$\xi^2+\eta^2+\tfrac{2}{3}ab\eta=0$$

Schneller kommen wir zur Gleichung (24), wenn wir die Punkte der Polgerade parametrisch ausdrücken. Ist die Polgerade:

$$mx+ny-p=0$$

so ist

$$x=\frac{p}{m+nt}$$

$$y=\frac{pt}{m+nt}$$

und die Gleichung $K=0$ geht nach Einsetzung obiger Werte für x und y über in

$$t^2[4ap\xi-2a^2n\eta-4a^2p]+t[-3an\varrho^2+2a(p-am)\eta]$$
$$+[3(p-am)\varrho^2+9ap\xi]=0$$

wo der Kürze wegen

$$\varrho^2=\xi^2+\eta^2$$

Die Discriminante nach t gleich null gesetzt, nämlich

$$a[-3n\varrho^2+2(p-am)\eta]^2+24[-2p\xi+an\eta+2ap][(p-am)\varrho^2+3ap\xi]=0$$

gibt uns wieder die Gleichung der Enveloppe. Diese Gleichung stimmt natürlich mit der Gleichung (24) überein, wenn wir $m=-b$, $n=1$, $p=c$ setzen, d. i. von gleicher Form der Gleichung der Polgeraden ausgehen.

Da nun $M=0$, $N=0$, P[1]$=0$ Gleichungen dreier Kreise sind, welchen die imaginären unendlich fernen Kreispunkte somit gemeinschaftlich zukommen, folgt aus der Gleichung

1) $P=0$ besteht aus der Geraden

$$2c\xi-a\eta-2ac=0$$

und aus der unendlich fernen Geraden, auf welcher die unendlich fernen imaginären Kreispunkte liegen.

$$N^2 - 4MP = 0$$

der Enveloppe, dass diese Punkte Doppelpunkte und zwar Rückkehrpunkte sind, was wir schon aus der Form der Gleichung (24) erkannt haben.

Die Cissoide als Polcurve selbst.

Nehmen wir nun den Fall näher in Betracht, wo der Pol P die gegebene Cissoide selbst beschreibt. Zwei von den Scheiteln des Berührungsdreieckes fallen mit dem Pole P zusammen. Es sei nun

$$t = u_2 = u_3$$

der Parameter dieser zwei mit dem Pol zusammenfallenden Scheitel, und u_1 der dritte Scheitel des Berührungsdreieckes. Der Pol P ist somit der Tangentialpunkt von u_1; führen wir seine Coordinaten

$$x = \frac{a}{1+t^2}$$

$$y = \frac{a}{t(1+t^2)}$$

in die Gleichung (2) ein, so kennzeichnen wir den Pol als einen Punkt der Cissoide, die er bei veränderlichem Parameter t erzeugt. In diesem Falle ist:

$$\frac{3x}{2y} = \frac{3}{2}t$$

$$\frac{x-a}{2y} = -\frac{t^3}{2}$$

und die Gleichung (2) geht über in

$$u^3 - \frac{3}{2}tu^2 + \frac{t^3}{2} = 0$$

Da nun im Punkte P zwei Berührungspunkte zusammenfallen, muss t eine zweifache Wurzel dieser Gleichung sein. Scheiden wir den hierbezüglichen Factor $(u-t)^2$ aus, so erhalten wir

$$u + \frac{t}{2} = 0$$

Es ist somit der Parameter des dritten Berührungspunktes — der dritten Ecke des Berührungsdreieckes — gleich

$$u = u_1 = -\frac{t}{2}$$

Im engeren Sinne können wir auch hier vom Schwerpunkte reden. Wir erhalten hier für die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\xi = \frac{x_1 + 2x}{2}$$

$$\eta = \frac{y_1 + 2y}{2}$$

wo x, y die Coordinaten des Poles sind, dessen Parameter t, und x_1, y_1 die Coordinaten der dritten Ecke mit dem Parameter

$$u_1 = -\frac{t}{2}$$

Mit Rücksicht auf diese Werte erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3}{2}t \\ p_2 &= 0 \\ p_3 &= -\frac{t^3}{2} \end{aligned} \tag{25}$$

nach Kürzung mit dem Factor (t^2+1):

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{1+u_k^2} = 6\,\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+4)}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{u_k(1+u_k^2)} = -6\,\frac{t}{(t^2+1)(t^2+4)}$$

somit sind die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\begin{aligned} \xi &= 2a\,\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+4)} \\ \eta &= -2a\,\frac{t}{(t^2+1)(t^2+4)} \end{aligned} \tag{26}$$

Die Schwerpunktscurve ist somit für gegebene Cissoide als Polcurve eine rationale Curve vierter Ordnung. Dieselbe ist eine geschlossene Curve und hat im Anfangspunkte einen Rückkehrpunkt entsprechend dem Parameter $t = \infty$. Die unendlich fernen Punkte haben als Parameter

$$t_1 = \sqrt{-1}, \qquad t_2 = -\sqrt{-1}$$

$$t_3 = 2\sqrt{-1}, \qquad t_4 = -2\sqrt{-1}$$

Es bestimmen aber je zwei der Parameter, nämlich t_1 und t_4, dann t_2 und t_3 denselben Punkt und zwar den unendlich fernen imaginären Kreispunkt, d. h. die Curve hat die unendlich fernen imaginären Kreispunkte zu ihren Doppelpunkten. Dieselbe ist von der fünften Classe. Wir erhalten die Gleichung der Curve in der Form $F(\xi, \eta) = 0$, wenn wir den Parameter t aus der Gl. (26) eliminiren, nämlich

$$(\xi^2+\eta^2)^2-a\xi(\xi^2+\eta^2)+2a^2\eta^2=0$$

Was die Construction der Curve (Fig. 2) betrifft, so ist

$$t=\cot(POM)=\frac{OM}{PM}$$

verlängern wir PM über M bis zum Punkte Q, so dass $MQ=2PM$ ist; dann gilt

$$\frac{OM}{QM}=-\frac{1}{2}\frac{OM}{PM}=-\frac{t}{2}$$

Die Verbindungslinie $\overline{OQ}$, deren Gleichung

$$-\frac{t}{2}y=x$$

schneidet die Cissoide im Punkte u_1, dessen Parameter $u_1=-\frac{t}{2}$; $\overline{Pu_1}$ ist Tangente der Cissoide in u_1, und der Schwerpunkt bestimmt die Relation

$$\frac{PS}{u_1S}=-\frac{1}{2}$$

Auf diese Weise können wir zu jedem Punkte P der Cissoide den entsprechenden Punkt S, und somit auch die Ortscurve von S construiren.

Für den Flächeninhalt der Curve (S) erhalten wir

$$p=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta d\xi=16a^2\int_0^\infty\frac{t^2(t^4+4t^2+6)}{(t^2+4)^2(t^2+1)^3}dt$$

Nun ist

$$\int_0^\infty\frac{dt}{(t^2+4)^n}=\frac{2}{4^n}\int_0^\infty\frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

$$\int_0^\infty\frac{dt}{(t^2+1)^n}=I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$

somit

$$p=\frac{16a^2}{27}\left[-\frac{9}{4}I_3+\frac{17}{4}I_2-I_1\right]=\tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Bemerken wir nun, dass die Fläche, welche die Cissoide mit ihrer realen Asymptote begrenzt, gleich $3\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist, so erkennen wir, dass die Fläche der Curve (S) ein neuntel der Fläche der Cissoide ist.

Der Umkreis des Berührungsdreieckes geht hier über in einen Kreis, der die Cissoide im Pole P berührt und durch dessen Tangentialpunkt hindurchgeht.

Für die Gleichung dieses Kreises ist mit Rücksicht auf die Werte (25):

$$K_t \equiv 3t^4(\xi^2+\eta^2)-a(4+9t^2)\xi-2at^3\eta+4a^2=0 \tag{27}$$

Den weiteren Schnittpunkt von K_t mit der Cissoide erhalten wir leicht, denn die Summe der Parameter der Schnittpunkte eines Kreises mit der Cissoide ist gleich null. Somit ist

$$u'=-\frac{3t}{2}=-3u$$

der Parameter dieses vierten Schnittpunktes.

Aus der Gleichung $K_t=0$ folgt, dass durch jeden Punkt in der Ebene vier berührende Kreise gehen, und jeder von ihnen schneidet die Cissoide im Punkte, der den Berührungspunkt des betreffenden Kreises zu seinem Tangentialpunkt hat.

Wir fanden früher, dass der die Cissoide im Punkte t berührende Kreis K_t dieselbe in weiteren zwei Punkten schneidet, deren Parameter $-\frac{t}{2}$, $-\frac{3}{2}t$ sind. Ihre Verbindungslinie hat zur Gleichung:

$$6t^3y+(4+7t^2)x-4a=0$$

und die Enveloppe dieser Verbindungslinien ist eine zur Cissoide affine Curve. Der Durchschnitt der Verbindungslinie mit der Cissoide ist ein zum Pole P in Bezug auf die X-Achse symmetrischer Punkt; sein Parameter somit gleich $2t$.

Die Coordinaten des Mittelpunktes von $K_t=0$ sind

$$\begin{aligned}\xi_1&=\frac{a}{2}\cdot\frac{4+9t^2}{3t^4}\\ \eta_1&=\frac{a}{3t}\end{aligned} \tag{28}$$

Beschreibt der Pol die gegebene Cissoide, so beschreibt der Mittelpunkt des Umkreises des ihm zugeordneten Berührungsdreieckes eine rationale Curve vierter Ordnung und fünfter Classe (mit einem dreifachen Punkte im Unendlichen, der durch Vereinigung zweier Doppelpunkte und eines Rückkehrpunktes entstanden ist). Ihre Gleichung erhalten wir in der Form $F(\xi,\eta)$ durch Elimination von t aus den Gleichungen (28); sie lautet:

$$27\eta_1^2(a^2+4\eta_1^2)-2a^3\xi_1=0$$

Was die Construction des Mittelpunktes C betrifft, construiren wir zuerst im Punkte P der Cissoide eine Tangente, welche die Curve im Punkte u_1 schneidet. Die Normale in P schneidet die Senkrechte im Halbirungspunkte von $\overline{Pu_1}$ im gesuchten Punkte C.

II.

Fusspunktetripel.

Die Gleichung der Normalen an die Cissoide im Punkte u lautet

$$y-\frac{a}{u(1+u^2)}=-\frac{2u^3}{1+3u^2}\left(x-\frac{a}{1+u^2}\right)$$

oder:

$$(1+u^2)[u(1+3u^2)y+2u^4x-a(1+2u^2)]=0$$

Kürzen wir nun mit dem Factor $(1+u^2)$, welcher besagt, dass die Cissoide durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte hindurchgeht, was die Normalenanzahl um zwei reducirt, so erhalten wir als Gleichung der Normalen

$$N\equiv u(1+3u^2)y+2u^4x-a(1+2u^2)=0 \tag{1}$$

Diese Gleichung gibt eine Relation zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes (xy) der Normalen und dem Parameter ihres Fusspunktes an. Nun ist die Gleichung (1) in Bezug auf den Parameter vom vierten Grade, woraus folgt, dass wir aus einem beliebigen Punkte der Ebene der Cissoide auf dieselbe vier Normalen fällen können.

Die Coordinaten der Normalen sind

$$\xi=-\frac{2u^4}{a(1+2u^2)}$$
$$\eta=-\frac{u(1+3u^2)}{a(1+2u^2)} \tag{2}$$

welche Gleichungen bei veränderlichem u die Gleichungen der Evolute der Cissoide abgeben.

Den Berührungspunkt der Normalen mit der Evolute, d. i. den Krümmungsmittelpunkt des Punktes u der Cissoide erhalten wir aus den Gleichungen $N=0$, $\frac{dN}{du}=0$, nämlich:

$$x=-a\,\frac{6u^2+1}{6u^4}$$
$$y=\frac{4a}{3u} \tag{3}$$

Es ist somit die Evolute der Cissoide eine rationale Curve vierter Ordnung und vierten Grades; ihre Gleichung in Form $F(x,y)$ lautet:

$$512a^3x+288a^2y^2+27y^4=0 \tag{4}$$

Liegt der Pnnkt (x, y) anf der Cissoide, nnd ist u' sein **Parameter**, so repräsentirt dieser Pnnkt u' selbst einen Fnsspnnkt. **Aus** einem Punkte der Cissoide können wir somit nur drei Normalen **fällen**; die Parameter dieser Fusspnnkte erhalten wir, wenn wir die **Werte** für x, y in die Normalengleichnng einführen. Wir erhalten so:

$$u(1+3u^2)+2u^4u'-(1+2u^2)(1+u'^2)u'=0 \tag{5}$$

Nach Kürzung mit dem Factor $u-u'$, welcher dem Pnnkte x, y als Fusspunkte selbst entspricht, können wir die Gleichnng schreiben

$$2u'u^3+(3+2u'^2)u^2+u'u+(1+u'^2)=0 \tag{6}$$

Diese Gleichnng gibt uns die Parameter der aus dem Pnnkte u' gefällten Normalen (deu Punkt u' nicht mitgerechnet, da wir mit diesbezüglichem Factor gekürzt haben); zwischen den Parametern bestehen folgende Relationen:

$$\begin{aligned} p_1 &= \Sigma u_1 = -\frac{3+2u'^2}{2u'} \\ p_2 &= \Sigma u_1 u_2 = -\tfrac{1}{2} \\ p_3 &= \Sigma u_1 u_2 u_3 = -\frac{1+u'^2}{2u'} \end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichung (6) hat nur eine reale Wurzel.

Dass die Gleichnng (6) immer zwei complexe Wurzeln **hat**, können wir so beweisen, indem wir zeigen, dass das Dreieck der Fusspunkte imaginär ist. Sind nnn u_1, u_2, u_3 die Wurzeln der Gleichnng (6), so erhalten wir für das Dreieck $\Delta = u_1u_2u_3$:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} \frac{a}{1+u_1^2} & \frac{a}{u_1(1+u_1^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_2^2} & \frac{a}{u_2(1+u_2^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_3^2} & \frac{a}{u_3(1+u_3^2)} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{a^2p_1}{\prod\limits_{h=1}^{3} u_h(1+u_h^2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

Nnn ist:

$$\prod_{h=1}^{3} u_h(1+u_h^2) = p_3([1-p_2]^2+[p_1-p_3]^2)$$

und nach einiger Reduction

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 3p_3 \\ -p_1^2+4p^2 & 3p_3 & p_1p_3 \end{vmatrix}$$

somit mit Rücksicht auf die Gleichungen (7):

$$| 1, u, u^2 |^2 = -\frac{90+313u'^2+470u'^4+202u'^6+16u'^8}{16u'^2}$$

Da nun das Quadrat der Determinante für jeden Wert von u' negativ ist, ist der Wert der Determinante selbst imaginär, somit auch Δ. Nun hat die Gleichung (6) immer eine reale Wurzel, die übrigen müssen komplex sein.

Schwerpunkt des Fusspunktsdreiecks.

Der Schwerpunkt des Fusspunktsdreieckes ist reell, trotzdem das Dreieck selbst imaginär ist, denn, sind u_2, u_3 die Parameter der imaginären Fusspunkte und zwar

$$u_2 = p + iq$$
$$u_3 = p - iq$$

so ist:

$$x_2 = f(p+iq) = P + iQ$$
$$x_3 = f(p-iq) = P - iQ$$

somit

$$\xi = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_1+2P}{3}$$

reell, dasselbe gilt auch für η. Führen wir somit in die Gleichungen

$$\xi = \frac{\Sigma x}{3}, \quad \eta = \frac{\Sigma y}{3}$$

für x_h und y_h die Werte, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (7):

$$\xi = \frac{a}{3}\frac{3+4u^2}{1+u^2}$$
$$\eta = -\frac{a}{3}\frac{u^3}{(1+u^2)(4+u^2)} \qquad (8)$$

Verschieben wir das Coordinatensystem auf den Punkt $O'(a, 0)$ als Anfangspunkt, so erhalten wir für (8):

$$\xi_1 = \frac{a}{3}\frac{u^2}{1+u^2}$$
$$\eta_1 = -\frac{a}{3}\frac{u^3}{(1+u^2)(4+u^2)} \qquad (9)$$

Die Schwerpunktscurve ist eine geschlossene Curve; ihre unendlich fernen Punkte sind nämlich imaginär, denn ihre Parameter sind $\pm i$, $\pm 2i$; ihre Gleichung in Form $F(\xi, \eta) = 0$ ist:

$$9\xi_1^2(\xi_1^2+\eta_1^2)-3a\xi_1(\xi_1^2+24\eta_1^2)+16a^2\eta_1^2=0 \qquad (10)$$

Wir erkennen leicht, dass die Curve zwischen $\xi_1=0$ und $\xi_1=\frac{a}{3}$ liegt, und ihr Flächeninhalt ist

$$p=\frac{4a^2}{9}\int_0^\infty \frac{u^4\,du}{(1+u^2)^3(4+u^2)}=\frac{7}{3}\pi\left(\frac{a}{18}\right)^2$$

Mittelpunkt des Umkreises.

Wir fanden (1, 9) für die Gleichung des Umkreises, der einem Dreiecke umgeschrieben ist, dessen Ecken auf der Cissoide liegen:

$$p_1(\xi^2+\eta^2)+\frac{a}{p_3}(1+p_1^2-p_2)\xi-\frac{a}{p_3}(p_1p_2-p_3)\eta-\frac{a^2}{p_3}=0$$

Drücken wir nun mittelst der Gleichungen (7) die Bedingung aus, dass das Dreieck ein Fusspunktsdreieck ist, so erhalten wir:

$$(1+u^2)(3+2u^2)(\xi^2+\eta^2)+a[9+14u^2+4u^4]\xi+au\eta-4a^2u^2=0 \quad (11)$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind

$$\xi_2=-\frac{a}{2}\frac{9+14u^2+4u^4}{(1+u^2)(3+2u^2)}$$

$$\eta_2=-\frac{a}{2}\frac{u}{(1+u^2)(3+2u^2)}$$

Verlegen wir den Anfangspunkt in den Punkt $(-a, 0)$, so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned}\xi_2'&=-\frac{a}{2}\frac{3+4u^2}{(1+u^2)(3+2u^2)}\\ \eta_2'&=-\frac{a}{2}\frac{u}{(1+u^2)(3+2u^2)}\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Der Ort der Mittelpunkte der Umkreise ist somit eine rationale Curve vierter Ordnung und wie wir uns leicht überzeugen können fünfter Classe. Sie besitzt nämlich, ausser zweien unendlich fernen Doppelpunkten in den Kreispunkten, einen realen Rückkehrpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten O'. Die ganze Curve ist endlich gelegen auf linker Seite der Y-Achse von $\xi_2'=0$ bis $\xi_2'=-\frac{a}{2}$.

Das Kreissystem $K_u=0$ bei veränderlichem u hüllt eine Curve zehnter Ordnung ein.

XX.

Ueber einige Winkel- und Längenrelationen am Dreiecke.

Von

K. Zahradnik.

Es sei C_3 der Mittelpunkt des grössten Kreises, welcher einen gegebenen Kreis K im Punkte D_3 und seine Sehne A_1A_2 in ihrem Halbirungspunkte B_3 berührt. Was den Punkt C_3 betrifft, so nehmen wir an, dass er nicht auf derselben Seite der Sehne mit dem Mittelpunkte S von K liegt; den Mittelpunkt solch grössten Kreises, der mit S an derselben Seite von $\overline{A_1A_2}$ liegt, bezeichnen wir mit C_3' und sein Berührungspunkt mit K sei D_3'. Dass SB_3 in $\overline{D_3D_3'}$ liegt, ist klar. Ferner bezeichnen wir mit K_3 den Kreis mit dem Mittelpunkte C_3, mit $\varkappa_3$ seinen Radius und mit U_3, F_3 seinen Umfang und seine Fläche. Aehnlich mit K_3' den Kreis vom Mittelpunkte C_3' etc. Ist nun R der Halbmesser des Kreises K, so ist

$$\varkappa_3 + \varkappa_3' = R \tag{1}$$

$$U_3 + U_3' = U \tag{2}$$

$$F - F_3 - F_3' = \tfrac{1}{2}\, U_3 \,.\, U_3' \tag{3}$$

Die letzten zwei Relationen besagen uns, dass im Dreiecke $D_3A_1D_3'B_3$ mit den Halbkreisen D_3B_3, B_3D_3', $D_3'AD_3$ als Seiten, die Summe zweier seiner Seiten der dritten grössten Seiten gleich ist, und dass sein Flächeninhalt gleich ist dem Flächeninhalte eines Rechteckes, dessen Seiten U_3 und $\varkappa_3'$ oder U_3' und $\varkappa_3$ sind.

Dieses Resultat ist von der Grösse der Sehne A_1A_2 unabhängig, und wir konnten sagen: beschreiben wir über den Abschnitten, in welche ein Punkt B_3 den Durchmesser D_3D_3' innerlich teilt, Kreise etc.

Digitized by Google

II.

2. Nehmen wir nun an, dass die Sehne $A_1 A_2$ eine Function ihrer Richtung ist; dann beschreibt der Punkt C_3 bezüglich C_3' eine Curve (C_3) bezüglich (C_3'), welche wir nun näher untersuchen wollen.

Schreiben wir für jetzt $\varkappa$ statt R als den Halbmesser des Kreises K. Nach der Annahme ist

$$A_1 A_2 = f(\varphi) \tag{1}$$

die Polarcoordinaten von C_3 mit S als Pol seien ϱ, θ, so ist (Fig. 1)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta \tag{2}$$

wegen

$$B_3 C_3 = \varkappa_3 = \sqrt{\varkappa^2 - \tfrac{1}{4} f^2(\varphi)}$$

ist die Polargleichung von (C_3)

$$\varrho = \frac{\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 - \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]^2}}{2} \tag{3}$$

Was den Ort von C_3' betrifft, ist wegen $\varphi = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$

$$\varrho_1 = \frac{\varkappa - \sqrt{\varkappa^2 - \frac{1}{4}\left[f\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}}{2}$$

dass der Ort (C_3) mit dem Orte (C_3') congruent ist, erkennen wir schon aus der Gleichungsform. Ferner ersehen wir aus (3), dass die Curve (C_3) eine Konchoide von der Curve (E)

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - \tfrac{1}{4}\left[f\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]^2}$$

ist, deren Vectoren wir nur um $\frac{\varkappa}{2}$ zu verlängern haben, um (C_3) zu bekommen.

Dass $2\varkappa > f\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ d. i. $2\varkappa > A_1 A_2$ sein muss, ist geometrisch ersichtlich.

3. Als besonderen Fall wollen wir annehmen

$$f(\varphi) = 2m \sin\varphi + 2n \cos\varphi$$

Hier ist (E) Fusspunktscurve einer Ellipse der Halbaxen

$$a = \frac{\varkappa}{2}$$

$$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{\varkappa^2 - m^2 - n^2}$$

und deren grosse Axe zur Coordinatenaxe um α geneigt ist, dessen Grösse aus

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$$

folgt. Somit ist (C_3) in diesem Falle eine Konchoide der Fusspunktscurve der Ellipse. Es ist in diesem Falle $x^2 > m^2 + n^2$, was eine kleine Erwägung sogleich gibt.

Im Falle

$$f(\varphi) = n\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}$$

haben wir es wieder mit einer Konchoide der Fusspunktscurve einer Ellipse zu tun, deren Hauptaxe mit der Coordinatenaxe den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschliesst. Möge noch der Fall

$$f(\varphi) = \sqrt{m^2\sin^2\varphi + n^2\cos^2\varphi}$$

erwähnt werden. (C_3) ist wieder eine Konchoide der Fusspunktscurve einer Ellipse, deren Hauptaxe mit der Polaraxe zusammenfällt; die Halbaxen der Ellipse sind hier

$$a = \tfrac{1}{4}\sqrt{4x^2 - m^2}, \qquad b = \tfrac{1}{4}\sqrt{4x^2 - n^2}$$

Die Anzahl der Beispiele lässt sich leicht fortsetzen.

III.

Es sei K ein Umkreis des Dreieckes $A_1A_2A_3$; über der Seite A_1A_2 als Sehne construiren wir nach (1) zwei Kreise K_3, K_3' mit den Mittelpunkten C_3[1]), C_3' (Fig. 2), welche die Seite A_1A_2 im Punkte B_3 berühren. Aehnlich für die Seiten A_2A_3, A_3A_1 mit cyklischer Vertauschung der Indices. Den Flächeninhalt des Dreieckes $A_1A_2A_3$ bezeichnen wir mit $\varDelta_a$, den Winkel bei A_h mit α_h und die gegenüberliegende Seite mit a_h. Der Halbmesser des Inkreises von $\varDelta_a$ sei r, und r_h der Halbmesser des die Seite a_h aussen berührenden Inkreises. Die Flächeninhalte der Dreiecke $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $C_1'C_2'C_3'$ werden wir mit $\varDelta_b$, $\varDelta_c$, $\varDelta_c'$ bezeichnen.

Relationen am $\varDelta_a$.

4. Die Verbindungslinie SA_h teilt den Winkel α_h in zwei Teile, welche wir mit β und mit Index des beiliegenden Scheitels bezeichnen werden. So z. B. $SA_2A_1 = \beta_1$ u. s. w. Es besteht somit

1) Der Mittelpunkt des Berührungskreises, der ausserhalb des Dreieckes $A_1A_2A_3$ liegt, sei C_h.

$$\beta_h + \beta_\varkappa = \alpha_i, \qquad h \gtrless \varkappa \gtrless i = 1, 2, 3$$

woraus

$$\sum_{h=1}^{3} \beta_h = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha_h + \beta_h = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

Der Kürze wegen sei

$$2s = \Sigma a, \quad 2\sigma = \Sigma \sin\alpha$$

somit wegen

$$a_h = 2R\sin\alpha_h \tag{2}$$

$$\frac{s}{\sigma} = 2R, \quad \Sigma\sin\alpha = \frac{s}{R} \tag{3}$$

5. Aus dem verallgemeinerten Pythagoreischen Satze

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos\alpha_1$$

erhalten wir (2):

$$\sin^2\alpha_1 = \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3 - 2\sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos\alpha_1$$

woraus durch cyklische Vertauschung der Indices und Summation:

$$\Sigma\sin^2\alpha = 2\Pi\sin\alpha\,\Sigma\cot\alpha \tag{I}$$

Mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$\Sigma\sin^2\alpha = 2(1 + \Pi\cos\alpha)$$

können wir dieselbe schreiben

$$\Sigma\cot\alpha = \Pi\cot\alpha + \Pi\operatorname{cosec}\alpha \tag{II}$$

wo sich die Summation und Multiplication wie auch im folgenden auf die drei Winkel des Dreieckes erstreckt.

6. Die Formel

$$a_3 = a_1\cos\alpha_2 + a_2\cos\alpha_1$$

geht über nach (2) in

$$\sin\alpha_3 = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\alpha_1$$

woraus wir wieder durch cyklische Vertauschung der Indices und Summation erhalten

$$\Sigma\sin\alpha = \Sigma\sin\alpha_h\cos\alpha_\varkappa \qquad h \gtrless \varkappa = 1, 2, 3 \tag{III}$$

oder

$$\Sigma\sin(\alpha_h + \alpha_\varkappa) = \Sigma\sin\alpha_h\cos\alpha_\varkappa$$

7. Für den Flächeninhalt des Dreieckes gelten bekanntlich:

$$\Delta_a = \frac{a_1 a_2 a_3}{4R} = \frac{a_h a_\varkappa}{2}\sin\alpha_i \qquad h \gtrless \varkappa \gtrless i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

$$\varDelta_a = \sqrt{s(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)} \tag{5}$$

$$= rs = r_1(s-a_1) = r_2(s-a_2) = r_3(s-a_3) \tag{6}$$

$$= \frac{h_\varkappa a_\varkappa}{2} \tag{7}$$

Aus (5) und (6) folgt der Satz von Mahien:

$$rr_1r_2r_3 = \varDelta_a^2 \tag{8}$$

Aus der Gleichung (4) mittelst (2) folgt

$$\varDelta_a = 2R^2\,\Pi \sin\alpha \tag{9}$$

Nun ist aber

$$\varDelta_a = A_1A_2S + A_2A_3S + A_3A_1S_1$$

somit wegen

$$\text{Wkl. } A_hSA_\varkappa = 2\alpha_i \qquad h \gtrless \varkappa \gtrless i = 1, 2, 3$$

$$\varDelta_a = \frac{R^2}{2}\,\Sigma \sin 2\alpha = R^2\,\Sigma \sin\alpha\cos\alpha \tag{10}$$

Vergleichen wir nun (9) und 10), so erhalten wir

$$4\Pi \sin\alpha = \Sigma \sin 2\alpha \tag{IV}$$

oder

$$2\Pi \sin\alpha = \Sigma \sin\alpha\cos\alpha \tag{IV'}$$

Aus der ersten Gleichung (6) folgt

$$\varDelta_a = Rr\,\Sigma \sin\alpha \tag{11}$$

somit wegen (10):

$$2r\,\Sigma \sin\alpha = R\,\Sigma \sin 2\alpha \tag{12}$$

Aus der Formel (7) erhalten wir

$$2\varDelta_a = h_\varkappa a_\varkappa = 2h_\varkappa R \sin\alpha_\varkappa$$

somit:

$$\frac{1}{h_\varkappa} = \frac{R}{\varDelta_a} \sin\alpha_\varkappa \tag{13}$$

woraus wieder

$$\Sigma \frac{1}{h_\varkappa} = \frac{R}{\varDelta_a}\,\Sigma \sin\alpha$$

und somit wegen (11):

$$\sum_{\varkappa=1}^{3} \frac{1}{h_\varkappa} = \frac{1}{r} \tag{14}$$

Multipliciren wir die Gleichungen (13) für $\varkappa = 1, 2, 3$, erhalten wir

$$\frac{1}{h_1h_2h_3} = \frac{R^3}{\varDelta_a^3}\,\Pi \sin\alpha$$

welche Relation mit Rücksicht auf (9) in

$$2\varDelta_a^2 = Rh_1h_2h_3 \tag{15}$$

übergeht. Vergleichen wir nun dies Resultat mit der Gleichung (8), so erhalten wir

$$Rh_1h_2h_3 = 2rr_1r_2r_3 \tag{16}$$

Aus den Gleichungen (6) folgt:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{r_k} = \sum_{k=1} \frac{s-a_k}{\Delta_a} = \frac{s}{\Delta_a}$$

was den Satz von Steiner[1])-Bobilier ausdrückt, nämlich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \tag{17}$$

Ferneres erhalten wir aus den Gleichungen (6)

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = \Delta_a\left(\frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \frac{1}{s-a_3} - \frac{1}{s}\right)$$

nun ist aber wegen $s = \Sigma a$ der Ausdruck in den Klammern gleich

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{\Delta_a^2} = \frac{4R}{\Delta_a}$$

womit sich der zweite Satz von Bobilier[2]) ergibt:

$$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r \tag{18}$$

Aus den Gleichungen (11) und (12) folgt:

$$\frac{r}{2R} = \frac{\Pi \sin\alpha}{\Sigma \sin\alpha}$$

was mit Hülfe der bekannten Relation

$$\Sigma \sin\alpha = 4\Pi \cos\frac{\alpha}{2}$$

in

$$\frac{r}{R} = 4\Pi \sin\frac{\alpha}{2} \tag{19}$$

übergeht.

8. Es sei $SB_k = \varrho_k$, wo

$$\varrho_k = R\sin\beta_k = R\cos\alpha_k = \frac{a_k}{2}\cot\alpha_k \tag{20}$$

Für den Flächeninhalt von Δ_b erhalten wir:

$$\Delta_b = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\varrho_k\varrho_x \sin B_k S B_x \qquad h \gtrless x = 1, 2, 3$$

Nun ist

$$\text{Wkl. } B_k S B_x = \pi - \alpha_i, \qquad \Delta_a = 4\Delta_b$$

somit

$$\Delta_a = R^2\,\Pi\cos\alpha\,\Sigma\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

was mit (9) verglichen gibt:

---

1) J. Steiner's Werke I. Bd. pg. 214.

2) Erschien in Gergonne-Annales des math. Conf. Steiner l. c.

$$\Pi \operatorname{tg}\alpha = \Sigma \operatorname{tg}\alpha \tag{V}$$

oder wegen (IV'):

$$\Sigma \sin\alpha\cos\alpha = 2\Pi\cos\alpha\,\Sigma\operatorname{tg}\alpha \tag{VI}$$

Relationen am Δ_c.

9. Für ϱ_h gilt auch

$$\varrho_h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_h}{2}\right)^2}$$

ferner ist (Fig. 1)

$$\overline{B_h C_h} = \varkappa_h = \frac{R - \varrho_h}{2} = \frac{R}{2}(1 - \cos\alpha_h)$$

$$\varkappa_h' = \varkappa_h + \varrho_h = \frac{R + \varrho_h}{2} = \frac{R}{2}(1 + \cos\alpha_h)$$

wo

$$\varkappa_h' = B_h C_h' = SC_h$$

Für den Flächeninhalt von Δ_c erhalten wir

$$\Delta_c = \tfrac{1}{2}\Sigma\varkappa_1'\varkappa_2'\sin\alpha_3 = \frac{R^2}{8}\Sigma(1+\cos\alpha_1)(1+\cos\alpha_2)\sin\alpha_3$$

$$= \frac{R^2}{2}\Sigma\cos^2\frac{\alpha_1}{2}\cos^2\frac{\alpha_2}{2}\sin\alpha_3 = R^2\Pi\cos^2\frac{\alpha}{2}\,\Sigma\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \tag{21}$$

Es ist aber auch

$$\Sigma\cos^2\frac{\alpha_1}{2}\cos^2\frac{\alpha_2}{2}\sin\alpha_3 = 2\,\Pi\cos\frac{\alpha}{2}\,\Sigma\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2}$$

woraus wegen

$$\Sigma\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2} = \frac{3+\Sigma\cos\alpha}{4} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

folgt:

$$\Delta_c = \frac{R^2}{2}\,\Pi\cos\frac{\alpha}{2}\,\Sigma\cos^2\frac{\alpha}{2} \tag{22}$$

Vergleichen wir nun die Resultate (21) und (22), so erhalten wir

$$2\Pi\cos\frac{\alpha}{2}\,\Sigma\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \Sigma\cos^2\frac{\alpha}{2} \tag{VII}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\Sigma\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\left(1 + \Pi\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

somit können wir (VII) schreiben:

$$\Sigma\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \Pi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \Pi\sec\frac{\alpha}{2} \tag{VIII}$$

Bemerkung: Sind die Dreiecke Δ_a, Δ_c nicht in einer besonderen Lage zu einander?

Relationen am Δ_c'.

10. Für den Flächeninhalt des Dreieckes Δ_c' erhalten wir:

$$\Delta_c' = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\varkappa_1\varkappa_2 \sin\alpha_3 = \frac{R^2}{2}\,\Sigma\,\sin^2\frac{\alpha_1}{2}\sin^2\frac{\alpha_2}{2}\sin\alpha_3$$

$$= R^2\,\Pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\Sigma\cot\frac{\alpha}{2} \tag{23}$$

oder wegen

$$4\,\Sigma\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_3}{2} = \Sigma\sin\alpha = 4\,\Pi\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Delta_c' = R^2\,\Pi\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{R^2}{8}\,\Pi\sin\alpha \tag{24}$$

Durch Vergleichung der Formeln (23) und (24) ergibt sich:

$$\Sigma\cot\frac{\alpha}{2} = \Pi\cotg\frac{\alpha}{2} \tag{IX}$$

Ferner folgt aus (24) mit Rücksicht auf (9):

$$\Delta_a = 16\,\Delta_c'$$

ähnlich aus (21) und (24):

$$\frac{\Delta_e}{\Delta_c'} = \Sigma\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\Pi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Die Dreiecke $\Delta_d = D_1D_2D_3$ und $\Delta_d' = D_1'D_2'D_3'$ sind congruent. Ihr Flächeninhalt ist

$$\Delta_d = \frac{R^2}{2}\,\Sigma\sin\alpha$$

somit gilt wegen (10) und (12):

$$\frac{\Delta_d}{\Delta_a} = \frac{R}{2r} = \frac{\Sigma\sin\alpha}{\Sigma\sin 2\alpha}$$

IV.

11. Im Artikel 8 zeigten wir, dass

$$SB_h = \varrho_h = R\cos\alpha_h$$

somit gilt

$$\Sigma\varrho = R\,\Sigma\cos\alpha = R + 4R\,\Pi\sin\frac{\alpha}{2}$$

und wegen (19):

$$\Sigma\varrho = R + r$$

12. Nach dem Artikel 7 und 9 besteht

$$U_i = 2\pi x_i = U \sin^2\frac{\alpha_i}{2}$$

$$U_i' = 2\pi x_i' = U \cos^2\frac{\alpha_i}{2}$$

somit:

$$U_i' + U_i = U$$

$$U_i' - U_i = U\cos\alpha_i = 2\pi\varrho_i$$

Durch Snmmation erhalten wir

$$\Sigma(U_i' - U_i) = 2\pi R + 2\pi r$$

nämlich der Unterschied der Umfänge der Kreise um C und C' (Fig. 1) ist gleich dem Umfange des aus S beschriebenen und beide Kreise gemeinschaftlich in B berührenden Kreise; die Summe der Unterschiede der Umfänge der Kreise K_i und K_i' ist gleich der Snmme der Umfänge des Umkreises und Inkreises.

Ferner gilt

$$F_i' - F_i = \pi(x_i'^2 - x_i^2) = \pi R \varrho_i = F.\cos\alpha_i$$

somit

$$\Sigma(F_i' - F_i) = \pi R^2 + \pi R r$$

Endlich sei noch nachstehende Relation aufgeführt:

$$\frac{F_i' - F_i}{F} = \cos\alpha_i = \frac{U_i' - U_i}{U}$$

somit ist

$$\frac{F_i' - F_i}{U_i' - U_i} = \frac{F}{U} = \frac{R}{2}$$

für $i = 1, 2, 3$, d. i.: Das Vorhältniss der Unterschiede der Flächeninhalte und Umfänge der Kreise K_i' und K_i, welche wir nach Art. 1. über einer Sehne construiren, ist gleich der Hälfte des Halbmessers des gegebenen Kreises. So ist in der Fig. 3 der Unterschied $F_i - F$ gleich dem schraffirten Teile und $U_i' - U_i$ gleich dem Umfange des aus dem Mittelpunkte S die Sehne berührend gelegten Kreises.

XXI.

Ueber magische Quadrate.

Von

Felix Clauss.

Die Aufgabe $x.x$ Zahlen von $1p - x^2p$ (wobei p ein beliebiger Factor) in ein Quadrat von $x.x$ Feldern so einzuzeichnen, dass die Summe aller Glieder je einer der x wagerechten oder senkrechten Reihen oder einer der beiden Diagonalen dieselbe ist, zerfällt nach dieser Methode in zwei Hauptgruppen, je nachdem die Basis x eine gerade oder ungerade ist.

Die Grösse der jedesmaligen Summe bestimmt sich, da x Reihen vorhanden, mit Hilfe der arithmetischen Progressionen nach der Formel: $S = \frac{1p + x^2p}{2} \cdot \frac{x^2}{x}$ oder: $S = \frac{x}{2}(1 + x^2)p$. Der Einfachheit halber soll in folgenden Ausführungen der constante Factor p, den man ja jedem Endergebniss nur anzufügen hat, weggelassen werden. Die Aufstellung der Zahlen geschieht nun vollständig symmetrisch.

I. Die Basis x eine gerade Zahl.

Das erste Glied der ersten wagerechten Reihe heisst 1; das letzte x. Demnach lautet in ders. Reihe das zweite 2; das vorletzte $x - 1$, das dritte 3 u. s. w. Das erste Glied der zweiten (wager.) Reihe lautet demnach $x + 1$; das letzte $2x$; die übrigen Glieder ders. Reihe: $x + 2$; $x + 3$ u. s. w. $2x - 2$; $2x - 1$. Ebenso verhalten sich die folgenden Reihen. — In der letzten heisst das letzte Glied x^2; demnach das vorletzte $x^2 - 1$; ... das $x$letzte (d. h. das erste) Glied der letzten Reihe $x^2 - x + 1$ u. s. w. Ebenso findet man das letzte Glied der vorletzten Reihe $x^2 - 1x$; das erste Glied ders. Reihe $x^2 - 2x + 1$ u. s. w. u. s. w. — (vergl. die am Schlusse angefügte Tafel).

Aus dieser völlig symmetrischen Aufstellung der $x.x$ Zahlen ergiebt sich sofort:

I). Je zwei sich diametral gegenüberliegende Zahlen betragen zusammen $1+x^2$. Mithin ist die Summe aller Glieder jeder von beiden Diagonalen, da jede x Glieder hat, je $\frac{x}{2}(1+x^2)$.

IIa). Die Summe des ersten und letzten, des zweiten und vorletzten u. s. w. Gliedes der ersten wager. Reihe betr. jedesmal $1+x$; die Summe je ders. Glieder der letzten wager. Reihe jedesm. $2x^2-x+1$; mithin die Summe je zwei sich entsprechender Glieder der ersten und letzten wager. Reihe zus. jedesm. $2+2x^2$ oder $2(1+x^2)$.

IIb). Die Summe des ersten und letzten, des zweiten und vorletzten u. s. w. Gliedes der zweiten wager. Reihe betr. jedesmal $1+3x$; die Summe je ders. Glieder der vorletzten wager. Reihe jedesm. $2x^2-3x+1$; mithin die Summe je zwei sich entsprechender Glieder der zweiten und vorletzten wager. Reihe zus. jedesm. $2+2x^2$ oder $2(1+x^2)$.

IIc). Bei allen folgenden Reihen findet dasselbe Verhältniss statt.

IIIa). Die Summe des ersten und letzten, des zweiten und vorletzten u. s. w. Gliedes der ersten senkrechten Reihe betr. $2+x^2-x$; die Summe je ders. Glieder der letzten senkrechten Reihe jedesm. $x+x^2$; mithin die Summe je zwei sich entsprechender Glieder der ersten und letzten senkrechten Reihe zus. $2+2x^2$ oder $2(1+x^2)$.

IIIb). Bei allen folgenden senkrechten Reihen findet dasselbe Verhältniss statt.

Vertauscht man nun aus jeder Reihe $\frac{x}{4}$ mal je zwei sich entsprechende Glieder mit den ihnen diametral gegenüberliegenden Zahlen, doch so, dass die Diagonalzahlen als solche gewahrt werden, d. h. dass man aus der ersten wagerechten Reihe das zweite und vorletzte, vierte und viertletzte Glied u. s. w.; aus der zweiten wagerechten Reihe jedoch das erste und letzte, dritte und drittletzte Glied u. s. f. immer abwechselnd mit den ihnen diametral gegenüberliegenden Zahlen vertauscht, so müssen nach den obigen Ausführungen allemal vier Glieder in jeder wagerechten oder senkrechten Reihe und zwar das erste, zweite, vorletzte und letzte; oder das dritte, vierte, viertletzte und drittletzte Glied u. s. w. immer die Summe $2(1+x^2)$ ergeben.

Hauptregel ist nun, dass man zuerst die beiden mittelsten Quadrate, dann die beiden um diese sich gruppirenden Quadrate u. s. w. behandelt.

A. Ist die Basis x eine durcb vier teilbare Zahl, so erhält man in jeder Reihe $\frac{x}{4}$ mal die Snmme $2(1+x^2)$ d. b. $\frac{x}{2}(1+x^2)$ w. z. b. w.

B. Ist die Basis x eino gerade, aber nicbt durcb vier teilbare Zahl, so wird znletzt allemal nnr ein einzelnes Qnadrat übrig bleiben, das man nach folgenden Regeln zn behandeln bat.

Die Summe aller Glieder einor jeden Reibe der inneren Quadrate beträgt nach den obigen Ausführungen $(1+x^2)\cdot\frac{x-2}{2}$. Von dem äussersten Quadrate müssen demnacb ausser den Eckzahlen je zwei sicb direct gegenüberliegende Glieder zns. allemal $\frac{x}{2}(1+x^2)-(1+x^2)\frac{x-2}{2}$ d. b. $1+x^2$ betragen. Dieses ist aber die Snmme je zwei sich einander diametral gegenüberliegender Zahlen; die Aufgabo wird also gelöst sein, wenn nnr zwei aneinanderstossende Seiten des äussersten Qnadrates ans den noch vorbandenen Zahlen so gebildet sind, dass die Snmme je ibrer Glieder $\frac{x}{2}(1+x^2)$ beträgt, und jede Reihe allemal nur e i n e der sich einander diametral gegenüberliegenden Zahlen enthält. Die einzelnen Glieder der beiden anderen Qnadratseiten müssen dann die Diametralzahlen ibrer direct gegenüberliegenden Zahlen sein.

Dio beiden zn bildenden Seiten des äussersten Quadrates seien dio untere nnd die rechte Qnadratsoite. Man bildet sie nnn folgendermassen: Znnächst vertauscht man in beiden Diagonalen die Endglieder mit einander. Die übrigen nngeraden Glieder ansser den letzten $\frac{x-6}{4}$ ungeraden Gliedern der nnteren Reihe, die durcb die letzten $\frac{x-6}{4}$ nngeraden Glieder der oberen Qnadratseite ersetzt werden, also das dritte, fünfte, siebente n. s. w. Glied behalten anf beiden Seiten ibren Platz bei; während die geraden Glieder der nnteren Seite, also das zweite, vierte, secbste n. s. w. Glied durcb die geraden Glieder der recbten Seite, nnd die geradon Glieder der rechten Seite durch die nngeraden Glieder der oberen Seite (ansser natürlicb der Eckzahl) ersetzt werden; nur dass an Stelle der letzten $\frac{x-6}{4}$ ungeraden Glieder der oberen Seite, die ja scbon verwertet sind, die letzten $\frac{x-6}{4}$ nngeraden Glieder der unteren Qnadratseite treten. Ist dies alles

geschehen, so vertanscht man in der nnteren Qnadratseite noch das letzte und das $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ Glied mit einander.

Dann erhält die nntere Quadratseite:

1). das erste nnd letzte Glied der oberen Qnadratseite, d. h. die beiden Summanden 1 nnd x,

2). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-2}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das dritte Glied der letzten wager. Reihe also x^2-x+3, deren Endglied das vorletzte Glied der letzten wager. Reihe also x^2-1, deren Summe mithin $\frac{x^2-x+3+x^2-1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}$ beträgt. Hierbei ist jedoch $\frac{x-6}{4}$ mal die Differenz zweier sich direct gegenüberliegenden Glieder einer senkrechten Reihe zuviel genommen, die von der Summe wieder abznziehen ist,

3). eine arithm. Reihe von $\frac{x-2}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das zweite Glied der rechten Qnadratseite, also $2x$, deren Endglied das drittletzte Glied der rechten Qnadratseito, also x^2-2x, deren Summe mithin $\frac{2x+x^2-2x}{2}\cdot\frac{x-2}{2}$ beträgt. — Es ergiebt sich daher für die nntere Qnadratseite die Summe:

$$S=1+x+\frac{x^2-x+3+x^2-1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}-\frac{x-6}{4}(x^2-x)+\frac{2x+x^2-2x}{2}\cdot\frac{x-2}{2}$$
$$=(4+4x+2x^3-x^2+2x-4x^2+2x-4-x^3+6x^2+x^2-6x+x^3-2x^2):4$$
$$=\frac{2x+2x^3}{4} \quad \text{oder:} \quad \frac{x}{2}(1+x^2) \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die rechte Quadratseite enthält dann:

1). das erste Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. x^2-x+1,

2). das letzte Glied der $\left(\frac{x}{2}+1\right)$. wagerechten Reihe d. h. $\left(\frac{x}{2}+1\right)x$,

3). eine arithm. Reihe von $\frac{x-2}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das dritte Glied der rechten Quadratseite, also $3x$; deren Endglied das vorletzte Glied der rechten Quadratseite, also x^2-x; deren Summe mithin $\frac{3x+x^2-x}{2}\cdot\frac{x-2}{2}$ beträgt,

4). eine arithm. Reihe von $\frac{x-2}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das dritte Glied der ersten wagerechten Reihe, also 3; deren Endglied

das vorletzte Glied der ersten wagerechten Reihe, also $x-1$; deren Snmme mithin $\frac{3+x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{2}$ beträgt. Hierhei ist jedoch $\frac{x-6}{4}$ mal die Differenz zweier sich direct gegenüberliegenden Glieder einer senkrechten Reihe, die, wie sofort aus der Symmetrie der Anfstellung erhellt, x^2-x beträgt, zn wenig genommen, was nun znr Gesamtsnmme noch zn addiren ist.

Es ergieht sich daher für die rechte Qnadratseite die Snmme:

$$S = x^2-x+1+\left(\frac{x}{2}+1\right)x+\frac{3x+x^2-x}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{3+x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{x-6}{4}(x^2-x)$$
$$= (4x^2-4x+4+2x^2+4x+2x^2+x^3-4x-2x^2+2x+x^2-4-2x$$
$$+x^3-6x^2-x^2+6x):4$$
$$= \frac{2x+2x^3}{4} \quad \text{oder:} \quad \frac{x}{2}(1+x^2) \quad \text{w. z. b. w.}$$

II. Die Basis x eine nngerade Zahl.

Die Aufstellung der $x.x$ Zahlen geschieht ebenso wie bei den Quadraten mit gerader Basis, nur dass noch in jeder Reihe das mittlere Glied besonders auszudrücken ist; nnd zwar ist dieses allemal gleich der halben Summe des Anfangs- und Endgliedes einer jeden Reihe. In der ersten wagerechten Reihe wird es also, da das erste Glied 1, das letzte Glied x heisst, $\frac{1+x}{2}$; in der letzten wagerechten Reihe, da das erste Glied x^2-x+1, das letzte x^2 heisst, $\frac{2x^2-x+1}{2}$ lauten. Ebenso herechnet sich das mittlere Glied der ersten senkrechten Reihe ans 1 nnd x^2-x+1 als $\frac{x^2-x+2}{2}$; das der letzten senkrechten Reihe aus x nnd x^2 als $\frac{x+x^2}{2}$. (vergl. die am Schlnsse angefügte Tafel).

Bei der Verschiebnng der einzelnen Zahlen ist nun namentlich zn beachten, dass man jedes um den Mittelpnnkt sich gruppirende Quadrat einzeln nach den im folgenden aufgestellten Formeln zu behandeln hat. Sie teilen sich in Qnadrate mit nngeraden Grundzahlen, deren Basis nm eins vermehrt eine durch vier teilhare Zahl, nnd solche, deren Basis nm eins vermindert eine durch vier teilbare Zahl ist.

A. Die Basis x nm eins vermehrt eine durch vier teilh. Zahl.

I). Die vier Eckzahlen und die vier je in der Mitte einer Seite stehenden Zahlen, kurz Mittelzahlen genannt, verschieht man so, dass

die untere Mittelzahl in die linke obere Ecke, die rechte Mittelzahl in die rechte obere Ecke, die linke Mittelzahl in die linke untere Ecke, die obere Mittelzahl in die rechte untere Ecke zu stehen kommt; und die linke obere Eckzahl obere Mittelzahl, die rechte obere Eckzahl linke Mittelzahl, die linke untere Eckzahl rechte Mittelzahl und die rechte untere Eckzahl untere Mittelzahl wird; als Figur durch zwei Parallelogramme, die sich in ihren Eckpunkten auf einander zu verschieben, verdeutlicht; also

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \quad \text{und:} \quad \begin{matrix} h & a & f \\ c & e & g \\ d & i & b \end{matrix}$$

IIa). Die zweiten und vorletzten Zahlen der beiden wagerechten und senkrechten Reihen vertauscht man so mit einander, dass die zweite und vorletzte Zahl je einer der beiden parallelen Reihen in die ihnen gegenüberliegende Reihe zu stehen kommen, doch so dass die zuerst sich diametral einander gegenüberliegenden Zahlen nun direct sich gegenüberliegen; als Figur dargestellt durch ein Rechteck, dessen Ecken sich auf einem der beiden Parallelenpaare und den Diagonalen fortschreitend verschieben; also

$$\begin{matrix} m & & o \\ | & \times & | \\ n & & p \end{matrix} \quad \text{und:} \quad \begin{matrix} n & p \\ & \\ o & m \end{matrix}$$

IIb). Die dritten und drittletzten, die vierten und viertletzten u. s. w. Zahlen der beiden wagerechten und senkrechten Reihen behandelt man nach demselben Prinzip wie die zweiten und vorletzten Zahlen (vergl. IIa); und zwar hat man so auf jeder Seite $\frac{x-3}{4}$ nebeneinanderstehende Zahlen zu behandeln.

III). Auf jeder Seite werden dann noch zu beiden Seiten der Mittelzahl je $\frac{x-3}{2}-\frac{x-3}{4}$ d. h. $\frac{x-3}{4}$ Zahlen übrig bleiben, von denen man noch aber nur auf zwei aneinanderstossenden Quadratseiten je zwei sich entsprechende Zahlen mit einander zu vertauschen hat, so dass dann je zwei sich erst diametral gegenüberliegenden Zahlen sich nun direct gegenüberliegen, zusammen addirt also jedesmal die Summe $1+x^2$ ergeben.

Es enthalten dann:

Die obere Quadratseite:

1). die untere Mittelzahl d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}$;

2). die linke obere Eckzahl d. h. 1;

Digitized by Google

3). die rechte Mittelzahl d. h. $\frac{x+1}{2}.x$;

4). eine arithm. Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das zweite Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. x^2-x+2; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}-1\right)$ Glied der letzten Reihe d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}-1$; deren Summe mithin $\frac{x^2-x+2+\frac{2x^2-x+1}{2}-1}{2}.\frac{x-3}{2}$ beträgt. — Hierbei ist jedoch $\frac{x-3}{4}$ mal die Differenz zweier sich senkrecht gegenüberliegenden Glieder d. h. $\frac{x-3}{4}(x^2-x)$ zuviel genommen, was von der Gesamtsnmme wieder abzuziehen ist —

5). eine arithm. Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das vorletzte Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. x^2-1; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}+1\right)$. Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}+1$; deren Snmme mithin $\frac{x^2-1+\frac{2x^2-x+1}{2}+1}{2}.\frac{x-3}{2}$ beträgt. — Hierbei ist jedoch $\frac{x-3}{4}$ mal die Differenz zweier sich senkrecht gegenüberliegenden Glieder d. h. $\frac{x-3}{4}(x^2-x)$ znviel genommen, was von der Gesamtsnmme wieder abznziehen ist

Die obere Quadratseite besteht also aus:

$$S=\frac{2x^2-x+1}{2}+1+\frac{x+1}{x}.x+\frac{x^2-x+2+\frac{2x^2-x+1}{2}-1}{2}.\frac{x-3}{2}$$

$$-\frac{x-3}{4}(x^2-x)+\frac{x^2-1+\frac{2x^2-x+1}{2}+1}{2}.\frac{x-3}{2}-\frac{x-3}{4}(x^2-x)$$

$$=(8x^2-4x+4+8+4x^2+4x+4x^3-3x^2+3x-12x^2+9x-9-2x^3+8x^2$$
$$-6x+4x^3-x^2+x-12x^2+3x-3-2x^3+8x^2-6x):8$$

$$=\frac{4x+4x^3}{8} \text{ d. h. } \frac{x}{2}(1+x^2) \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die linke Quadratseite:

1). die untere Mittelzahl d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}$;

2). die rechte obere Eckzahl d. h. x;

3). die linke Mittelzahl d. h. $\frac{x^2-x+2}{2}$;

4). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das zweite Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $2x$; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}-1\right)$ Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $\left(\frac{x+1}{2}-1\right)x$; deren Summe mithin $\frac{2x+\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x}{2}.\frac{x-3}{2}$ beträgt. — Hierbei ist jedoch $\frac{x-3}{4}$ mal die Differenz zweier sich wagerecht gegenüberliegenden Gliedern, die wie sofort aus der Symmetrie der Aufstellung erhellt, $x-1$ beträgt, zuviel genommen, was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist —

5). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das vorletzte Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. x^2-x; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}+1\right)$. Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $\left(\frac{x+1}{2}+1\right)x$; deren Summe mithin $\frac{x^2-x+\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x}{2}.\frac{x-3}{2}$ beträgt. — Hierbei ist jedoch $\frac{x-3}{4}$ mal die Differenz zweier sich gegenüberliegenden wagerechten Glieder zuviel genommen d. h. $\frac{x-2}{2}$. $x-1$), was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist.

Die linke Quadratseite besteht also aus:

$$S=\frac{2x^2-x+1}{2}+x+\frac{x^2-x+2}{2}+\frac{2x+\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x}{2}.\frac{x-3}{2}-\frac{x-3}{4}(x-1)$$

$$+\frac{x^2-x+\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x}{2}.\frac{x-3}{2}-\frac{x-3}{4}(x-1)$$

$$=(8x^2-4x+4+8x+4x^2-4x+8+x^3+3x^2-3x^2-9x-2x^2+8x-6$$
$$+3x^3+x^2-9x^2-3x-2x^2+8x-6):8$$

$$=\frac{4x+4x^3}{8}\text{ d. h. }\frac{x}{2}(1+x^2)\quad\text{w. z. b. w.}$$

In den beiden anderen Quadratseiten ist jedes Glied das ursprüngliche Diamentralglied seines gegenüberliegenden Gliedes, also allemal das Supplement zu $1+x^2$. Bezeichne ich nun die entsprechenden Glieder der gegenüberliegenden Reihe mit α, β, γ, δ u. s. w., so erhalte ich für jede der beiden vorliegenden Quadratseiten $1+x^2-\alpha+1+x^2-\beta+1+x^2-\gamma$ u. s. w.; im ganzen jedoch $x(1+x^2)-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$. $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ geben aber zusammen $\frac{x}{2}(1+x^2)$; mithin ist die Summe der einzelnen zu addirenden Glieder:

$$x(1+x^2)-\frac{x}{2}(1+x^2)=\frac{x}{2}(1+x^2) \quad \text{w. z. b. w.}$$

B. Die Basis x um eins vermindert eine durch vier teilbare Zahl.

I). Jede Eckzahl vertauscht man mit einer benachbarten Mittelzahl, doch so, dass man immer von jeder Ecke aus die gleiche Richtung beibehält; als Figur dargestellt (die Bogen geben die Richtung an, in der die Vertauschung geschieht):

r	s	t		u	t	s		r	s	t		s	r	w
u	v	w	und:	r	v	z	oder:	u	v	w	und:	x	v	t
x	y	z		y	x	w		x	y	z		u	z	y

II). Die zweiten und vorletzten, die dritten und drittletzten u. s. w. Zahlen der beiden wagerechten und senkrechten Reihen behandele man nach denselben Formeln wie dieselben Zahlen der Quadrate, deren Basen um eins vermehrt durch vier teilbare Zahlen sind (vergl. II. A. IIa); nur dass man hier nach diesem Principe auf jeder Seite allemal nur $\frac{x-1}{4}$ nebeneinanderstehende Zahlen behandelt.

III). Auf jeder Seite werden dann noch zu beiden Seiten der Mittelzahl je $x-\left(3+2.\frac{x-1}{4}\right)$ d. h. $\frac{x-5}{2}$ Zahlen übrig bleiben, von denen man, jedoch nur auf zwei aneinanderstossenden Quadratseiten, noch je zwei sich einander entsprechende Zahlen mit einander zu vertauschen hat, so dass dann je zwei sich einander erst diametral gegenüberliegende Zahlen sich nun direct gegenüberliegen, zusammen also allemal die Summe $1+x^2$ ergeben.

Es enthalten demnach:
die obere Quadratseite:

1). die linke Mittelzahl d. h. $\frac{x^2-x+2}{2}$,

2). die rechte obere Eckzahl d. h. x;

3). die obere Mittelzahl d. h. $\frac{1+x}{2}$;

4). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das zweite Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. x^2-x+2; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}-1\right)$te Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}-1$; deren Summe mithin $\frac{x^2-x+2+\frac{2x^2-x+1}{2}-1}{2}\cdot\frac{x-3}{2}$. Hierbei ist jedoch $\frac{x-5}{4}$ mal die Differenz zweier sich gegenüberliegenden Glieder einer senkrechten Reihe d. h. $\frac{x-5}{4}(x^2-x)$ zuviel genommen, was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist —

5). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das vorletzte Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. x^2-1; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}+1\right)$te Glied der letzten wagerechten Reihe d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}+1$; deren Summe mithin $\frac{x^2-1+\frac{2x^2-x+1}{2}+1}{2}\cdot\frac{x-3}{2}$ beträgt. Hierbei ist jedoch auch wiederum $\frac{x-5}{4}$ mal die Differenz zweier sich direct gegenüberliegenden Glieder einer senkrechten Reihe d. h. $\frac{x-5}{4}(x^2-x)$ zuviel genommen, was von der Gesamtsumme noch abzuziehen ist.

Die obere Quadratseite besteht also aus:

$$S=\frac{x^2-x+2}{2}+x+\frac{1+x}{2}+\frac{x^2-x+2+\frac{2x^2-x+1}{2}-1}{2}\cdot\frac{x-3}{2}$$

$$-\frac{x-5}{4}(x^2-x)+\frac{x^2-1+\frac{2x^2-x+1}{2}+1}{2}\cdot\frac{x-3}{2}-\frac{x-5}{4}(x^2-x)$$

$$=(4x^2-4x+8+8x+4+4x+4x^3-3x^2+3x-12x^2+9x-9-2x^3+12x^2$$
$$-10x+4x^3-x^2+x-12x^2+3x-3-2x^3+12x^2-10x):8$$

$$=\frac{4x+4x^3}{8}\text{ d. h. }\frac{x}{2}(1+x^2)\text{ w. z. h. w.}$$

Die linke Quadratseite:

1). die linke Mittelzahl d. h. $\frac{x^2-x+2}{2}$;

2). die linke obere Eckzahl d. h. 1;

3). die untere Mittelzahl d. h. $\frac{2x^2-x+1}{2}$;

4). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das zweite Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $2x$; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}-1\right)$te Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x$; deren Summe mithin $\frac{2x+\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x}{2}\cdot\frac{x-3}{2}$ beträgt. Hierbei ist jedoch $\frac{x-5}{4}$ mal die Differenz zweier sich wagerecht gegenüberliegenden Glieder, die, wie sofort aus der Symmetrie der Aufstellung der Zahlen erhellt, $x-1$ beträgt, zuviel genommen, was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist —

5). eine arithmetische Reihe von $\frac{x-3}{2}$ Gliedern, deren Anfangsglied das vorletzte Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. x^2-x; deren Endglied das $\left(\frac{x+1}{2}+1\right)$te Glied der letzten senkrechten Reihe d. h. $\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x$; deren Summe mithin $\frac{x^2-x+\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x}{2}\cdot\frac{x-3}{2}$ beträgt. Hierbei ist jedoch $\frac{x-5}{4}$ mal die Differenz zweier sich wagerecht gegenüberliegenden Glieder d. h. $\frac{x-5}{4}(x-1)$ zuviel genommen, was von der Gesamtsumme wieder abzuziehen ist.

Die linke Quadratseite besteht also aus:

$$S=\frac{x^2-x+2}{2}+1+\frac{2x^2-x+1}{2}+\frac{2x+\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x}{2}\cdot\frac{x-3}{2}-\frac{x-5}{4}(x-1)$$
$$+\frac{x^2-x+\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x}{2}\cdot\frac{x-3}{2}-\frac{x-5}{4}(x-1)$$
$$=(4x^2-4x+8+8+8x^2-4x+4+x^3+3x^2-3x^2-9x-2x^2+12x-10$$
$$+3x^3+x^2-9x^2-3x-2x^2+12x-10):8$$
$$=\frac{4x+4x^3}{8}$$
$$=\frac{x}{2}(1+x^2)\quad \text{w. z. b. w.}$$

In den beiden anderen Quadratseiten ist jedes Glied das ursprüngliche Diametralglied seines gegenüberliegenden Gliedes, also allemal das Supplement zu $1+x^2$. Bezeichne ich nun die Glieder der gegenüberliegenden Reihe mit α, β, γ u. s. w., so erhalte ich für die Glieder der vorliegenden Reihe $1+x^2-\alpha$; $1+x^2-\beta$ u. s. w. Ihre Summe ist also $x(1+x^2)-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$. $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ ist nun aber $\frac{x}{2}(1+x^2)$; Summe aller Glieder der vorliegenden Reihe also $x(1+x^2)-\frac{x}{2}(1+x^2)$ d. h. $\frac{x}{2}(1+x^2)$ w. z. b. w.

Aufstellung der Zahlen bei Quadraten mit ungerader Grundzahl.

1. Glied	2. Glied	…	$\left(\frac{x+1}{2}-1\right)$ Glied	Mittelglied	$\left(\frac{x+1}{1}+1\right)$. Glied	…	vorletzt. Glied	letztes Glied
1	2	.	$\frac{x+1}{2}-1$	$\frac{x+1}{2}$	$\frac{x+1}{2}+1$	.	$x-1$	x
$x+1$	$x+2$	.	$\frac{3x+1}{2}-1$	$\frac{3x+1}{2}$	$\frac{3x+1}{2}+1$	.	$2x-1$	$2x$
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
$\frac{x^2-3x+2}{2}$	. . .	. . .	. . .	.	. . .	. . .	. . .	$\left(\frac{x+1}{2}-1\right).x$
$\frac{x^2-x+2}{2}$	. . .	. . .	. . .	$\frac{x^2+1}{2}$	. . .	. . .	. . .	$\frac{x+1}{2}.x$
$\frac{x^2+x+2}{2}$	. . .	. . .	. . .	.	. . .	. . .	. . .	$\left(\frac{x+1}{2}+1\right).x$
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
x^2-2x+1	x^2-2x+2	.	$\frac{2x^2-3x+1}{2}-1$	$\frac{2x^2-3x+1}{2}$	$\frac{2x^2-3x+1}{2}+1$	.	x^2-1x-1	x^2-1x
x^2-1x+1	x^2-1x+2	.	$\frac{2x^2-1x+1}{2}-1$	$\frac{2x^2-1x+1}{2}$	$\frac{2x^2-1x+1}{2}+1$	.	x^2-1	x^2

Aufstellung der Zahlen bei Quadraten mit gerader Grundzahl.

1. Glied	2. Glied	3. Glied	4. Glied	. . . .	$(x-3)$. Glied	$(x-2)$. Gl.	$(x-1)$. Gl.	$x$tes Gl.
1	2	3	4	. . I. Reihe	$x-3$	$x-2$	$x-1$	x
$x+1$	$x+2$	$x+3$	$x+4$	. . II. Reihe	$2x-3$	$2x-2$	$2x-1$	$2x$
$2x+1$	$2x+2$	$2x+3$	$2x+4$	. . III. Reihe	$3x-3$	$3x-2$	$3x-1$	$3x$
$3x+1$	$3x+1$	$3x+3$	$3x+4$	. . IV. Reihe	$4x-3$	$4x-2$	$4x-1$	$4x$
.	.	.	.		.	.	.	.
.	.	.	.		.	.	.	.
.	.	.	.		.	.	.	.
x^2-4x+1	x^2-4x+2	x^2-4x+3	x^2-4x+4	. . viertletzte Reihe . .	x^2-3x-3	x^2-3x-2	x^2-3x-1	x^2-3x
x^2-3x+1	x^2-3x+2	x^2-3x+3	x^2-3x+4	. . drittletzte Reihe . .	x^2-2x-3	x^2-2x-2	x^2-2x-1	x^2-2x
x^2-2x+1	x^2-2x+2	x^2-2x+3	x^2-2x+4	. . vorletzte Reihe . . .	x^2-1x-3	x^2-1x-2	x^2-1x-1	x^2-1x
x^2-1x+1	x^2-1x+2	x^2-1x+2	x^2-1x+4	. . letzte Reihe	x^2-3	x^2-2	x^2-1	x^2

XXII.

Miscellen.

1.

Neuer Punkt und Gerade in der Dreiecksebene.

Bezeichnet man die Seitenmitten des Dreiecks ABC resp. mit $\mathfrak{ABC}$, die Tangentialpunkte des Inkreises J mit $D_1D_2D_3$, die der 3 Ankreise $J'J''J'''$ ebenso, nur gestrichen: D_1' bis D_3''', so geben die geraden Verbindungslinien der Ecken ABC mit diesen 12 Tangentialpunkten bekanntlich[1]) 8 ausgezeichnete Punkte, einmal die vier Grebe'schen Punkte: $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'\mathfrak{G}''\mathfrak{G}'''$ für die Dreiecke $D_1D_2D_3$ bis $D_1'''D_2'''D_3'''$, die wir im Gegensatz zu dem primären Dreieck ABC die secundären Dreiecke nennen wollen, und dann die vier Grebe'schen Nebenpunkte $GG'G''G'''$. Die Strecke $J\mathfrak{G}$ ist der Grebe'sche Durchmesser des Brocard'schen Kreises, dessen Mittelpunkt L zugleich der Mittelpunkt des Lemoine'schen Kreises ist, JG der Grebe'sche Nebendurchmesser, beide für das inbeschriebene secundäre Dreieck: analog für die drei anbeschriebenen. Man hat nun folgende Sätze:

I) Die vier Grebe'schen Nebendurchmesser der secundären Dreiecke schneiden sich in ein- und demselben Punkt S, dem Schwerpunkte des primären Dreiecks.

II) Die vier Grebe'schen Durchmesser der Brocard'schen Kreise in Bezug auf die secundären Dreiecke schneiden sich in ein- und demselben Punkte: $\mathfrak{S}$

1) Vgl. Fuhrmann: Ueber den Brocard'schen Winkel. Archiv der Math. u. Phys. 1887. T. VI. S. 1. Daselbst auch Litteraturnachweis.

und zwar liegt dieser Punkt[1]) auf der Euler'schen Geraden ebensoweit vom Mittelpunkte M des Umkreises für das primäre Dreieck entfernt, nur nach entgegengesetzter Richtung, als der Höhenschnittpunkt: H. Auch sind dann $HSM\mathfrak{S}$ vier harmonische Punkte ebenso wie $HNSM$, wenn N der Mittelpunkt des durch die Seitenmitten und die Höhenfusspunkte XYZ gehenden Feuerbach'schen Kreises ist. Des letzteren Berührungspunkte mit dem Inkreise und den Ankreisen seien: $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{T}''\mathfrak{T}'''$, während $TT' T'' T'''$ die vier Tarry'schen Punkte der secundären Dreiecke sind.

Der Tarry'sche Punkt ist der e i n e[2]) Endpunkt des Tarry'schen Durchmessers, dessen Richtung durch den Punkt Q bestimmt wird, und zwar verhalten sich die Abstände des Punktes Q von den Seiten des secundären Dreiecks umgekehrt wie die Kuben dieser Seiten[3]). Es gilt nun der folgende, zwei Gruppen merkwürdiger Dreieckspunkte die des Feuerbach'schen Kreises und die des Brocard'schen Winkels mit einander verknüpfende Satz, der auch über die fortrückende Bewegung des Feuerbach'schen Tangentialpunktes auf dem Inkreise bei verändertem primären Dreieck Aufschluss giebt:

III) D e r B e r ü h r u n g s p u n k t : $\mathfrak{T}$ d e s F e u e r b a c h ' s c h e n u n d d e s I n k r e i s e s f ü r d a s p r i m ä r e D r e i e c k, d e r M i t t e l p u n k t L d e s L e m o i n e ' s c h e n u n d B r o c a r d ' s c h e n K r e i s e s u n d d e r T a r r y ' s c h e P u n k t : T[4]) l i e g e n a u f e i n e r G e-

---

1) Bewegt sich C auf dem Umkreise M mit Radius r, so liegt $\mathfrak{S}$ auf einem Kreise aus M mit Radius r, wobei $MM' = 2\mathfrak{C}M$ ist. Vgl. Zelbr. Archiv der Math. u. Phys. 2. Reihe Teil II. pag. 324.

2) Welcher? kann auf mehrfache Art entschieden werden; durch Satz III) z. B., oder auch dadurch, dass man von den Ecken des secundären Dreiecks auf die Seiten des Brocard'schen Dreiecks Lote fällt. Die Ecken: $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ des Brocard'schen Dreiecks entstehen auf dem Brocard'schen Kreise durch die Winkelhalbirenden des primären Dreiecks. $D_1D_2\mathfrak{D}_3 = D_2D_1\mathfrak{D}_3 =$ etc. ist dann der Brocard'sche Winkel ϑ. Der andere Endpunkt des Tarry'schen Durchmessers sei: E, beide auf Kreis J.

3) Man construirt Q, indem man die durch die Ecktransversale $D_1\mathfrak{G}$, ... auf Seite D_2D_3 ..., entstehenden Abschnitte vertauscht und so den Gegenpunkt 2ter Art von $\mathfrak{G}$ herstellt. Der Gegenpunkt erster Art, indem die durch die Ecktransversale entstehenden Teilwinkel vertauscht werden, wird der Schwerpunkt des secundären Dreiecks. Bei dieser Spiegelung an den Winkelhalbirenden des secundären Dreiecks werden die Seiten des primären 3 Parabeln, der Kreis J selbst wird eine Curve 4ter Ordnung, die jedoch in die ∞ entfernte Gerade und die Seiten des secundären Dreiecks zerfällt. Vier Punkte entsprechen sich selbst. Das Strahlenbüschel, dessen Strahlen zum Grebe'schen Durchmesser senkrecht stehen, verwandelt sich in ein Büschel Kegelschnitte, die durch $D_1D_2D_3$ und E gehen, etc.

4) Die Punkte L und T sind zunächst in Bezug auf das inbeschriebene secundäre Dreieck zu nehmen.

radeu. Ebenso iu Bezug auf die Ankreise, so dass im Ganzen vier Gerade entstehen, die ein vollständiges Vierseit bilden.

Ein synthetisch-geometrischer Beweis für Satz I) ist leicht zu führen. (Man weise NJ und GM als Parallelen zu einander nach, indem man die Bedentnng von J für Dreieck $\mathfrak{ABC}$ angiebt.)

Dagegen dürfteu II) und III) eher in Dreieckscoordinaten zu behandeln sein.

Der Beweis ist gegeben, sobald gezeigt wird, dass die aus den 9 Loten der drei Punkte auf die Seiten gebildete Determinante verschwindet. Das Coordinatendreiseit sei das primäre mit den Seiten abc, den Winkeln α, β, γ, dem Umfange u, der Fläche F und mit den Tangenten an den Inkreis J nämlich:

$$\xi = \frac{u}{2} - a; \quad \eta = \frac{u}{2} - b; \quad \zeta = \frac{u}{2} - c$$

Sind $p_1 p_2 p_3$ die Abstände eines Punktes P von den Seiten, so ist

$$p_1 \sin\alpha + p_2 \sin\beta + p_3 \sin\gamma$$

eine nicht verschwindende Constante für das Dreieck und

$$l_1 p_1 \sin\alpha + l_2 p_2 \sin\beta + l_3 p_3 \sin\gamma = 0$$

wenn $l_1 l_2 l_3$ die auf irgend eine durch den Punkt P gehende Gerade von den Ecken ABC gefällten und im richtigen Sinne genommenen Lote bedenten.

Beweis zu II.

Man stelle die Abstände der drei Punkte J, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}$ auf oder auch nur ihre Verhältnisse, was weiter keine Schwierigkeit hat. Für den Punkt J also $\varrho : \varrho : \varrho$ oder auch $1:1:1$, dann für $\mathfrak{G}$ [1])

$$\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{g}_2 : \mathfrak{g}_3 = \frac{\eta\zeta}{a} : \frac{\zeta\xi}{b} : \frac{\xi\eta}{c}$$

endlich für $\mathfrak{S}$, indem die Punkte M

---

1) $\mathfrak{g}_3$ selbst ist durch Anwendung des harmonischen Mittels im vollständigen Vierseit: $C\mathfrak{G}D_1D_2AB$ zunächst das Reciproke von $\frac{1}{\xi\sin\alpha} + \frac{1}{\eta\sin\beta} - \frac{1}{h_c}$ wo $h_c = \frac{2F}{c}$. Durch Umformung wird:

$$\mathfrak{g}_3 = \frac{2F\xi\eta}{c(\eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta)} = \frac{2F\xi\eta}{c.\mathfrak{N}}$$

$\{r\cos\alpha,\quad r\cos\beta,\quad r\cos\gamma\}$ und H

$$\left\{\frac{a^4-(b^2-c^2)^2}{8aF},\quad \frac{b^4-(a^2-c^2)^2}{8bF},\quad \frac{c^4-(a^2-b^2)^2}{8cF}\right\}$$

benutzt werden,

$$\mathfrak{B}_1:\mathfrak{B}_2:\mathfrak{B}_3=\frac{\sigma_1}{a}:\frac{\sigma_2}{b}:\frac{\sigma_3}{c},\quad\text{worin}$$

$$\sigma_1=\xi\eta\zeta a+\frac{u}{2}\xi(\eta^2+\eta\zeta+\zeta^2)-\frac{u^2}{4}\eta\zeta$$

σ_2 und σ_3 ein entsprechender Ausdruck ist. Nun kann aber bei der Determinante das erste und letzte Glied von σ_1, σ_2, σ_3 als Proportionalanteil der andern Zeilen fortgelassen werden und man erhält die Determinante:

$$\triangle=\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ \eta\zeta, & \zeta\xi, & \xi\eta \\ \xi(\eta^2+\eta\zeta+\zeta^2), & \eta(\zeta^2+\zeta\xi+\xi^2), & \zeta(\xi^2+\xi\eta+\eta^2)\end{vmatrix}$$

Indem sich der Factor $\mathfrak{N}=\eta\zeta+\zeta\xi+\xi\eta$ absondern lässt, bleibt die Identität:

$$\xi^2(\eta^2-\zeta^2)+\eta^2(\zeta^2-\xi^2)+\zeta^2(\xi^2-\eta^2)=0$$

übrig, es geht also die Gerade $J\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{S}$, ebenso $J'\mathfrak{G}'$, $J''\mathfrak{G}''$, $J'''\mathfrak{G}'''$.

Beweis für III.

Die Abstände l_1, l_2, l_3 des Mittelpunktes L des Lemoine'schen oder des Brocard'schen Kreises verhalten sich wie:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{u}{2}+\xi\right)+\tau_1:\frac{1}{b}\left(\frac{u}{2}+\eta\right)+\tau_2:\frac{1}{c}\left(\frac{u}{2}+\zeta\right)+\tau_3$$

worin aber $\tau_1\tau_2\tau_3$ als Proportionalanteile der folgenden Zeile bei der Determinante unterdrückt werden können [1]).

---

1) l_1 selbst nämlich wird:

$$\frac{F}{u\mathfrak{N}}\left(\frac{3\,\xi\eta\zeta}{a}+\frac{3u}{2a}\eta\zeta+\frac{\xi}{a}(\eta-\zeta)^2\right)$$

Die Coordinaten des Tangentialpunktes $\mathfrak{T}$ [1]) und des Tarry'schen Punktes T [2]) sind:

$$\mathfrak{t}_1 : \mathfrak{t}_2 : \mathfrak{t}_3 = \frac{\xi}{a}(\eta - \zeta)^2 : \frac{\eta}{b}(\zeta - \xi)^2 : \frac{\zeta}{c}(\xi - \eta)^2$$

und:

$$t_1 : t_2 : t_3 = \cos^2(\vartheta_1 + \vartheta) : \cos^2(\vartheta_2 + \vartheta) : \cos^2(\vartheta_3 + \vartheta)$$

worin $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3$ die Winkel des inbeschriebenen secundären Dreiecks $= \frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und ϑ der Brocard'sche Winkel hiezu, der durch die Relation

$$\sin(\vartheta_1 - \vartheta)\sin(\vartheta_2 - \vartheta)\sin(\vartheta_3 - \vartheta) = \sin^3\vartheta$$

(vgl. Fuhrmann a. a. O.) definirt sei.

Es wird aber $\operatorname{tang}\vartheta = \frac{F}{\mathfrak{N}}$, somit

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{a}{\xi}(\xi^2 - \eta\zeta)^2 : \frac{b}{\eta}(\eta^2 - \zeta\xi)^2 : \frac{c}{\zeta}(\zeta^2 - \xi\eta)^2$$

Es handelt sich also um die Determinante:

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{1}{a}\left(\xi + \frac{u}{2}\right), & \frac{1}{b}\left(\eta + \frac{u}{2}\right), & \frac{1}{c}\left(\zeta + \frac{u}{2}\right) \\ \frac{\xi}{a}(\eta - \zeta)^2, & \frac{\eta}{b}(\zeta - \xi)^2, & \frac{\zeta}{c}(\xi - \eta)^2 \\ \frac{a}{\xi}(\xi^2 - \eta\zeta)^2, & \frac{b}{\eta}(\eta^2 - \zeta\xi)^2, & \frac{c}{\zeta}(\zeta^2 - \xi\eta)^2 \end{vmatrix}$$

Abgesehen von Factoren mm' ... kann dieselbe sehr verschiedene Formen annehmen, so z. B. wird:

---

1) Ist $AD_3\mathfrak{T} = \nu$, so ist: $\mathfrak{t}_3 = 2\varrho\sin^2\nu$ und dies $= \left(\frac{2F}{\frac{u}{2}\mathfrak{N} - 9F^2}\right)\frac{\zeta}{c}(a-b)^2$, indem $n_3 = \frac{h_c^2 + pq}{4h_c}$ für Punkt N benutzt wird. Hierin sind p und q die Höhensegmente auf c.

2) Ist Wkl. $D_1D_2T = D_1ET = \varepsilon$, so ist $t_1 = 2\varrho\sin^2\varepsilon = \frac{2\varrho\cos^2(\vartheta_1 + \vartheta)}{1 - 4\sin^2\vartheta}$, denn ε ist auch $\mathfrak{D}_1\mathfrak{G}J$ und

$$\mathfrak{D}_1J = \varrho(\sin\vartheta_1 \operatorname{tang}\vartheta - \cos\vartheta_1) = -\frac{\varrho\cos(\vartheta_1 + \vartheta)}{\cos\vartheta}$$

$$m . \nabla =$$

$$\begin{vmatrix} b+c) & , & c+a & , & a+b \\ [b(b-a)-c(c-a)]^2 & , & [c(c-b)-a(a-b)]^2 & , & [a(a-c)-b(b-c)]^2 \\ [ab(b-a)+ac(c-a)]^2, & & [bc(c-b)+ba(a-b)]^2, & & [ca(a-c)+cb(b-c)]^2 \end{vmatrix}$$

Durch Subtraction und Addition der Colonnen zu eiuander erhält man hieraus anch:

$$m' \nabla =$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & , & b^2 & , & c^2 \\ a(c(c-b)-a(a-b))(a(a-c)-b(b-c)), & & b(-)(-), & & c(-)(-) \\ (c(c-b)+a(a-b))(a(a-c)+b(b-c)), & & (+)(+), & & (+)(+) \end{vmatrix}$$

Dio zweite Zeile kann $a(c-a)(a-b)\eta\zeta, \ldots, \ldots$ oder $a^2\xi\eta\zeta - abc\,\eta\zeta, \ldots, \ldots$ geschrieben werden und geht nm Proportionalanteile der ersten Zeile verändert einfach in: $\eta\zeta$, $\zeta\eta$, $\eta\xi$ über, die letzte Zeile endlich, in ähnlicher Art[1]) verändert, wird: $a^2(\eta\zeta + bc - b\eta - c\zeta) - abc(\eta + \zeta), \ldots, \ldots$ und da $\eta + \zeta = a$, $\zeta + \xi = b$, $\xi + \eta = c$ ist, kann dafür: $a^2(\eta\zeta - b\eta - c\zeta), \ldots, \ldots$ oder anch $-a^2\mathfrak{N}$, $-b^2\mathfrak{N}$, $-c^2\mathfrak{N}$ gesetzt werden.

Mithin verschwindet ∇ identisch nnd liegen somit die Pnnkte $\mathfrak{T}LT$ auf einer Geraden.

J. Hermes.

2.

Momentaner Bewegungszustand eines in der Praxis viel angewandten Mechanismus.

Man stelle sich vor zwei Ebenon, von denen jede mit oinom curvenförmigen Schlitz von gleicher Breite versehon ist. Beido Ebenen drehen sich auf einer festen Ebene; die eine, welche don Schlitz MN enthält, um den Pnnkt A, dio andere, welcho den Schlitz UV besitzt, nm den Pnnkt B. In den Raum zwischen den beiden Schlitzen denke man sich einen cylindrischen Stift mit kroisförmiger Basis gesteckt, dessen Radius genau dio Breite jedes Schlitzes hat. Ferner

---

1) $\frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b(c+a)) = (c+a)\eta - ac$ und $\frac{1}{2}(b^2 + a^2 - c(b+a)) = (a+b).\zeta - ab$. Wird multiplicirt, so ist in dem Product das Glied $+(ab+bc+ca)\eta\xi$ wegen des Factors $ab+bc+ca$ ohne Einfluss auf den Wert der Determinante $m'.\nabla$ und fällt mithin fort.

mögen die beiden Ebenen durch eine starre Stange *FG* (Fig. 1.) gelenkartig mit einander verbunden sein. Setzt man nun die eine Ebene in Rotation, so wird vermittelst der Stange *FG* ebenfalls die andere Ebene in Drehung kommen und der Mittelpunkt *E* des Stiftes (und zwar nur er allein desselben) eine bestimmte Curve, die sogenannte Eingriffslinie beschreiben. Die Tangentenconstruction an die Eingriffslinie ist bereits in der vorigen Abhandlung dieser Zeitschrift gegeben worden. Hier ist das Verhältniss der Rotationsgeschwindigkeiten der sich um *A* und *B* drehenden Ebenen unmittelbar gegeben; nennen wir nämlich die Rotationsgeschwindigkeiten um *A* und *B*: α resp. β und bilden den Schnittpunkt *Q* von *AB* und *FG*, so ist bekanntlich:

$$AQ.\alpha = BQ.\beta$$

(Diese Gleichung findet sich abgeleitet in unserm Aufsatze: Theoretische Untersuchung einiger in der Praxis angewandter kinematischer Cylinderketten. Jahrgang 1881 der Verhandlungen des Vereins z. Beförd. des Gewerbfl. Seite 439—440.)

Aus der Gleichung ergiebt sich das Geschwindigkeitsverhältniss:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{BQ}{AQ}$$

Um nun die Tangente an die Eingriffslinie in *E* zu construiren, zeichne man zunächst die Mittellinien der Schlitze und lege daran in *E* die Tangenten. Vom Punkte *A* fälle man darauf die Normale auf die Tangente der Curve *MN*, letztere sei *Aa*, ebenso fälle man von *B* die Normale auf die Tangente der Curve *UV*, dieselbe sei *Bb*. Nunmehr ziehe man *ab* und construire auf *ab* den Punkt *q* so, dass

$$\frac{aq}{bq} = \frac{AQ}{AQ}$$

ist. Endlich ziehe man *qE* und zeichne zu *qE* den coordinirten Schenkel *EF*; letzterer ist die verlangte Tangente.

Man construire ferner die Normalen der Curven *MN* und *UV* in *E*, auf der Normalen der Curve *MN* nehme man den beliebigen Punkt *C* an und verbinde denselben durch eine starre Stange gelenkartig mit *A*; ebenso nehme man auf der Normalen der Curve *UV* den Punkt *D* beliebig an und verbinde denselben gelenkartig durch eine starre Stange mit *B*. Endlich verbinde man auch die Normalen, die man sich von *C* bis *E* und von *D* bis *E* als starre Stangen denkt, und *E* drehbar mit einander. Man kann sich nun die drehbaren Ebenen mit ihren Schlitzen entfernt denken und man erhält den Mechanismus in der Figur 2. Die von dem Punkt *E* beschriebene

Curve hat dieselbe Tangente als die vorher construirte der Eingriffslinie. Durch diese Tangente ist bekanntlich der momentane Bewegungszustand der Stangen (Glieder) *CE* und *ED* vollkommen bestimmt.

Der Mechanismus in Fig. 2., welcher als sechsgliederige Cylinderkette in der Maschinenwissenschaft bekannt ist, findet Anwendung bei der Quintenzwaage, bei einer besondern Art der Stephenson'schen Locomotivsteuerung, bei der Hart'schen Geradführung u. s. w.

Man kann nun sagen, dass in Bezug auf die Bewegung des Punktes *E* der Mechanismus in Fig. 1. mit dem Mechanismus in Fig. 2. momentan identisch ist. Sind die Punkte *C* und *D* in beiden Figuren zugleich die Krümmungsmittelpunkte der Curven *MN* und *UV*, so sind beide Mechanismen in Bezug auf die Bewegung des Punktes *E* doppelt momentan identisch, d. h. die von *E* beschriebenen Curven beider Mechanismen haben dieselben Krümmungsradien. Die Construction dieser Krümmungsradien werden wir in einer späteren Abhandlung geben. Sind endlich die Curven *MN* und *UV* Kreise und die Punkte *C* und *D* beider Figuren derselben ihre Mittelpunkte, so sind beide Mechanismen in Bezug auf die Bewegung des Punktes *E* absolut und continuirlich identisch. Interessant ist der Specialfall, wenn die Schlitze geradlinig sind, und deren Mittellinien durch die Punkte *A* und *B* hindurchgehen, es fallen dann die Punkte *C* und *D* in die Unendlichkeit (Fig. 3.) und die von *E* beschriebene Curve ist die feste Polcurve einer beweglichen Ebene, deren Punkte *F* und *G* um *A* und *B* Kreise beschreiben. Um die Tangente an die Polcurve zu zeichnen, braucht man nur *EQ* zu ziehen und zu *EQ* die Coordinirte *ET* zu construiren, letztere ist die verlangte Tangente. Ebenso werden wir in der späteren Abhandlung den Krümmungsradius der Polcurve finden; eine allgemeine Lösung seiner Construction ist meinem Wissen nach bis jetzt noch nicht gegeben worden.

Um, wenn auch nicht die Tangente, sondern die Normale der von *E* beschriebene Curve (Fig. 1.) zu finden, kann man auch folgendermaassen verfahren: Man bilde die Schnittpunkte *L* und *K* der Linie *FG* mit *CE* und *ED*. Hierauf bilde man den Schnittpunkt *P* der Geraden *LA* und *KB*, ziebt man nun die Gerade *PE*, so ist diese die verlangte Normale. (Diese Construction haben wir in der vorher genannten Abhandlung in den Verhandlungen des Vereins z. Beförderung des Gewerbfleisses (Seite 438—439) gegeben.) Es wäre wol interessant, den Zusammenhang dieser Normalenconstruction mit der vorher gegebenen Tangentenconstruction zu finden.

Wir haben demnach für die Construction der Normale der Polcurve in Fig. 3. auch folgende Lösung: Man errichte auf AE in E die Normale EL und auf BE in E die Normale EK, bilde die Schnittpunkte K und L von FG mit den Geraden EL und EK, verbinde A mit L und B mit K, der Schnittpunkt P dieser Verbindungslinien giebt mit E verbunden die verlangte Normale.

Juli 1882.

August Ramisch,
Lehrer der Mathematik und Mechanik in
Treuenbrietzen.

3.

Zur Lehre der quadratischen Formen.

Dieser Aufsatz beantwortet die Frage: welche quadratischen Formen mit n Veränderlichen können durch lineare Transformation in andere mit $m(< n)$ Veränderlichen transformirt werden?

Die Antwort lautet: Diejenigen, deren Determinante und sämtliche Diagonalunterdeterminanten [1]) bis zum $(m+1)$-ten Grade incl. verschwinden, — wenn aber die Diagonalunterdeterminanten m-ten Grades nicht sämtlich verschwinden, so kann die Form in eine weniger als m Veränderliche enthaltende Form nicht transformirt werden.

I.

Die quadratische Form

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$
$$i, k = 1, 2, \dots n$$

gehe durch die lineare Transformation

$$x_i = \Sigma c_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$
$$k = 1, 2, \dots n$$

über in die quadratische Form

$$g(y_1, y_2, \dots y_n) = \Sigma b_{ik} y_i y_k, \quad (b_{ik} = b_{ki})$$
$$i, k = 1, 2, \dots n$$

---

1) Diagonalunterdeterminanten sind diejenigen, deren sämtliche Hauptdiagonalelemente zur Hauptdiagonale der ursprünglichen Determinante gehören.

Die Derivirten der beiden Formen

$$f_i = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad g_i = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

sind durch die Relationen verbunden:

$$\begin{aligned} g_i(y_1, y_2, \dots y_n) &= \underset{k=1,2,\dots n}{\Sigma} f_k(x_1, x_2, \dots x_n).c_{ki} = \\ &= \underset{k=1,2,\dots n}{\Sigma} f_k(c_{1i}, c_{2i}, \dots c_{ni}).x_k \end{aligned}$$

Die transformirte Form enthält y_i nicht, wenn $g_i = 0$, also

$$f_k(c_{1i}, c_{2i}, \dots c_{ni}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

sind. Dann verschwindet aber die Determinante der quadratischen Form f:

$$D = |a_{ik}| \quad i, k = 1, 2, \dots n$$

Hieraus folgt:

1. Wenn D nicht $= 0$ ist, so kann die Anzahl der Veränderlichen durch lineare Transformation nicht verringert werden;

2. wenn $D = 0$ ist, so ist die Reduction möglich, und zwar können ebenso viele Veränderlichen weggeschafft werden, wie viele linear von einander unabhängige Lösungen das Gleichungssystem:

$$f_i(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

zulässt.

II.

Es seien D und die sämtlichen Diagonalunterdeterminanten bis zum $(m+1)$-ten Grade $= 0$, während die Diagonalunterdeterminante m-ten Grades

$$d = |a_{ik}| \quad i, k = 1, 2, \dots m$$

nicht verschwinde.

$m > 0$, denn wenn die sämtlichen Diagonalunterdeterminanten zweiten $(\alpha_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2)$ und ersten (a_{ii}) Grades verschwinden, so verschwinden auch die sämtlichen Elemente von D, dieser Fall kann aber ausgeschlossen werden.

Wir bezeichnen mit $\Delta_{\alpha\beta}$ die Determinante $(m+1)$-ten Grades, die aus d hervorgeht durch Hinzufügung der α-ten Reihe und der β-ten Colonne von D, als $(m+1)$-te Reihe resp. Colonne.

Die sämtlichen $\Delta_{\alpha\beta}$ verschwinden. Denn wenn α oder $\beta \leqq m$ ist, so sind zwei Reihen resp. Colonnen identisch;

wenn $\alpha = \beta > m$, so ist $\Delta_{\alpha\beta}$ eine Diagonalunterdeterminante $(m+1)$-ten Grades;

wenn $\alpha \gtrless \beta$ und beide $> m$ sind, so verschwindet die Determinante $(m+2)$-ten Grades, welche aus d durch Hinzufügung der α-ten und β-ten Reihe und Colonne von D entsteht, mit ihren sämtlichen Diagonalunterdeterminanten erster Ordnung nach der Voraussetzung, dann verschwinden aber die sämtlichen Unterdeterminanten erster Ordnung, nach einem bekannten Satze über symmetrische Determinanten, also ist auch $\Delta_{\alpha\beta} = 0$.

Hierauf begründet kann es nun leicht gezeigt werden, dass unter den genannten Umständen das Gleichungssystem

$$f_i(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

$(n-m)$ von einander lineare unabhängige Lösungen zulässt.

Es sei $d_{\alpha\beta}$ diejenige Determinante m-ten Grades, welche aus d durch Weglassung der α-ten $\left(\alpha \leqq m\right)$ Colonne und Hinzufügung der β-ten Colonne von D_1 und des Zeichens $(-1)^{m+\alpha+i}$ entsteht.

Dann sind die $(n-m)$ Lösungen:

$$\left.\begin{array}{ll} x_\alpha = d_{\alpha, m+\beta} & (\alpha = 1, 2, \dots m) \\ x_{m+\beta} = d & \\ x_{m+\gamma} = 0 & (\gamma = 1, 2, \dots \beta-1, \beta+1, \dots n-m) \end{array}\right\} (\beta = 1, 2, \dots n-m)$$

Durch Substitution ergiebt sich nämlich:

$$f_i(x_1 x_2 \dots x_n) = \Delta_{i, m+\beta} = 0$$

Wenn also die Form f durch die lineare Transformation transformirt wird:

$$x_\alpha = y_\alpha + \Sigma d_{\alpha, m+\beta} y_{m+\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots m)$$
$$\beta = 1, 2, \dots n-m)$$
$$x_{m+\beta} = d \,.\, y_{m+\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \dots n-m)$$

deren Determinante $= d^{n-m}$ nicht verschwindet, so fallen die Veränderlichen $y_{m+\beta}$ $(\beta = 1, 2, \dots n-m)$ aus der transformirten Form weg, und die transformirte Form wird

$$g(y_1, y_2, \dots y_m) = \Sigma a_{ik} y_i y_k$$
$$i, k = 1, 2, \dots m$$

sein mit der nicht verschwindenden Determinante d. Die Anzahl der Veränderlichen kann also durch lineare Transformation nicht weiter reducirt werden.

Klausenburg (Ungarn) 1887 Juni

Prof. Dr. J. Vályi.

4.

Zur Function $\Gamma(x)$.

Seien a und n ganze Zahlen, dann wird offenbar

$$\lim \Gamma(a+n) = \lim \varrho \Gamma(n) \qquad \lim n = \infty$$

um

$$\lim \varrho = \lim n(n+1) \dots (n+a-1) = \lim n^a \left\{1+\frac{1}{n}\right\} \dots \left\{1+\frac{a-1}{n}\right\}$$

oder

$$\lim \varrho = \lim n^a \qquad \lim n = \infty$$

daraus

$$\lim \Gamma(a+n) = \lim n^a \Gamma(n) \qquad \lim n = \infty$$

und

$$\lim \frac{\Gamma(n+a) - \Gamma(n)}{a} = \lim \Gamma(n) \frac{n^a - 1}{a}$$

Ersetzen wir nun n durch x, a durch dx, so wird

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \Gamma(x) \log x$$

Schreiben wir nun nx an die Stelle von x, so folgt

$$\int \frac{\Gamma'(nx)}{\Gamma(nx)}\, dnx = \int (\log x + \log n)\, n dx + c$$

oder

$$\log \Gamma(nx) = n\{x \log x - x\} + nx \log n + c$$

und demnach

$$\lim \frac{1}{n} \{\log \Gamma(nx) - nx\} = x \log x - x \qquad \lim n = \infty$$

Wir haben also durch ziemlich einfache Betrachtungen eine Reihe von Sätzen gewonnen, die sonst auf einem viel umständlicheren Wege abgeleitet werden.

Prag, im Juni 1887. W. Láska.

Litterarischer Bericht

XXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XIX. Roma 1886. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der 19. Band enthält folgende Abhandlungen.

A. Favaro: Ueber einige in der Biblioteca Nazionale zu Florenz kürzlich entdeckte Galileianische Documente. — Weitere Untersuchungen über das Leben und die Werke des Schweizer Mathematikers aus dem 17. Jahrhundert, Bartolomeo Sovero. — Die Optik des Claudio Tolomeo da Eugenio, Admirals von Sicilien, Schriftstellers des 12. Jahrhunderts, lateinisch hergestellt auf Grund der arabischen Uebersetzung eines unvollkommenen griechischen Textes, dann zum erstenmal nach einem Codex der Biblioteca Ambrosiana zur Beurteilung von Seiten der königlichen Akademie der Wissenschaften in Turin veröffentlicht von Gilberto Govi, Mitglied derselben Akademie. Turin, königl. Druckerei. Von Seite 220 (XLIX—171) mit neun Tafeln. — Die Bibliothek des Galileo Galilei, beschrieben und erläutert.

A. Genocchi: Kurze Bruchstücke aus dem Leben des Ingenieurs Savino Realis.

P. Riccardi: Zu einer vollständigen Sammlung der mathematischen Werke von Lorenzo Mascheroni.

Digitized by Google

S. Realis: Giovanni Plana, geboren zu Voghera den 8. November 1781, gestorben zu Turin den 29. Januar 1864.

Ch. Henry: Ueber einige ungedruckte Blätter von Lagrange. — Ungedruckte Briefe von Euler an d'Alembert. — Ungedruckte Briefe von Laplace, veröffentlicht mit einer ersten Redaction seiner Methode die Kometenbahnen zu bestimmen und einer Notiz über die Manuscripte von Pingré.

E. Narducci: Ungedruckte Lebensbeschreibungen italienischer Mathematiker, verfasst von Bernardino Baldi.

J. Dupuis: Note über eine geometrische Stelle der Republik des Platon. — Note über eine geometrische Stelle des Menon von Platon. H.

Bibliotheca Mathematica herausgegeben von Gustaf Eneström, Stockholm 1886. E. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann. 4°.

Mit diesem Bande schliesst die erste Reihe der Bibliotheca Mathematica, welche seit 1884 (s. litt. Bericht 11. S. 37) im Anschluss an die Acta Mathematica und in gleichem Format mit denselben erschienen ist. Er besteht aus 4 Numern, deren jede für sich mit dem alphabetischen Verzeichniss der Werke, Abhandlungen und Noten, dann der Recensionen beginnt. Die darin berücksichtigten Journale sind in Nr. 4 aufgeführt. Hierauf folgt ein sachlich eingeteiltes Register der Namen der Verfasser mit Verweisung auf die Numern. Unter den vermischten Notizen ist in Nr. 1. und 2. besonders zu nennen die Kritik, welche B. Boncompagni der Schrift von Maximilien Marie: „Sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques“ — zuteil werden lässt, indem er derselben zahlreiche Ungenauigkeiten und Mängel in den Angaben nachweist. — L. De Marchi rechtfertigt die Namensangabe „Maurolicio“ statt der gewöhnlichen „Maurolico“; doch mag der Name von dem Messiner Mathematiker selbst verändert worden sein; man findet dafür auch Maruli. — Eneström stellt in Nr. 1. 2. und 3. die in Schweden publicirten Schriften von Ausländern und schwedische Uebersetzungen ausländischer Werke zusammen. — S. Günther zieht den Anteil, den Albrecht Dürer an der Begründung der Curventheorie hat, ans Licht. — P. Mansion und G. Eneström geben historische Aufschlüsse über Newton's allgemeine Interpolationsformel. — Ausserdem sind in den einzelnen Numern mehrere Fragen gestellt und 1 Beantwortung gegeben. H.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von Gustaf Eneström. Stockholm 1887. Neue Folge I. 8⁰. 32 S.

Die neue Folge der Zeitschrift beruht auf dem Beschlusse die Fortführung des Verzeichnisses der Werke und Abhandlungen aufzugeben Die Geschichte der Mathematik soll von da an den Hauptgegenstand bilden. Sie gibt nun kurze historische Aufsätze in grösserer Anzahl als bisher. Dann folgen Recensionen, Mitteilung neu erschienener Schriften und Fragen. Das 1. Heft enthält folgende Aufsätze:

G. Eneström: Kurze Uebersicht über die neuen Forschungen in der Geschichte der Mathematik. — Neue Notiz über eine Abhandlung von Chr. Goldbach betreffend die Summation der Reihen, 1718 in Stockholm publicirt.

S. Günther: War die Cykloide bereits im 16. Jahrhundert bekannt?

P. Riccardi: Note bezüglich auf eine Ausgabe des Nuncius sidereus von Galilei.

P. Tannery: Die Ausziehung der Quadratwurzeln nach Nicolas Chuquet.

G. Allman: Ueber den Namen des sogenannten „Theorem des Gnomon.“ H.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Lehrbuch der praktischen Geometrie. Von Dr. Ch. August Vogler, Professor an der landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin. Erster Teil. Vorstudien und Feldmessen. Mit 248 Holzstichen und 10 Tafeln. Braunschweig 1887. Friedrich Vieweg und Sohn. 688 S.

Das Lehrbuch ist für Anfänger der Geodäsie bestimmt, macht daher geringere Ansprüche an Vorkenntnisse und Uebung als das Taschenbuch der praktischen Geometrie von Jordan, legt dagegen Gewicht auf die strenge Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung. Es behandelt nach einander die mathematische Geographie, die gebräuchlichen Masse, die Brechung des Lichts in kugelförmig begrenzten Medien, sämtlich beschreibend, die Instrumente, Fernrohr, Libellen und Axen, Kreis und Alhidade nebst Hülfsvorrichtungen, die

graphischen und mechanischen Hülfsmittel der Rechnung, die Theorie der Beobachtungsfehler, die Ausgleichung derselben nach der Methode der kleinsten Quadratsummen, das Feldmessen, hierzu das Abstecken von Linien zur Längenmessung, die Winkelabsteckung zur Coordinatenaufnahme, die Messtischaufnahme, die Theodolitaufnahme, Polygonmessung und Triangulation, die Bussolenaufnahme, das Entwerfen der Situationspläne und die Flächenberechnung, die Flächenteilung, das Abstecken langer gerader Linien, die Curvenabsteckung.

H.

Anleitung zur Berechnung geodätischer Coordinaten. Von Prof. Dr. Otto Börsch, Sectionschef im Königl. preussischen geodätischen Institut. Mit zwei Figurentafeln. Zweite, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Cassel 1885. A. Freyschmidt. 165 S.

Das Buch setzt, nach der Abfassungsweise zu urteilen, ein gewisses Mass mathematischer und das volle Mass technischer Kenntnisse voraus und gibt dem mit der höhern Geodäsie Vertrauten die zur Praxis erforderlichen factischen Angaben in Grössen und Formeln. Obwol die Titel der Abschnitte: Mathematische Hülfslehren, Erdsphäroid, geodätische u. zw. geographische, rechtwinklig sphäroidische, rechtwinklig sphärische, rechtwinklig ebene Coordinaten, Auflösung einiger geodätischen Aufgaben — auf einen fortschreitenden Entwickelungsgang hindeuten, so findet man die entsprechende Trennung und Ordnung des Stoffs in der Ausführung nicht beobachtet Möge der Leser entscheiden, ob ihm die gegebenen Erklärungen und die Anordnung des Buchs zum Gebrauche ausreichend scheinen. Die 2. Auflage berichtigt zahlreiche Fehler, die durch die notwendige Eile in der ersten Abfassung entstanden sind. H.

Erd- und Himmelskunde.

Elemente der theoretischen Astronomie für Studirende bearbeitet von Dr. Karl Israel-Holtzwart, Realgymnasial-Oberlehrer zu Frankfurt a. M. Wiesbaden 1886. J. F. Bergmann. 711 S.

Das Buch ist im echten Sinne für Studirende verfasst, d. h. es gibt nicht Unterweisung in der ausübenden Astronomie, sondern deducirt die Lösung von deren Aufgabe aus mathematischen Principien. Diese Lösung wiederum ist nicht bloss aus den Quellen zusammengestellt, sondern nach eigner Methode des Verfassers verarbeitet und

vereinfacbt. Dass zn diesem Zwecke ein grosser Teil der Principien der analytiscben Mecbanik nnd mancbe sehr bekannte Gegenstände der Analysis besonders vorgetragen werden, möcbte wol bei natürlicher Sachlage als überflüssige Zntat erscheinen, da zn einem wirklichen Stndium der Astronomie die Vertrautheit mit diesen Principien selbstverständlich notwendig ist. Wir können aher andrerseits darin ein Zeugniss dafür erhlicken, wio wenig der Verfasser anf das Vorhandensein jener natürlichen Sachlage geglanbt hat banen zn dürfen, wie überwiegend die Astronomie bisher obne ausreicbende Vorbildnng getrieben worden ist, und wie sehr es an Bücbern gefehlt hat, die das Studinm begünstigen. Hiernach kann wol das gegenwärtige Unternehmen als ein erster, babnbrechender Versuch gelten eine wesent-Lücke der Litteratnr auszufüllen. Das gesamte Werk bestebt ans 5 Teilen, deren jeder als selbständiges Ganzes gestaltet nnd einzeln käuflicb ist. Der 1. Teil: Elemente der sphäriscben Astronomie — nnd der 2te: Nachträge nnd Tafeln dazn — behandeln nnr die geometrische Seite der Astonomie; der 3. nnd 4. Teil, heide betitelt: Elemente der theoriscben Astronomie — die Dynamik dos isolirten Systems zweier Himmelskörper, die elliptischo Bahnbestimmung, Finsternisse, Meteorbahnen n. a.; der 5. Teil: Elemente der Astromecbanik — die Störnngen, nnd zwar nach einer orientirenden Einleitnng erst matbematiscbe Hülfslebren (approximative Integrationsmittel, Mecbanik), dann die von den Bahnexcentricitäten nnabhängigen — dann abhängigen Störungen des Radiusvectors nnd der Länge, dann die Störnngen der Breite, die Säcularstörnngen der Elemente, dann die Methode, die hei speciellen Störungen, wo die Convergenz nicht genügt, anznwenden ist, dann die Unveränderlicbkeit der mittleren Bewegung der Planeten. Ausserdem entbält der 5. Teil die Berecbnnng der Störungen der Rotationen, schliesslicb die bistoriscbe Uebersicbt der Astronomie von den ältesten Zeiten bis znr Gegenwart.

H.

Erdkunde nnd Matbematik in ibren gegenseitigen Beziehnngen. Von Dr. Siegmnnd Güntber, Professor an der k. technischen Hocbscbnle zn Müncben. Müncben 1887. Tbeodor Ackermann. 30 S.

Diese Schrift soll beim Uebergange des Verfassers von der mathematiscben znr geograpbiscben Lebrtätigkeit die Stelle einer Antrittsrede vertreten nnd seino Anffassung von seiner Lehranfgabe darlegen. Die Beziehnng zwiscben Erdkunde nnd Mathomatik ist die offen zutage liegende, der gemäss die Erdknnde die Dienste der Mathematik zu Hülfe nehmen mnss, nnd letztere von ihr Anfgaben ompfängt;

eine andre wird auch hier nicht gesucht. Die Geographie bietet in grosser Mannichfaltigkeit, extensiv und intensiv, quantitative Fragen dar, die der Mathematik zufallen. Es kam nur darauf an die sprechendsten Beispiele hierzu in vielseitigster Weise vorzuführen, was denn auch, mit Beginn in der alten Geschichte (Name „Geometrie" als deutlicher Beleg) geschehen ist. Wir wollen indes nur solche Punkte hervorheben, in welchen disputabele Ansichten des Verfassers enthalten sind. Er führt aus, dass mit der Bezeichnung „Geographie" die Doctrin zu eng gefasst und ihr durch Beschränkung auf die beschreibende Methode ein wesentliches Bildungselement, somit ein grosser Teil des Interesses entzogen werde; er befürwortet daher den umfassenderen Namen „Erdkunde". Da ist es denn zunächst auffallend, dass er von der „Geologie" — ein Wort das als solches gleichbedeutend mit „Erdkunde" ist — gar nicht spricht. Die gewöhnliche Einteilung der Geographie in mathematische, physische und politische wird, als wäre sie nur eben herkömmlich, kaum berührt, und was wir als Gebiet der Geologie betrachten, die Genesis des Erdkörpers, mit in die zur Erdkunde erweiterte Geopraphie gezogen. Die bisherige Spaltung des Lehrstoffs wird verworfen ohne deren praktische Gründe zu erwägen. Dass jede Forschung vor allen Erklärungsideen die Tatsachen ins Auge fassen muss, dass für die Erdkunde die Tatsachen ein sehr weites Gebiet umfassen, und dass dieser Umstand uns nötigt bei der Beschreibung länger zu verweilen als in andern Wissenszweigen, ist ganz unbeachtet geblieben. Zur Rechtfertigung möchte man vielleicht anführen, es handele sich um das Verfahren an Hochschulen, wo eine genügende Kenntniss der zu beschreibenden Gegenstände vorausgesetzt werden könne. Allein einerseits ist von verschiedenem Verfahren für verschiedenen Standpunkt der Hörer gar nicht die Rede; andrerseits liegen zwei kurze Aeusserungen vor, die, da sie nicht näher erläutert sind, ein sehr charakteristisches Licht auf die Auffassung zu werfen scheinen, die dem Auftreten zu Grunde liegen möchte. Die Gestaltung der Erdoberfläche ist zum Theil Werk der Natur, zum Teil Werk der Menschen, infolge dessen verzweigt sich auch die derselben gewidmete Doctrin, und wendet sich der eine Zweig der Physik, der andre der Völkergeschichte zu. Der Verfasser versucht nun auf Seite 2. die Einheitlichkeit der Erdkunde dadurch zu retten, dass er gestützt auf bekannte und berüchtigte Philosopheme die menschliche Tätigkeit für Naturwirkung ausgiebt. Wir wollen auf den logischen Fehler jener Philosopheme, die Verwechselung der vom Menschen geübten Combination der Naturkräfte mit den Naturkräften, nicht eingehen, sondern fragen nur, ob der Verfasser, wenn nach seiner Ansicht die Entstehung von Städten Naturwirkung ist, den Beginn der Wissenschaft solange vertagen will, bis diese Wirkung erkannt ist, und die

künftigen Städte nach bestimmten Gesetzen ermittelt werden können? Offenbar lag dem Verfasser nur daran nicht eingestehen zu müssen, dass er sich in seinen Vorträgen mit der historischen Seite der Erdkunde nicht befassen wollte, doch möchte einer solchen Auskunft das offene Bekenntniss wol vorzuziehen sein. Die zweite Aeusserung auf S. 8. erwähnt, dass unter gewissen Umständen (im besten Wortsinne) die bloss rhetorische Darstellung einer Frage der physikalischen Erdkunde der analytischen Untersuchung gegenüber gewisse Vorteile darbiete, wenn nämlich die Menge der zu berücksichtigenden Factoren eine allzu grosse wird. Letzteres ist meistens der Fall, daher will die Einschränkung auf solche Umstände wenig sagen. Die Vorteile der rhetorischen Darstellung würden wir gern einräumen, wenn wir die Beifügung: „im besten Wortsinne“ — dahin deuten könnten, dass die Darstellung nicht „bloss“ das Ziel der Rhetorik, augenblicklichen Eindruck zu machen, sondern auch die Bedingung didaktischen Vortrags, intellectuelle Continuität, im Auge haben muss, was der Wortlaut zu verwehren scheint. Die Möglichkeit beides zu vereinen sei unbestritten, aber die gewöhnlichen Beispiele rhetorischer Behandlung scientiver Fragen geben nur Zeugniss vom Gegenteil, indem sie die Hörer sprungweise, ohne stetigen Entwickelungsgang, wie auf einem Jahrmarkt, von einem Gegenstande zum andern führen, so dass dieselben viel gesehen haben, aber nichts mit nach Hause nehmen. Dies sind zwei Punkte, die noch richtig zu stellen waren, im übrigen kann es uns eher auffallen, dass manches erst versichert werden musste, was wir längst als ausgemacht zu betrachten pflegten. Einen wesentlichen Bestandteil der Schrift machen die historischen und litterarischen Nachweise zu bezüglichen Stellen aus, die am Schlusse zusammengestellt sind. Hoppe.

Practische Anleitung zur Himmelsphotographie nebst einer kurzgefassten Anleitung zur modernen photographischen Operation und Spectralphotographie im Cabinet. Von Nicolaus von Konkoly, Dr. phil., Ritter des eis. Kronen-Ordens III. Cl.; Besitzer Sr. Maj. des Kaisers von Oesterreich grosser goldenen Medaille für Kunst und Wissenschaft; Mitglied, resp. Ehrenmitglied vieler wissenschaftlichen und technischen Vereine und Gesellschaften. Mit 218 Textabbildungen. Halle a. S. 1887. Wilhelm Knapp. 372 S.

Der Gebrauch des Buches setzt vollkommene Vertrautheit mit der Chemie und Physik, besonders der Optik, andrerseits die Gelegenheit voraus die Kunst in einem vollständig eingerichteten Laboratorium dauernd auszuüben. Der I. Teil behandelt die Einrichtung des Laboratoriums, namentlich der (nur rot oder nur gelb beleuchteten) Dunkelkammer, dann das Präpariren von Platten; der

Digitized by Google

II. Teil das helle, aber auch zum Dunkelmachen eingerichtete Cabinet; der III. Teil die Aufnahme der Himmelsobjecte überhaupt, dann im einzelnen die der Sonne, des Mondes, der Planeten und Kometen, der Fixsterne, der Sternschnuppen, des Nordlichts, der Blitze, der Corona, Chromosphäre und Sonnenflecke, der Fixsternspectra, und zwar werden sowol die Vorschriften für das Verfahren als auch die Berichte über ausgeführte Aufnahmen gegeben. H.

Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie und der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft. Redigirt von Dr. J. Hann (Wien, Hohe Warte) und W. Köppen (Hamburg, Seewarte). Dritter Jahrgang 1886. (zugleich XXI. Bd. d. „Zeitschr. d. Oesterr. Ges. f. Met.") Berlin, A. Asher u. Co.

Dieser Jahrgang ist der erste, welcher von beiden Gesellschaften gemeinschaftlich herausgegeben wird Die Zeitschrift erscheint in monatlichen Heften (zu 48 Seiten), deren jedes erst 3 oder 4 Aufsätze, dann eine grössere Anzahl kleinerer Mitteilungen, dann einen Litteraturbericht enthält. Die Aufsätze im vorliegenden Jahrgange sind folgende.

A. Woeikof: Klima an der Lenamündung nach einjährigen Beobachtungen.

O. Jesse: Die auffallenden Abenderscheinungen am Himmel im Juni und Juli 1885.

H. Hildebrandsson: Die mittlere Bewegung der oberen Luftströme.

F. Erk: Der Föhnsturm vom 15. und 16. Oct. 1885 und seine Wirkungen im baierischen Gebirge.

A. Magelssen: Ueber Wellenbildungen in der jährlichen Periode der Lufttemperatur. — Temperaturverhältnisse kommender Jahre.

J. Liznar: Einfluss des Mondes auf die meteorol. Elemente nach den Beobachtungn zu Batavia. — Das Klima von Batavia.

W. Schaper: Ueber die Bestimmung der magnetischen Inclination mittels Erdinductor und Telephon.

J. Hann: Zur Kenntniss der Verteilung des Luftdruckes auf der Erdoberfläche. — Gewitterperioden in Wien.

H. Hoffmann: Phänologische Studien.

E. Jhne: Karte der Aufblühzeit von Syringa vulgaris in Europa.

P. Schreiber: Einige Umformungen der Formel für barometrische Höhenmessungen zur Verwendung bei Reduction von Baro-

meterständen. — Bestimmnng der Bewegung eines Lnftballons dnrch trigonometrische Messnngen.

W. Köppen: Die Untersuchungen von Dr. J. van Bebher über typische Witternngserscheinnngen. — Der Orkan vom 14. Mai in Crossen a. d. O. — Der Orkan vom 12. Mai zn Madrid.

J. M. Pernter: Ueber Langley's Untersnchnngen der Sonnenstrahlnng. — Augot's theoretische Untersuchungen über die Verteilnng der Wärme auf der Erde.

J. Manrer: Temperatnrleitnng nnd Strahlnng der ruhenden Atmosphäre.

F. H. Buchholtz: Fahrt des Militär-Ballons Barbara am 10. Dec. 1885.

E. Reimann: Einiges über Gewittererscheinungen im Riesengebirge.

N. Ekholm: Ueber die tägliche Variation des Lnftdruckes während des nordischen Winters.

J. van Bebber: Untersnchnngen von Elias Loomis über die Form und die Bewegung der Cyklonen. — Die Veröffentlichnngen des Kgl. Niederländischen Instituts.

E. Brückner: Die Schwanknngen des Wasserstandes im Schwarzen Meer und ihre Ursachen.

F. Vettin: Luftströmnngen über Berlin in den 4 Jahreszeiten. — Einwirkurg der barometrischen Maxima und Minima auf die Richtnng des Windes und des Wolkenzuges.

Hugo Meyer: Gewitter des obern Leinetales am 1. Jnni 1886.

A. Hazen: Thermometer-Anfstellung.

F. M. Draenert: Verteilnng der Regenmengen in Brasilien.

A. Richter: Tägliche Drehung des Wolkenzuges.

G. Hellmann: Beiträge zur Kenntniss der Niederschlagsverhältnisse von Deutschland.

R. Assmann: Der Orkan vom 14. Mai in Crossen a. d. O.

F. Lingg: Ungewöhnliche Anomalie zwischen gleichzeitigen Barometerständen von München und dem Wendelstein.

G. Schubring: Reduction des Barometerstandes anf den Meeresspiegel mit Hülfe einer graphischen Tafel.

K. Dove: Der Orkan vom 10. Aug. 1886 bei Northeim und Cattenburg.

F. Busch: Zur Polarisation des zerstreuten Himmelslichtes. — Beobachtungen über den Gang der neutralen Punkte. H.

Physik.

Thermodynamique. Par J. Bertrand, de l'Académie Française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. Paris 1887. Gauthier-Villars. 294 S.

Eine neue Bearbeitung der Wärmetheorie nach ihrem heutigen Standpunkt unternimmt der Verfasser aus dem Gesichtspunkt der strengst möglichen logischen Kritik. Er sagt, man könne in dieser Beziehung nicht alles leisten, aber doch sehr viel bessern und die hauptsächlichen logischen Mängel beseitigen. Seine logischen Grundsätze hat er nicht formulirt ausgesprochen, sondern nur in Beispielen angedeutet, aus denen sie sich einigermassen abstrahiren lassen. Er rügt es, dass man Ideen als Axiome — sei es als Hypothesen oder als ursprünglich gewiss — betrachtet, in denen notwendige Fragen gar nicht zum Bewusstsein gezogen sind. Hiermit ist in der Tat ein herrschender Fehler der Forschungslogik ans Licht gezogen, der sich aber weit bestimmter bezeichnen lässt, wenn man nur nicht bei der vagen Auffassung des Wesens der Hypothese stehen bleibt, welche darin nichts als eine interimistische Stütze einer noch unfertigen Theorie, statt eines wesentlichen Elements alles exacten Wissens sieht. Theorie hat nur Sinn relativ zur Hypothese, und umgekehrt, und apriori hat nur Sinn in der Anwendung der (empirisch befestigten) Theorie auf die neue Wirklichkeit. Die angebliche Erkenntniss apriori, in welcher der Verfasser die Nennung der wesentlichen Momente vermisst, ist eben nichts als ungeprüfte Meinung. Mit Recht begrüsst man den ersten verbindenden Gedanken (z. B. Descartes: Erhaltung der Kraft, Schiaparelli: Identität von Kometen und Sternschnuppen) als grosse Entdeckung. Mit ihm ist der Bacillus, die Universal-Ursache der Erscheinung aufgewiesen und die Hoffnung auf ihre Erklärung erweckt. Aber von da an können Jahrhunderte vergehen, ehe es den Anstrengungen der Forscher gelingt, eine brauchbare Hypothese, d. h. nicht nur im allgemeinen haltbar, sondern auch nach allen Seiten ausschliessend und nur soviel unbestimmt lassend, als im Gedanken durchlaufen werden kann, aufzufinden. Der sehr verbreitete Fehler, um den es sich handelt, ist die Verwechselung jenes verbindenden Gedankens, dem zur Erklärung der Erscheinung das Notwendigste noch fehlt, mit der Hypothese als definitiver Errungenschaft. Im Vorliegenden geht der Verfasser, nachdem er in der Kürze eine Uebersicht über die Wärmetheorie für vollkommene Gase gegeben hat, vom ersten verbindenden Gedanken aus, den er Sadi Carnot zuschreibt, ontwickelt zuerst dessen Ideen, dann die Ideen von Robert Mayor und geht dann zu Theoremen, zunächst

Digitized by Google

von Carnot, dann ergänzend und berichtigend von Clausius über. Die folgenden Capitel behandeln die Differentialgleichungen, die charakteristischen Functionen, einige Sätze, einige Probleme, einige Anwendungen, die Condensation der Dämpfe während des Ausströmens, Cyklus des Dampfes und Diagramme der Maschinen, nicht umkehrbare Cyklen, die Arbeit der Elektricität. Hoppe.

Zeitschrift für den Physikalischen und Chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von Dr. E. Mach, Professor der deutschen Universität zu Prag, und Dr. B. Schwalbe, Professor und Director des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin, herausgegeben von Dr. Fritz Poske. Erster Jahrgang. Erstes Heft. Berlin 1887. Julius Springer. 4°. 40 S.

Die neu erscheinende Zeitschrift setzt sich die Aufgabe, einerseits eine Verständigung über die leitenden Principien wie über die specielle Behandlung des Unterrichts herbeizuführen, und andrerseits es zu vermitteln, dass die von Einzelnen gewonnenen Erfahrungen und Einsichten zu allgemeiner Anerkennung und Wirkung gelangen. An erster Stelle wird die Methode ins Auge gefasst und deren planmässige Ausbildung auf historischer und logischer Grundlage angestrebt werden. In Hinsicht auf den experimentellen Teil des Unterrichts sollen neue Unterrichtsmittel und Verbesserungen von solchen beschrieben, sowie Anleitungen zum Gebrauche der Apparate und zum Anstellen von Versuchen überhaupt gegeben werden. Auch der mathematischen Seite des Unterrichts wird Aufmerksamkeit und Pflege zugewandt. Namentlich ist eine regelmässige, nach rationellen Gesichtspunkten ausgeführte Zusammenstellung von Aufgaben in Aussicht genommen. Ferner werden aus der Fachlitteratur des In- und Auslandes Berichte geliefert, und neu erschienene Schriften besprochen werden. 6 Hefte bilden einen Jahrgang zu 30 Bogen. Das erste Heft enthält an grössern Aufsätzen E. Mach: Ueber den Unterricht in der Wärmelehre. A. Weinhold: Eine Influenzmaschine ohne Polwechsel. M. Koppe: Der Foucault'sche Pendelversuch. Fr. C. G. Müller: Ein Demonstrationsthermometer. Joh. Bergmann: Ein neuer Apparat zur Darstellung einfacher Schwingungen.
H.

Vermischte Schriften.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, Professor na Escola Polytechnica do

Porto, Antigo Professor na Universidade de Coimbra, Socio de Academia das Sciencias de Lisboa, etc. Vol. VII. Coimbra 1886. Imprensa da Universidade.

Der 7. Band enthält folgende Abhandlungen und Noten.

E. Cesàro: Arithmetische Bemerkungen. — Auszüge aus einem Briefe an Herrn d'Ocagne. — Bemerkungen über die Theorie der Reihen.

J. C. d'Oliveira Ramos: Ueber die Zerlegung der Kreisfunctionen.

Ramos und Casimiro J. de Faria: Ueber die Coefficienten der Formel, welche die Derivirte beliebiger Ordnung der zusammengesetzten Functionen gibt.

M. d'Ocagne: Ueber gewisse Bestimmungen von Grenzwerten; mittlere Grenzwerte zweier Zahlen. — Auszug aus einem Briefe an F. Gomes Teixeira. — Ueber gewisse arithmetische Summationen. — Ueber gewisse symmetrische Functionen; Anwendung auf die Berechnung der Summe gleichhoher Potenzen und Wurzeln einer Gleichung. — Ueber die rectificabeln Ellipsenbogen.

L. F. Marrecas Ferreira: Ueber die Theorie des Hyperboloids.

J. M. Rodrigues: Theorie der Rotation.

H. le Pont: Geometrische Note. — Neuer Beweis des Ch. Dupin'schen Satzes. - Note über die Bewegung eines von festem Centrum aus getriebenen materiellen Punktes.

Gino Loria: Note über die Multiplication zweier Determinanten. — Ueber eine Eigenschaft der Determinante einer Orthogonalsubstitution.

Rodolpho Guimarães: Ueber einen Satz betreffend die Vergleichung von Ellipsenbogen.

J. Bruno de Cabedo: Ueber eine Formel von Taylor.

F. Gomes Teixeira: Anwendungen der Formel, welche die Derivirten beliebiger Ordnung der Functionen von Functionen gibt.

Duarte Leite: Ueber den transcendenten Teil des Integrals einer rationalen Function. H.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb, Editor. Thomas Craig, Associate Editor. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Volume IX. Baltimore 1887. Publication Agency of the Johns Hopkins University.

Der 9. Band enthält folgende Abhandlnngen.

J. J. Sylvester: Vorlesungen über die Theorie der Reciprocanten.

W. E. Story: Eine neue Methode in der analytischen Geometrie.

F. N. Cole: Klein's Ikosaeder.

A. G. Greenhill: Wellenbewegung in der Hydrodynamik.

A. S. Hatheway: Eine Abhandlnng in der Zahlentheorie.

H. B. Fine: Ein Theorem betreffend 'die Singularitäten von Curven mehrfacher Krümmnng.

H. Dallas: Eine Note über Kegelschnittbüschel.

P. A. Mac Mahon: Beobachtungen an Erzeugnngsmethoden der Theorie der Invarianten.

Cayley: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen.

G. Paxton Yonng: Notwendige nnd hinreichende Formen der Wurzeln uniserialer Abel'scher Gleichungen.

W. Pitt Durfee: Symmetrische Functionen der 14te (s. Bd. V. p. 348).

M. D'Ocagne: Ueber eine Classe merkwürdiger Zahlen.

M. Hermite: Anszüge ans 2 Briefen au M. Craig.

F. Franklin: Zwei Beweise für Chaucby's Theorem. H.

Journal of the College of Science, Imperial University, Japan Vol. I. part II. III. Tokyo 1887. Published by the university. 97 + 126 S.

Die Herausgabe wird von einem Comitee der Universität besorgt bestehend aus den Professoren D. Kikuchi, K. Mitsukuri, C. G. Knott (aus Edinburgh) und S. Sekiya. Der 2. Teil enthält eine deutsche Abhandlnng:

Diro Kitao: Beiträge zur Theorie der Bewegung der Erdatmosphäre nnd der Wirbelstürme.

Der 3. Teil enthält ausser 3 zoologisch-physiologischen, folgende physikalische englische Abhandlnngen:

Aikitu Tanakadate: Ein Taschen-Galvanometer. — Die Constanten einer Linse.

B. Koto: Vorkommen von Piedmontit in Japan.

S. Sekiya: Das starke japanische Erdbeben vom 15. Jannar 1887.

C. G. Knott: Elektrischer Widerstand von Nickel bei hohen Temperaturen. — Elektrische Eigenschaften des hydrogenisirten Palladiums. H.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. XIII. 1886.

Von den im 13. Bande enthaltenen 11 Abhandlungen gehört eine der Mathematik, eine der Physik an; diese sind:

A. Berger: Ueber eine Anwendung der Theorie der binomischen Gleichnngen zur Summation einiger Reihen.

K. A°ngström: Ueber eine neue Methode absolute Messungen der strahlenden Wärme zu machen, sowie ein Instrument um die Sonnenstrahlung einzuregistriren. H.

Annnaire de l'observatoire de Montsouris pour l'an 1887. Météorologie, agricnlture, hygiène. Paris. Gauthier-Villars.

Der diesjährige Band enthält ausser dem Kalender die tabellarischen Resultate der in Paris und auf dem Montsouris gemachten meteorologischen Beobachtungen, insbesondere betreffend die Sonnenstrahlung, Kälte, Wasserdampfspannung, Feuchtigkeit, Lufttemperatur, Regenmenge, Erdmagnetismus nnd den Wind; ferner die chemische Untersuchnng der Luft, des meteorischen und fliessenden Wassers; schliesslich die 9te Abhandlung von Dr. Miquel über die Bacterien der Pariser Luft. H.

Litterarischer Bericht
XXII.

Lehrbücher.

Lehrbuch der Algebra. Theoretisch-praktische Anleitung zum Studium der Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, insbesondere an Gymnasien, bearbeitet von Prof. Dr. J. van Hengel, Oberlehrer am Königlichen Gymnasium zu Emmerich. Freiburg i. Br. 1887. Herder. 489 S.

Das Buch macht weniger den Eindruck eines Lehrbuchs als vielmehr der Darstellung einer muntern, ungebundenen Handhabung des Unterrichts. Nur in diesem Sinne, nur als augenblickliche Einfälle zur Erhaltung der lebendigen Teilnahme und des Selbstdenkens der Schüler kann man die Freiheiten billigen, die sich der Verfasser nimmt, indem er z. B. die Gleichungen einteilt in richtige und falsche, Begriffserklärungen gibt, die nichts sind als Setzungen eines Namens für den andern u. s. w. Ihm selbst mag ersteres gute Dienste tun um zur Probe aufzufordern, letzteres um Bekanntes zu vergegenwärtigen. Aber eine dauernde, auch für andere Lehrer brauchbare Grundlage wird darin nicht geliefert, wenn wir auch einräumen, dass alle jene Freiheiten geschickt genug angebracht sind um, selbst ohne Kennzeichnung des wissenschaftlichen Kernes, welcher in der Tat in keiner Weise hervorgehoben wird, den zu erlernenden doctrinären Inhalt nicht zu verhüllen, oder die Uebersicht merklich zu beeinträchtigen. Hiervon abgesehen ist an der Lehrmethode eigentümlich der Gang vom Allgemeinen zum Speciellen. Während man sich grösstenteils dafür entschieden hat, dass die Begriffe der Arithmetik durch successive Erweiterung zu entwickeln

sind, hat der Verfasser die entgegengesetzte Wahl getroffen. Man sollte meinen, dass der Ausfall der Bearbeitung den Misgriff deutlich genug an den Tag brächte. Die Operationen werden erst insgesamt, dann einzeln behandelt. In dem Capitel von der einzelnen wird eine alle Fälle umfassen sollende Definition an die Spitze gestellt, eine Definition die vom Begriffsinhalt gar nichts sagt, sondern ihn nur durch Bedingungen umgrenzt, überdies auf keinen Specialfall anwendbar ist, sondern nur verschiedene in Beziehung setzt. Der Schüler wird daher weder aus ihr den Sinn der Operation verstehen lernen, noch, wenn sie ihm bereits bekannt ist, Einsicht gewinnen, ob sie mit seinem Begriffe vereinbar, ob sie richtig oder vielmehr — dass sie falsch ist. Nun werden durch Specialisirung eine Reihe arithmetische Sätze als leichte Folgerungen aus der Definition gezogen, endlich eine Anzahl Beispiele gerechnet. Letztere holen dann leidlich das Versäumte nach und können allenfalls einen Begriff von der Operation geben, sogut er eben in der elementaren Rechenschule gegeben wird. Ein Beispiel einer solchen Definition ist die folgende. (S. 32.) „Multiplication ist das Ableiten einer Zahl (Product) aus zwei oder mehr Zahlen (Factoren), wenn sie von diesen so abhängig ist, dass das Resultat 0 ist, wenn irgend einer der Factoren 0 ist, und dass, wenn an die Stelle irgend eines der Factoren alle seine Summanden einzeln eintreten, die Summe dieser Einzelresultate gleich dem zu suchenden Resultat ist.“ Die Operation des Multiplicirens bleibt hiernach Problem, nicht einmal eine Probe irgend eines Resultats ist aufgestellt; man weiss nur, wenn mehrere Resultate vorliegen und der Bedingung nicht entsprechen, dass mindestens eines falsch sein muss, nicht aber, welches. Die Bedingung ist nur eine Umschreibung der Functionsgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ anzuwenden auf jeden Factor. Es ist klar, dass diese Bestimmung der Function nicht ausreicht; es muss auch ein Specialwert gegeben sein, und hierfür ist der aufgestellte Specialwert $f(0) = 0$ gerade der einzig unbrauchbare; überdies ist er ganz überflüssig, da er schon aus $f(x+0) = f(x) + f(0)$ folgt. Demnach bedarf die Definition einer zweifachen Berichtigung. Allein mit der leichten Ergänzung und Beseitigung ist es nicht getan, Es müssten auch alle Folgerungen darnach revidirt werden. Unter den Beweisen stützen sich manche stillschweigend darauf, dass das Product durch die Factoren bestimmt wäre, was zu beweisen gar nicht versucht ist; ein Beweis (Satz 12.) ist geradezu falsch, weil er das Zubeweisende voraussetzt; ausserdem würde der Nachweis des Zutreffens des Specialwerts überall hinzukommen müssen. Im ganzen kann daher fast nichts stehen bleiben. Im Vorwort äussert der Verfasser, die Algebra müsse den Schüler ihre Wahrheiten an sich erkennen lassen. Gesetzt, jene

Digitized by Google

Fehler in obiger Definition und in ihren Folgerungen wären berichtigt, was hat der Verfasser dazu getan, den Schüler ihre Wahrheit erkennen zu lassen? Können wir nun auch dem Buche keine Leistung für den Unterricht zu erkennen, so mag doch wenigstens die eine Leistung für das Studium der Methode genannt werden: die Bearbeitung stellt aufs neue die Verkehrtheit von Grassmann's Ansicht ans Licht, wenn eine mathematische Lehre dem Anfänger nicht einleuchte, so sei sie nur noch nicht allgemein genug aufgefasst.

Hoppe.

Lehrbuch der elementaren Mathematik zum Schul- und Selbstunterricht für Lehrer und Lehramtskandidaten sowie als Vorschule auf das eigentliche mathematische Studium. Von C. E. Enholtz. I. Theil. Reine Arithmetik. Aarau 1887. H. R. Sauerlaender.

Die Bearbeitung des Buches deutet mehr auf die Bestimmung hin, Nichtmathematikern Kenntniss von der Mathematik zu geben, als Anfänger für das eigene Betreiben derselben vorzubilden, wodurch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dass Mancher dadurch Neigung zum Studium gewinnt. Der Vortrag ist vorwaltend pragmatisch; nur mit Auswahl werden Lehren in formulirten Sätzen oder in systematischer Stellung zusammengefasst. Die Begriffe werden bei der Erläuterung nicht sonderlich scharf gefasst; es scheint als solle der niedere Standpunkt der Verstandesentwickelung der Leser respectirt und conservirt, aber ja niemals erhöht werden Soweit indes dieses Princip es zuliess, ist auf Correctheit des Ausdrucks sichtlich Fleiss gewandt worden. Zu erwähnen ist noch, dass reichliche historische Angaben jedem Abschnitte folgen. Gegenwärtig ist die erste der 3 Lieferungen erschienen; das Ganze soll 17 Bogen stark werden.

H.

Lehr- und Uebungsbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra für die untern Classen der Mittelschulen. Von Moriz Bretschneider, k. k. Oberlieutenant im Infant. Reg. Nr. 28, Lehrer der Mathematik an der k. k. Militär-Unter-Realschule zu Eisenstadt. I. Theil. Mit 6 in den Text eingedruckten Figuren. Wien 1887. Gerold u. Comp. Stuttgart, Julius Maier. 118 S.

Dieser erste Teil umfasst nur die Operationen an natürlichen Zahlen, und zwar mit Einschluss des Potenzirens und Radicirens, mit Ausschluss des Logarithmirens. Bedeutung und Gebrauch der Operations- und Grössenbezeichnungen werden im grössten Umfange leichtfasslich, kurz und correct erklärt, auch die geschichtlichen Angaben nebst etymologischer Erklärung hinzugefügt. Formelle

Deductionen und Beweise werden nicht geführt, überhaupt die logische Tätigkeit nicht zum Bewusstsein gebracht. Doch wird die Begründung jeder Lehre am Beispiele derart dargetan, dass die Allgemeingültigkeit vollkommen einleuchtet. Erläuterungs- und Uebungsbeispiele gibt das Buch in grosser Anzahl. Nach allem erzielt es vollständige Kenntinss und praktische Fertigkeit. Auf das Studium hat es in keiner Weise hingearbeitet; doch stehen die dadurch beigebrachten Begriffe mit der Wissenschaft im besten Einklang.

H.

Die Elemente der Geometrie für den Schulunterricht bearbeitet von H. Seeger, Director des Realgymnasiums zu Güstrow. Mit sechs Figurentafeln. Wismar 1887. Hinstorff. 211 S.

Die Eigentümlichkeit der vom Verfasser gewählten Lehrmethode gibt sich schon in der Anordnung des Lehrstoffs zu erkennen. Die Hauptabschnitte sind nämlich: Die geometrischen Grundgebilde und ihre elementaren Eigenschaften; die Lehre von der Aehnlichkeit; Anwendung der Algebra auf die Geometrie; Bruchstück aus der neueren Geometrie; 6 Anhänge; Aufgaben. Zunächst findet man, dass die Lehre von der Flächengleichheit im Verzeichniss ganz fehlt. Auf die Congruenz folgt sogleich die Aehnlichkeit, dann die rechnende Geometrie. Offenbar ergeben sich manche Sätze über Flächengleichheit von selbst aus der Inhaltsrechnung: Dreiecke von gleicher Basis und Höhe sind gleich, weil man ihren Inhalt aus beiden berechnet. Dass indes der Verfasser aus diesem Grunde das ganze Lehrgebiet der Verwandlung der Figuren für überflüssig gehalten haben sollte, würde kaum glaublich scheinen, wenn nicht weitere Bestätigungen hinzukämen. Sehen wir erst zu, wie mangelhaft der Rechtfertigungsgrund ist. Dass man alle elementaren Arealrelationen nachträglich aus den Inhaltsformeln herleiten kann, sei zugegeben. Unmittelbar evident sind daraus die wenigstens. Soll aber dies der einzige Weg sein, auf dem der Schüler die ersteren kennen lernt, so entgeht ihm der einfache Zusammenhang, in welchen die constructive Synthesis die ganze Reihe von Verwandlungssätzen mit der Congruenzlehre bringt, und Grössenbeziehungen, die nach einander durch leichte Folgerungen hervorgehen, treten auf als bedingt durch die Genauigkeit der Ausmessung, deren Theorie wieder basirt werden musste auf die complicirte Unterscheidung der commensurabeln und incommensurabeln Linien; überdies entgehen ihm die constructiven Verwandlungsaufgaben. Liest man aber die Behandlungsweise des Lehrstofls vom 3. Abschnitt an, so kann man nicht weiter daran zweifeln, dass der Verfasser die Fähigkeit des Construirens wirklich

für nichts achtet und das Ausrechnen allein für instructiv hält. Denn mit der Einführung der Proportionen (deren Theorie freilich arithmetische Begründung nicht entbehren kann) wendet sich der fernere Lehrgang ganz der Arithmetik zu. Einmal äussert sich auch der Verfasser in Betreff gewisser Sätze dahin, dass man sie zwar auch geometrisch herleiten könne, aber der arithmetische Weg vorzuziehen sei; ein anderesmal, dass die Beweise an der Figur mühevoller zu lesen seien, weil der Blick auf zweierlei sich zu richten gezwungen werde. Letztere Bemerkung ist gewiss zutreffend, doch gerade vom geringsten Belang in den Elementen der Geometrie. Da alle Messung mit einem Fehler behaftet ist, so pflegt die einseitige Bevorzugung metrischen Verfahrens mit Geringschätzung ideeller Strenge verbunden aufzutreten. Es ist daher hervorzuheben, dass das Lehrbuch über die Forderungen exacter Logik nicht leichtfertig hinweg geht; nur zeigen sich dabei einige leicht zu beseitigende Mängel. Bei Begründung der Proportionslehre wird der Fall der Incommensurabilität eingehend erörtert, und die strenge Gültigkeit der Gleichsetzung irrationaler, nur durch Grenzeneinschliessung zu definirender Verhältnisszahlen wenigstens ausgesprochen. Warum fehlt aber die indirecte Schlussfolgerung, welche den Satz über die Grenzeneinschliessung sofort in voller Allgemeinheit evident macht? Ist sie zu schwer oder zu leicht zu verstehen? Von selbst versteht sie sich nicht, denn grosse Mathematiker sind daran vorbeigegangen ohne sie zu finden; wird sie aber richtig geführt, so versteht sie jeder Anfänger. Ferner ist die Begriffsbestimmung des Winkels richtig gegeben, und der Parallelensatz, zwar nicht als Grundsatz, sondern als Lehrsatz bezeichnet, ohne Versuch eines Beweises aufgestellt. Dagegen hat der Verfasser im Anhang, auf den er hier verweist, einen falschen Beweis von Bertrand rein historisch, ohne eignes Urteil aufgeführt und durch Nennung des Autors sich selbst von der Verantwortlichkeit frei gemacht. Seine eigne Bemerkung zu dem Satze sagt: der Beweis könne „ohne Zuziehung unendlicher Flächenräume" nicht geführt werden. In der Tat ist dies wahr, der Satz, kann weder ohne noch mit Zuziehung derselben bewiesen werden. Freilich verleitet der Beisatz „zu falscher Meinung, doch sind Meinungen nicht Sache mathematischer Lehren. Auch die im Anhang vorgetragene Methode der Untersuchung von Linienverhältnissen auf Commensurabilität meidet äusserst umsichtig den im 221. litt. Bericht, S. 6. gerügten Irrtum eines andern Lehrbuchs und stellt die Folgerungen in exacter Beschränkung auf. Aus der neuern synthetischen Geometrie sind die Lehren von den harmonischen Punkten, harmonische Strahlen, Pol und Polare am Kreise, Potenzlinie zweier Kreise und Kreisberührungen aufgenommen. Hoppe.

Digitized by Google

Elemente der reinen Mechanik als Vorstudien für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und technischen Hochschulen sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. Jos. Finger, o. ö. Professor der reinen Mechanik an der k. k. technischen Hochschule und Docent an der k. k. Universität zu Wien. Mit 200 Holzschnitten. Wien 1886. Alfred Hölder. 792 S.

Die 2 Jahre früher erschienene erste Lieferung ist im '2. litt. Bericht S. 19. besprochen. Wie daselbst bereits erwähnt, ist als oberste Einteilung gewählt die in Mechanik des Punkts und des Punktsystems, dann erst eine jede in Statik und Dynamik. Die Statik des Punktes wird erst für die Ebene, dann für den Raum behandelt, eine Zerlegung die nicht weiter fortgeführt wird, und die bei analytischer Methode sich wol stets als unpraktisch erweisen möchte. Weiter wird die Statik des Punktes eingeteilt in die des freien Punktes und die für feste Fläche oder Linie. Speciell knüpft sich an die Statik der Schwere. Die Dynamik des Punktes wird erst für geradlinige, dann für krummlinige Bewegung behandelt. Die Statik des Punktsystems beschränkt sich auf die Kette, d. h. auf den Fall, wo Spannungen nur zwischen den der Reihe nach folgenden Punkten stattfinden. In den allgemeinen Principien der Mechanik wird nachher Statik und Dynamik in ununterbrochenem Nexus behandelt, also Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und Alembert'sches Princip unmittelbar einander folgend entwickelt. Dann geht das Buch ausführlich auf die Mechanik der starren Körper ein, die sich in eine grössere Anzahl allgemeiner und specieller Teile scheidet. Den Schluss bilden die Principien der Hydromechanik. Der Anhang enthält die zum Verständniss der Mechanik notwendigen mathematischen Grundlagen. H.

Methodischer Leitfaden der Physik und Chemie. Für höhere Töchterschulen, Lehrerinnenseminarien und Fortbildungsanstalten. Bearbeitet von Dr. Karl Jansen, Oberlehrer am Realgymnasium zu Düsseldorf. Freiburg i. Br. 1887. Herder. 252 S.

Das Buch ist in 4 Curse geteilt. Von diesen umfasst der erste die Wärme, den Magnetismus, die Reibungselektricität und den Galvanismus, der zweite die allgemeinen Eigenschaften der Stoffe, die Mechanik der festen, der flüssigen und der gasförmigen Körper, der dritte Wellen, Schall und Licht, der vierte ausgewählte Teile der Physik und die Chemie, eine Anordnung die sich der Stufe des Verstandesentwickelung anschliesst. In jedem Capitel wird eine numerirte Reihe von Gesetzen aufgestellt, auf das eine und andre Ge-

setz folgen eine oder mehrere Bestätigungen durch Beobachtungen ohne oder mit Experiment, letzteres mit Abbildung. Die Gesetze werden grössten Teils nur von ihrer qualitativen Seite aufgefasst, die Quantität kommt nur vor, wo das Gesetz wesentlich darin besteht, und dann auch meistens bloss comparativ ohne bestimmte Angaben. Offenbar bieten der erste und dritte Cursus hinreichend viele qualitativ charakteristische Erscheinungen dar um eine Beschränkung auf dieselben zuzulassen. H.

Naturlehre im Anschluss an das Lesebuch von Dr. J. Bumüller und Dr. J. Schuster. Illustrirte Ausgabe, neu bearbeitet von Dr. Max Wildermann, Gymnasial-Oberlehrer. Mit 108 Abbildungen. Freiburg i. Br. 1887. Herder. 150 S.

Das Buch überliefert in leichtfasslichem, beschreibendem Vortrage alle Kenntnisse, welche Jeder auf der Schule erwerben muss, um sich bei dem, was er wahrnimmt, soweit es der anorganischen Welt angehört, über die darin enthaltenen Vorgänge und deren Zusammenhang deutliche Rechenschaft zu geben. Die Abschnitte sind der Reihe nach: Bewegung und Gleichgewicht, Schall, Wärme, Licht, Magnetismus und Elektricität. In gewissem Umfange werden auch die technischen Verwendungen und Vorrichtungen beschrieben und erklärt. Die zwischen dem Text stehenden Abbildungen sind zur Orientirung sehr günstig gewählt. H.

Sammlungen.

Beispiele und Aufgaben zur Algebra. Für Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und zum Selbstunterricht. Von Dr. Georg Lauteschläger. Zwölfte, vielfach vermehrte Auflage bearbeitet von Dr. Fr. Graefe, Professor. Darmstadt 1887. Arnold Bergsträsser. 132 S.

Als Beispiele sind bezeichnet zu lösende Gleichungen 1., 2., 3., 4. Grades und höherer Grade, bereits in Zeichen gegeben, deren bekannte Grössen Specialzahlen sind, als Aufgaben solche, die in Worten aufgestellt sind und vor der Lösung in Zeichen umgesetzt werden sollen. Letztere, die den 2. Teil des Buchs bilden, führen auf Gleichungen 1., 2. Grades, diophantische Gleichungen, Pro-

gressionen. Im Anhang stehen Aufgaben für die Determinantenlehre. In 12. Auflage sind die „Beispiele" sehr vermehrt, und ist der Anhang hinzugekommen. Lösungen sind nicht angegeben.

H.

Dr. Ernst Kleinpaulsche Anweisung zum praktischen Rechnen Ein methodisches Handbuch für den Unterricht und Selbstunterricht im Rechnen. Fünfte, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Von Dr. F. Mertens. Bremen 1886. M. Heinsius. 546 S.

Das Buch ist eine methodisch geordnete Sammlung von Fragen und Aufgaben zur gründlichen Erlernung und Einübung des bürgerlichen Rechnens für Kinder, bei denen man noch keinen Begriff von Zahlen voraussetzen darf. Auch der vorausgeschickte kleine Aufsatz: „Allgemeine Gesichtspunkte" — welcher vielleicht mit der Bezeichnung „Anweisung" auf dem Titel gemeint ist, sofern dem Vorwort zufolge die neue Ausgabe als Anweisung sich von dem Rechenbuche selbst unterscheiden soll, ist der Hauptsache nach nur Aufzählung der verschiedenen Seiten, von welchen aus der Begriff der Zahlen und Operationen zur Deutlichkeit zu bringen ist, welche man aber aus der Reihenfolge der Uebungen schon besser und vollständiger ersieht. Das Buch erscheint in 3 Heften. Das erste schreitet in stufenweiser Erweiterung des Zahlengebiets bis 5, 10, 20, 100, 1000 fort und fügt auf letzter Stufe die gemeinen und Decimalbrüche hinzu. Das zweite Heft übt die Operationen an unbenannten, dann benannten Zahlen, dann Brüchen, das dritte die bürgerlichen und kaufmännischen Rechnungsarten ein. H.

Tabellen.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Von Theodor Wittstein, Dr. phil. und Professor. Zweite Auflage. Hannover 1887. Hahn. 20 S.

Die 1. Tafel giebt auf 4 Seiten die Logarithmen der Zahlen 100 bis 1899 nebst Differenzen, die 2te auf 2 Seiten die Logarithmen der Summen und Differenzen für die der Zahlen, die 3te auf 2 Seiten die trigonometrischen Functionen für die ganzen und halben Grade. die 4te auf 6 Seiten die Logarithmen derselben durch die Sechstel Grade, die 5te auf auf 2 Seiten die Antilogarithmen.

H.

Tafeln zur Berechnung der Mondphasen. Zum Gebrauch beim Unterricht in der mathematischen Geographie entworfen und mit erklärendem Texte herausgegeben von Ch. Paulus, Professor am Obergymnasium in Tübingen. Tübingen 1885. Franz Fues. 72 S.

Der erklärende Text, welcher den Tafeln vorausgeht, gibt über die gesamte Berechnung der Phasen, sowol der einzeln gefragten, als auch ihrer Tabellen, in Formeln Auskunft, so dass der, welcher mit der Himmelsmechanik, nicht aber mit der astronomischen Praxis bekannt ist, über die Entwickelungsmethode daraus Belehrung entnehmen kann. Die Berechnung ist, u. a. durch Annahme des julianischen Jahres, vereinfacht, nach Aussage des Verfassers gleichwol für den Zeitraum von 800 vor bis 2000 nach Chr. Geb. bis auf 1 Minute genau. Werden nun auch selten Schulen soviel Zeit erübrigen können, um die auf 29 Seiten gegebene Erklärung zum Verständniss zu bringen, so wird dieselbe doch einerseits Autodidakten, die den Gegenstand aus eignem Interesse treiben, gute Dienste tun, andrerseits können auch Schüler, ohne sich vorher in den Zusammenhang vertieft zu haben, bloss nach den Tafeln unter Beihülfe des Lehrers Beispiele rechnen. Hierzu ist noch eine kurz gefasste Gebrauchsanweisung gegeben. Die Berechnung besteht aus 2 Teilen: erst wird die Zeit der mittleren, dann der wahren Phase berechnet; hiernach wird noch untersucht, ob der Neumond und der Vollmond von Verfinsterung begleitet ist. H.

Vermischte Schriften.

Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 55 — 57 année, 3me série, t. IX — XIII. Bruxelles, F. Hayez.

Mathematischen Inhalts sind folgende Artikel.

P. Mansion: Ueber die Methode der kleinsten Quadrate. 9. — Ueber eine Form des Restes in der Taylor'schen Formel und in der von Ch. Lagrange. 10. — Bestimmung des Restes in der Gauss'schen Quadraturformel. 11. — Ueber das letzte Theorem von Fermat. 13.

Ch. Lagrange: Neue Formel für die Entwickelung der Functionen, insbesondere der Integrale. 9. — Lösung des allgemeinen Problems von Wronski und eines andern Problems betreffend die Integration der Differentialgleichungen. 10.

G. Leman: Note betreffend dio Untersnchnng der Biegungsmomente nnd Scbwerkräfte erzengt in einem Stabe, der in seinen Enden nnterstützt ist nnd unter dem Einflusse einer bewegten Last sicb biegt. 9.

J. Doruyts: Ueber gewisse Reihenentwickelnngen. (Bericbt). 9. — Ueber die approximative Berechnung gewisser bestimmten Integrale. 11. — Ueber eine Classo conjngirter Vielecke (Bericht). 12. — Ueber einige Eigenschaften der Semiinvarianton. 13.

J. De Tilly: Ueber die Riccati'scbe Gleicbung nnd ihre doppelte Verallgemeinerung. 9.

M. da Silva: Ueber eine Frage der Tbeorie der elliptiscben Functionen. 10.

E. Catalan: Aufgaben unbestimmter Analytik. 9. — Mathematische Belustigung. 9. — Ueber eine Classe von Differentialgleicbnngon. 12. — Bemerkungen über gewisse bestimmte Integrale (Boricht). 13. — Ueber eine nnmerischo Tafel und ihre Anwendnng anf gewisse Transcendenten (Bericbt). 13. — Bemerkungen über eino trinomiscbe Gleicbung. 13.

Jamet: Tbeorem über die geodätiscben Linien der Rotationsflächen.

E. Cesàro: Ueber das Stndinm der arithmetischen Begebenheiten (Bericbt). 11.

C. L. Paige: Ueber die Anzahl der Grnppen, welcho böhere Involutionen auf demselben Träger gemein baben. 11. — Ueber die Homographien in der Ebene. 12. — Untorsucbnngen über das Pentaeder. 13.

Physikaliscben Inhalts sind folgende.

Hirn: Experimentelle und analytiscbo Untersnchnngon über die Gesetze des Ausflussos nnd des Stoffes der Gase in Fnnction der Temperatur (Bericht). 9. — Die moderne Kinetik und der Dynamismns der Zukunft (Bericbt). 12.

Gérard, Van Weddingen nnd Jacqnet: 3 Mitteilnngen zur Verbesserung der Aerostaten (Bericbt). 9.

P. De Heen: Ueber die Spannung der gesättigten Dämpfe. Modificationen anznbringen am Gesetz von Dalton. 9. — Bestimmnng des Compressibilitätscoefficienten einiger Flüssigkeiten nnd Variationen dieser Grösse mit der Temperatur. Theoretiscbes Gesetz der Variationen jenes Coefficienten. 9. — Bestimmung einer empiriscben Relation zwischen der Dampfspannnng und dem Coefficienten der innern Reibung der Flüssigkeiten. 10. — Note in Betreff einer Arbeit von Robert Schiff über die specifische Wärme der Flüssigkeiten. 12. — Bestimmnng der Variationen des Coefficienten der innern Reibung der Flüssigkeiten mit der Temperatur. Theore-

tische Betrachtungen, welche aus der Beobachtung dieser Grösse fliessen. Bestimmung einer theoretischen Formel, welche die elastischen Kräfte der gesättigten Dämpfe in Function der Temperatur ausdrückt. 11. — Note betreffend das Gesetz der Ausdehnbarkeit der Flüssigkeiten. 11.

G. Van der Mensbrugghe: Versuch über die mechanische Theorie der Oberflächenspannung, der Verdampfung der Flüssigkeiten. 9. — Ueber die Nichtstabilität des Gleichgewichts der Oberflächenschicht einer Flüssigkeit. 11. 12. — Ueber einige merkwürdige Wirkungen der Molecularkräfte bei Berührung eines festen Körpers und einer Flüssigkeit.

E. Van Aubel: Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss des Magnetismus auf die Polarisation in elektrischen Medien. 10. 12. — Transparenz des Platins. 11.

P. Stroobant: Neue Untersuchungen über die scheinbare Vergrösserung der Gestirne, der Sonne und des Mondes am Horizont. 10

E. Gérard: Anwendung des Telephons bei Untersuchung der Verrückung der elektrischen Linien. 11. H.

Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1886. 1887. Cinquante-troisième année. Bruxelles, F. Hayez.

Das Annuaire enthält ausser dem Kalender Geschichte und Jahresbericht, Statuten, Organisation und Eigentum der Akademie, erteilte und ausgeschriebene Preise und Biographien. H.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathémaques, de physique et de chimie de la Faculté, sous les auspices du Ministère de l'instruction publique et de la Municipalité de Toulouse, avec le concours des Conseils généraux de la Haute-Garonne et des Hautes-Pyrénées. Tome I. Année 1887. Paris, Gauthier-Villars.

Diese neue Zeitschrift publicirt mathematische und physikalische Abhandlungen, grösstenteils verfasst von gegenwärtigen und früheren Professoren der Facultät, und gibt zum Schluss ein sachlich eingeteiltes biliographisches Verzeichniss beginnend mit dem Jahre 1858. Der erste Band enthält folgende Abhandlungen.

E. Picard: Ueber die linearen Differentialgleichungen und die algebraischen Transformationsgruppen.

P. Appell: Ueber das Gleichgewicht eines biegsamen und nicht dehnbaren Fadens.

E. Gonrsat: Ueber ein Problem bezüglich auf Curven doppelter Krümmung.

G. Koenigs: Ueber die Form der Curven constanter Spannung. — Ueber die Curven, deren Tangenten einem linearen Complex angehören. — Ueber die Anwendung gewisser quadratischer Formen in der Geometrie.

P. Garbe: Experimentelle Untersnchungen über die Strahlung.

H. Andoyer: Beitrag zur Theorie der intermediären Bahnen.

M. Brillouin: Fragen der Hydrodynamik. H.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 10. Mit Inhaltsverzeichniss der Bände 1—10. Stockholm 1887. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der 10. Band enthält folgende Abhandlungen.

J. Hacks: Ueber Summen von grössten Ganzen.

M. A. Stern: Ueber den Wert einiger Reihen, welche von der Function $E(x)$ abhangen.

K. Schwering: Ueber gewisse trinomische complexe Zahlen.

M. Lerch: Ein Satz der Reihentheorie.

G. Kobb: Ueber die Bewegung eines materiellen Punkts auf einer Rotationsfläche.

K. Bohlin: Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme.

R. Lipschitz: Zur Theorie der krummen Oberflächen. — Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen.

H. Dobriner: Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien.

S. Pincherle: Ueber gewisse durch bestimmte Integrale dargestellte functionale Operationen.

O. Staude: Ueber eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten.

L. Lecornu: Ueber die Flächen, welche dieselben Symmetrieebenen besitzen wie eins der regelmässigen Polyeder.

G. Humbert: Ueber die algebraischen Integrale der algebraischen Differentiale.

T. J. Stieltjes: Tafel der Werte der Summen $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$.

J. Weingarten: Zur Theorie des Flächenpotentials.

H. Poincaré: Bemerkungen über die irregulären Integrale der linearen Gleichungen.

G. Koenigs: Ueber eine Classe von Formen von Differentialen und über die Theorie der Systeme von Elementen.

E. A. Stenberg: Ueber einen Specialfall der Lamé'schen Differentialgleichung. H.

Litterarischer Bericht
XXIII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Curso de analyse infinitesimal. Por F. Gomes Teixeira, Director da Academia Polytechnica do Porto, professor na mesma Academia, antigo professor na Universidade do Coimbra, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc. (Calculo differencial). Porto 1887. Typographia Occidental. 356 S.

Angenscheinlich ist das Buch zunächst für die Vorlesungen des Verfassers an der polytechnischen Akademie in Oporto bestimmt und erwirbt sich das Verdienst die Kenntniss der Differentialrechnung in Portugal namentlich unter den Technikern zu verbreiten. Es behandelt in der Einleitung die Theorie der Imaginären, der Summen und Producte unendlicher Reihen, der Kettenbrüche und der Functionen, dann der Reihe nach die Begriffe der Grenzen und Stetigkeit, die Differentiation der Functionsclassen, Anwendungen auf Curven und Flächen, höhere Differentialquotienten, den Taylor'schen Satz mit Anwendungen, u. a. auf Maxima und Minima, geometrische Anwendungen desselben, Functionen in Reihen dargestellt und Functionen von Imaginären. Die Einleitung erklärt und erörtert diejenigen Grundbegriffe, welche bei Uebergang von der niedern Algebra zur Analysis hinzukommen. Die Art wie dies geschieht entzieht sich unserer Beurteilung, da es uns nicht wol begreiflich scheint, wie jene Begriffe, namentlich der der Irrationalzahlen, durch das Beigebrachte zum Verständniss gelangen können. Wir müssen eben zu dem Verfasser das Vertrauen haben, dass er den Bildungsgang

der Portugiesen besser kennt und die Verantwortung dafür auf sich nehmen kann, dass seine Methode für seine Zuhörer die angemessene ist. Der eigentliche Cursus ist davon unabhängig und ohne Bezugnahme darauf; er ist auf Uebermittelung des heutigen Standpunktes der Theorie und besonders auf ausübende Praxis gerichtet, der Vortrag leicht verständlich. H.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. Theil: Differential-Rechnung. Von M. Stegemann, Dr. phil., weil. Professor an der technischen Hochschule zu Hannover. Fünfte, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage mit 66 Figuren im Texte herausgegeben von Dr. Ludwig Kiepert, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover Hannover 1888. Helwing. 465 S.

Das Buch gehört zu denjenigen Lehrbüchern, welche dem Anfänger das Lernen leicht machen wollen, in der Tat aber es ihm nur leicht machen nicht zu lernen, viel zu treiben ohne darüber ins Klare zu kommen. Der Bearbeiter sagt zwar, dass er zahlreiche Irrtümer, die sich in den früheren Auflagen befinden, richtig zu stellen hatte. Gleichwol ist der bekannte elementare Fehler unberechtigter Umkehrung stehen geblieben. Gleiches kann man für Gleiches setzen, aber nicht umgekehrt: Grössen sind darum nicht gleich, weil ihre Substitution ein Resultat nicht ändert. Dem entgegen wird hier der Satz aufgestellt: endliche Grössen würden durch Addition unendlich kleiner nicht geändert, und zwar geht zur Begründung nichts voraus als eine kurze Erörterung des Begriffs des Grenzwerts, so dass die Behauptung sich bloss auf den Schluss von $\lim(x+\varepsilon)=\lim x$ auf $x+\varepsilon=x$ stützt. Der Fehler ist kein vorübergehender, der sich im Fortgang ausgliche; nein, in ebenso sorgloser Weise geht es weiter. Die ganze Theorie der Unendlichen wird durch ausweichenden, schiefen Ausdruck in ein für den Anfänger undurchdringliches Dunkel gehüllt. Gleich anfangs wird aufgestellt, eine veränderliche Grösse werde unendlich klein, unendlich gross, wenn sie sich der Grenze 0 nähere, bzhw. grösser als jede beliebige Grösse werde. Hiernach würde offenbar die Grösse erst dann unendlich klein, unendlich gross sein, wenn die Grenze 0 erreicht, bzhw. alle Grenzen überschritten wären, d. h. es würde sich ergeben: unendlich kleine Grössen (die nicht null) und unendlich grosse sind überhaupt undenkbar. Der Anfänger wird also sogleich in die alte Sackgasse geführt, in welcher ihm nichts übrig bleibt als auf Selbstdenken und Verstehen der Theorie zu verzichten und die Schlüsse des Lehrers nachzuahmen. Dass wirklich der Verfasser den

Begriff des Unendlichen iu das Jenseit alles Denkens verlegt, bestätigt überdies die Hinzufügung, dass die Bezeichnung der kleiuen (grossen) Grössen, mit denen wir rechnen, als unendlich klein (gross) ein abgekürzter Ansdruck sei, bei dem man den fraglichen Denkprocess als nachfolgend im Bewnsstsein zn halten habe. Von jenem endlosen Denkprocess weiss die analytische Praxis nichts; jene Begriffe sind hier in gleichem Falle mit denen der Elementarmathematik. Es ist klar, dass ein einzelnes Dreieck ein allgemeines Dreieck repräsentirt, bloss weil keine Besouderheit anfgestellt ist. Ebenso repräsentiren anch irgend wieviele Teilbogen einer Cnrve nebst Sehnen, solange die Zahl nnd Kleinheit nicht festgesetzt ist, jede Zahl nnd Kleinheit. In dieser Eigenschaft, also vermöge der blosseu Nichtbestimmnng, ist nnd heisst (nicht symbolisch oder abgekürzt, sonderu im einfachen eigentlichen Sinne) die Zahl unendlich gross, der Teilbogen nebst Sehne unendlich kleiu, und durch einen bekannten indirecten Schlnss (in welchem von fortgesetzter Teilnng gar nicht die Rede ist) beweist mau die genaue Richtigkeit der Qnadratur- oder Rectificationsformel. Gerade der Satz aber, welcher diese Schlussweise lehrt, gerade das Fundamentalprincip der Infinitesimaltheorie fehlt in Stegemann's Differentialrechnnng nnd ist anch vom Bearbeiter nicht ergänzt. Nach dessen Darstellung muss der Leser glanben, die Formel werde erst genau, sobald das Ziel der Veränderung erreicht sei, sobald das Polygon mit der Curve zusammenfällt, also nie, weil das nie geschieht. Durch Aufweisung der genannten Fehler ist wol zur Genüge gezeigt, dass die Grnndlegung der gesamten hier behandelten Theorie eine sehr mangelhafte ist. Die Lehrmethode steht noch auf einem überwnndenen Standpnnkt. Dafür ist es keine Entschuldigung, dass das Bnch für Techniker bestimmt ist, die kein intensives Stndinm beabsichtigen. Denn die exacten Principien der Infinitesimaltheorie siud weit einfacher als die hier gegebenen Erklärungen, welche nm die Sache herumgehen ohne den rechten Pnnkt zn treffen. Der Inhalt des Lehrbuchs ist der gewöhnliche: ausser der Differentiation der Fnnctionen wird behandelt der Taylor'sche Satz, die Maxima uud Minima, Bestimmung von Fnnctionswerten durch die Stetigkeit, unendliche Reihen, Anwendungeu auf Curven und krumme Flächen, Theorie der complexeu Grössen. Zn jedem Thema sind Uebungsaufgaben gestellt.

Hoppe.

Résnmé du conrs d'analyse infinitésimale de l'université de Gand. Par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'université de Gand, Corr·spondant de l'Académie Royale de Belgiqne, de la Société Royale des sciences de Liége et de la Société Mathématique d'Amster-

dam. Calcul différentiel et principes de calcul intégral. Paris 1887. Gauthier-Villars. 300 S.

Das Vorliegende ist der Inhalt der Vorlesungen des Verfassers; es lehrt die Principien der Theorie der elementaren Functionen; andere als die in den Elementen vorkommenden Functionen sind also ausgeschlossen; dagegen werden die unabhängigen Variabeln allgemein als complex aufgefasst, ohne Anwendung jedoch der krummlinigen Integrale von Cauchy, ausgehend von der Definition $e^{yi} = \cos y + i \sin y$; $e^z = e^x e^{yi}$, wo $z = x + yi$. Der Beweis für die Regel der Derivation der zusammgesetzten Functionen wird aus den besondern Regeln bezüglich auf Summen, Producte und Exponentialfunctionen abgeleitet, ebenso für den Satz der Inversion der Derivationen ohne Recurs an ein Postulat. Hieraus liessen sich die gesamten Formeln der Differentialgleichung in gleicher Allgemeinheit begründen. Die Abschnitte des Buchs sind: Einleitung, fundamentale Eigenschaften der Derivirten, Integrale und Reihen, Differentiation, Eigenschaften der Functionen, Anhang, ergänzende Noten. Die zwei letzten sind wegen der kurzen Fassung der zwei ersten Abschnitte hinzugefügt. Die drei ersten Capitel des Anhangs enthalten eine historische Skizze der Fortschritte der Analysis des Unendlichen, die Uebersetzung der ersten Artikel von Leibniz und Newton über die Differentialgleichung und eine Notiz über die verschiedenen Auffassungsweisen der Theorie der Unendlichkleinen von Kepler bis Cauchy, worin der Verfasser bewiesen zu haben glaubt, dass schon Leibniz und Newton die Infinitesimalrechnung so verstanden haben wie 150 Jahre später Cauchy. Die zwei folgenden Capitel beweisen das Fundamentalprincip der Grenzmethode: Eine beständig wachsende Variable hat einen endlichen oder „unendlichen Grenzwert". Die Theorie der Grenzwerte ist schon vorher behandelt. Ein Capitel handelt vom Princip der Substitution Unendlichkleiner mit neuer Begründung namentlich in Anwendung auf Rectification, Quadratur, Kubatur. In einem Capitel über die fundamentalen Eigenschaften der Derivirten und den Zusammenhang der Differential- und Integralrechnung wird der Satz bewiesen, dass Functionen von gleicher Derivirter constante Differenz haben, und die Weierstrass'sche Function ohne Differential besprochen. Bei Abfassung des Buchs erklärt der Verfasser die Lehrbücher von Schaar, Catalan, Gilbert, Cauchy, Duhamel, Lipschitz und Schriften von Genocchi, Peano und Darboux zu Rate gezogen zu haben. H.

Die Determinanten in genetischer Behandlung zur Einführung für Anfänger. Von **Adolf Sickenberger**, Professor am k. Maxi-

miliansgymnasium in München. Zweiter Abdruck. München 1887. Theodor Ackermann. 80 S.

Die Schrift hat zwei verschiedene Bestimmungen, die der Verfasser mit grossem Geschick zur Deckung zu bringen bemüht ist, die wir aber der Beurteilung wegen aus einander halten müssen. Der Titel bestimmt sie zur Einführung für Anfänger. Von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet würden pädagogische Mängel das Vortreffliche ganz in Schatten stellen. Aber das Vorwort selbst stellt diesen Zweck in zweite Linie; es geht von einer formell analytischen Untersuchung aus, deren Gang durch ihr Ziel schon vorgezeichnet ist, und fügt nur zum Schluss die Aeusserung bei, dass derselbe Lehrgang auch für einen strebsamen Schüler eines Gymnasiums verständlich und nutzbringend sein solle. Die Ausführung zeigt folgenden Grundgedanken. Durch die Bézout'sche Methode der Auflösung hinreichender Systeme linearer Gleichungen wird jede Lösung sogleich als homogene lineare Function der bekannten Glieder dargestellt. Die Coefficienten stehen im Verhältniss von Unterdeterminanten. Betrachtet man also die Theorie der Gleichungssysteme für n Gesuchte als bekannt, so bietet sich hierin ein Uebergang zur Theorie für $n+1$ Gesuchte. Demgemäss wird hier nach einander die Theorie für 2, dann 3, dann beliebig viele Gesuchte entwickelt und dabei einige Eigenschaften der Determinanten hergeleitet. Um dies indes in Ausführung zu bringen, waren gar manche Discussionen und Beweise in Betreff der Identitäten, der Vorzeichen etc. nötig. Alle Deductionen sind mit ausgezeichneter Klarheit und Präcision vorgetragen und zeugen von ungemeiner Beherrschung des Stoffes. Fragen wir nun, abgesehen vom didaktischen Zwecke, nach Wert und Bedeutung des Geleisteten, so kann man unter der genetischen Behandlung, wie es der Titel nennt, wol nur jene recurrente Darstellung verstehen, die statt der gewöhnlichen independenten Form der Entwickelung der Determinantenlehre gegeben worden ist. Im allgemeinen pflegt man der independenten Form vor der recurrenten den Vorzug zu geben; im vorliegenden Falle verdient sie den Vorzug ganz besonders: die Rechnung mit ganzen Determinanten ist elegant und durchschaulich, mit Zerlegung schwerfällig und mit allerhand Umständlichkeiten verknüpft; jede Zerlegung annullirt teilweise, was durch die Determinante erreicht war. Von dieser Seite aus betrachtet lässt also die veränderte Behandlungsweise nur einen Rückschritt erkennen. Was aber nicht auf dem Titel steht, der Aufbau der Determinantentheorie auf der Basis der Theorie der Gleichungssysteme, ist wenigstens eine, wenn auch willkürlich selbst gewählte, durch nichts geforderte, doch originelle Aufgabe gegenüber der gewöhnlichen, combinatorischen Begründung, welcher die Lösung der Gleichungssysteme als

Anwendung nachfolgt. Die Ausführung hat gezeigt, welche Fragen dabei zu behandeln sind. Hierin allein ist die eigentliche Leistung der Arbeit zu sehen; das successive Aufsteigen war der Weg, auf dem der Verfasser dazu gelangte, vielleicht der einzige mögliche, wo nicht, wol kaum der empfehlenswerte. Was nun die Verwendung der Methode zur Einführung der Anfänger betrifft, so ist in vorliegender Bearbeitung die Kenntniss der Auflösung der linearen Gleichungen nach irgend einem Verfahren vorausgesetzt, das Ordnungsprincip im Ausdruck der Lösungen hingegen soll eben erlernt werden. Der Lehrgang beginnt mit einigen Beobachtungen am System zweier Gleichungen, deren Zweck dem Schüler verborgen bleibt. Im Fortschritt zum Systeme dreier Gleichungen würde er den Zweck ahnen, wenn die Beobachtungen analoge wären. Allein hier wird erst nach Reductionen und Discussionen das Ziel erreicht überhaupt die analoge Form herzustellen, deren Uebereinstimmung der Schüler, dem die Idee der Anordnung fremd ist, nicht wahrnimmt. Er hat also wiederum keine Aufklärung erhalten, muss Schritt für Schritt dem Vortrage receptiv folgen und hat für den weitern Fortschritt nur den Blick auf unabsehbar ausgedehnte Discussionen, die bei 4 und 5 Gleichungen bevorstehen. Ist endlich nach andauernder Aufmerksamkeit das Ziel erreicht, so kann er gewisse Eigenschaften der Determinanten registriren, ist aber in deren Gebrauch zu den einfachen weitreichenden Schlüssen noch immer nicht eingeweiht und wird sich bei Anwendung mit Zerlegung in Unterdeterminanten behelfen. Wenn man weiss, wie leicht — freilich erst bei einiger Vertrautheit der Schüler mit den Elementen der Combinatorik und mit Substitutionen — sich sämtliche Hauptsätze der Determinantenlehre ohne alle Deductionsketten durch directe Schlüsse entwickeln lassen, so muss es als eine unbillige Zumutung erscheinen, dass sie sich erst durch alle Schwierigkeiten des successiven Aufsteigens hindurcharbeiten sollen. Andere Autoren haben bei Bearbeitung der Determinantenlehre für den Schulgebrauch den gleichen Ausgangspunkt wie in dieser Schrift gewählt, verbanden aber damit die Bestimmung für die Mittelclassen der Gymnasien, um die Schüler der Algebra schon am Gewinne teilnehmen zu lassen, ein Gewinn der für sie offenbar ganz illusorisch ist. Der Verfasser hat nach allem nur die höchste Classe im Sinne. Hoppe.

Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}xx+\text{u. s. w.}$$

Digitized by Google

Von Carl Friedrich Gauss. Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung aus dem Lateinischen übersetzt von Dr. Heinrich Simon. Berlin 1888. Julius Springer. 86 S.

Diese bei ihrer Kürze so reichhaltige Arbeit, deren Inhalt als wesentlicher Teil jedes Lehrcursus über bestimmte Integrale allgemein bekannt ist, von der vor nicht langer Zeit nur wenige Exemplare existirten, bis sie in der Gesamtausgabe der Werke wieder erschien, ist nun, weniger durch die Verdeutschung, deren das Gauss'sche Latein kaum bedarf, als durch die gesonderte Ausgabe, dem Gebrauche des Einzelnen näher gerückt, was gewiss dem Wunsche Vieler entspricht. Dem historischen Interesse hat der Uebersetzer einerseits durch treue Wiedergabe, andrerseits durch Sonderung desjenigen Teiles, welcher als Fortsetzung aus dem Nachlass aufgenommen ist, Rechnung getragen und am Schlusse des Ganzen Anmerkungen litterarischen, historischen und erklärenden Inhalts hinzugefügt. Die Fortsetzung enthält die Entwickelung der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, welcher die Gauss'sche Function Γ genügt. H.

Ueber zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen. Von Dr. Oskar Simony, a. o. Professor an der Wiener Hochschule für Bodencultur. Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. XCI. Febr. 1885.

Das Vorliegende ist ein neuer Versuch, imaginäre Zahlen von höherer als zweifacher Mannichfaltigkeit

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots a_n i_n$$

in die Rechnung einzuführen. Die Begriffe der Operationen, von denen Addition, Multiplication und Potenzirung in Betracht gezogen werden, werden durch Forderungen bestimmt, so dass deren Vermehrung und Weglassung Verengung und Erweiterung des Begriffs bedeuten. In der Wahl der Anordnung leitet die Analogie; Notwendigkeit wird nicht beansprucht. Es ergibt sich, dass die Coefficienten des Resultates jeder Operation immer erst nach Hinzufügung weiterer beschränkender Bedingungen vollständig bestimmt werden können. Durch eine geometrische Charakterisirung soll dann die Unbestimmtheit gehoben werden. Dies führt zur zweiten Verallgemeinerung. Auf das Nähere einzugehen würde zu weit führen.

H.

Digitized by Google

Geometrie.

Cours de géométrie de la Faculté des Sciences. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Par **Gaston Darboux**, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Première partie. Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima. Paris 1887. Gauthier-Villars. 513 S.

Das Buch behandelt die Theorie der Curven und Flächen in analytisch kinematischer Auffassung, und gehört hiernach der zur Zeit noch am wenigsten vertretenen Classe geometrischer Arbeiten an, die sich in wesentlichem Gegensatze gegen zwei gegenwärtig weit mehr im Vordergrunde stehenden Classen, den synthetischen und algebraischen, d. h. die Gebilde als Construction primitiv gegebener Gleichungen betrachtenden, befindet und ihre verdiente Beachtung neben jenen zu erringen hat. Der kinematische Ausgangspunkt ist allgemeiner gewählt, als es für die geometrische Verwendung erfordert wird. Es ist die momentane Rotation eines Trieders, das mit einem Parameter variirt. Sind p, q, r die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit, die sich bekanntlich auch verhalten wie die Richtungscosinus der Rotationsaxe, so sind für festen Scheitel die Richtungscosinus jeder der 3 Triederkanten α, β, γ bestimmt durch das System dreier Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \beta r - \gamma q; \quad \frac{\partial\beta}{\partial t} = \gamma p - \alpha r; \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t} = \alpha q - \beta p \tag{8}$$

dessen vollständiges Integral durch Orthogonalsubstitution aus jeder speciellen Lösung hervorgeht. Für variirenden Scheitel kommen noch Terme hinzu, deren Berücksichtigung indes jener Integration erst nachfolgt. Wird nun das Trieder von der Tangente, Hauptund Binormale einer Curve gebildet und durch ein Trieder von gleicher Stellung und festem Scheitel ersetzt, so fällt die Rotationsaxe in die eine Seitenfläche, q verschwindet, und r, p verhalten sich wie die Coincidenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe (mithin wie Krümmung und Torsion). Die 3 Differentialgleichungen sind dann die Fundamentalformeln der Curventheorie, und ihre Integration löst das Problem, aus der gegebenen Relation von Krümmungs- und Torsionswinkel die Curve zu finden. Die Reduction des Problems auf eine imaginäre lineare Gleichung 2. Ordnung war bekannt. Hier wird sie nach gleicher Methode allgemeiner behandelt. Zunächst führt letztere die obigen Bewegungsgleichungen eines beliebigen Trieders auf dieselbe Form zurück, und selbst diese werden vorher erweitert auf die Form

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = A\alpha + B\beta + C\gamma; \quad \text{etc.}$$

Es folgt nun als Basis der Flächentheorie die Betrachtung eines mit 2 Parametern u, v variirenden Trieders. Variirt u allein, v allein, so ergeben sich 2 Systeme (8), aus denen 3 Bedingungsrelationen zwischen pqr, $p_1 q_1 r_1$ hervorgehen, wenn eine gleichzeitige Variation von u, v möglich sein soll. Sind diese erfüllt, und man hat eine Lösung für das eine System (8), die dem andern nicht genügt, so ergibt sich daraus eine zweite Lösung für das erste, genügt sie aber dem zweiten für irgend ein $u = u_0$, so genügt sie ihm für jedes u. Nach einigen Folgerungen und speciellen Anwendungen werden dann die Theorien der conjugirten Liniensysteme, der Krümmungslinien der asymptotischen Linien, der conformen Abbildung, der Fünfkugelcoordinaten und der Krümmungslinien in tangentiellen Coordinaten entwickelt. Fast die Hälfte des Buchs nimmt dann die Theorie der der Minimalflächen ein. Nach einer historischen Uebersicht werden die kleinsten Flächen in punctuellen und tangentiellen Coordinaten, ihre conforme Abbildung, die adjungirte Fläche von Bonnet, die Formeln von Monge, die algebraischen Minimalflächen, die Formeln von Schwarz, das Problem von Plateau, die Formeln von Weierstrass und verschiedene Anwendungen behandelt. H.

Ueber Flächen zweiter Ordnung. Ein Beitrag zu deren Theorie. Von Wilhelm Schmidle, Lehramtspraktikant. Beilage zum Programm des Gymnasiums in Baden. Baden-Baden 1887. 4°. 15 S.

In den „Beiträgen zur Geometrie der Lage" beweist von Staudt p. 28. einen Satz, welcher einen Teil der Flächen 2. Ordnung definirt. Diesen wählt der Verfasser als Ausgangspunkt für eine Theorie der Flächen 2. Ordnung, discutirt die Schnitte der Ebenen mit der Fläche, indem er die Principien der Staudt'schen Geometrie als bekannt voraussetzt, und beweist rein geometrisch 26 Lehrsätze.

H.

Einführung in die Geometrie der Kegelschnitte. Zum Gebrauche für höhere Lehranstalten bearbeitet von Dr. Richard Heger, a. o. Honorarprofessor am Königl. Polytechnikum und Oberlehrer am Wettiner Gymnasium zu Dresden. Mit Holzschnitten im Texte. Breslau 1887. Eduard Trewendt. 61 S.

Der Lehrgang nimmt seinen Anfang beim ebenen Schnitte des geraden Kegels und entwickelt daraus mit Zuhülfenahme einfacher Rechnung die Tangenten- und Focaltheorie. Dann erst wird die

Gleichung der Curve zugezogen. Es folgt weiter der Reihe nach: die quadratische Punkt- und Strahleninvolution, der Kreiskegel, dessen ebene Schnitte, projective Punktreihen und Strahlbüschel, die Kegelschnitte als Erzeugnisse, Flächeninhalt. Mit den einzelnen Sätzen sind viele Uebungen verbunden. H.

Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen. Von Fritz Hofmann. Mit vielen in den Text eingedruckten Figuren. Halle a. S. 1888. Louis Nebert. 50 S.

„Riemann'sche Flächen" werden zur Abkürzung die hier allein in Betracht gezogenen Flächen genannt, welche zugleich zweiblättrig, sowie geschlossen sind, aber auch Selbstdurchdringungscurven besitzen. Die erste hier gelöste Aufgabe lautet: einfache Methoden anzugeben, nach welchen eine Riemann'sche Fläche durch stetige Verzerrung identisch gemacht werden kann mit andern, besonders charakteristischen Flächen von einer solchen Beschaffenheit, dass sich auf ihnen die Untersuchung topologischer Fragen besonders übersichtlich gestaltet; für welche insbesondere jener den Riemann'schen Flächen anhaftende missliche Umstand wegfällt, dass die geometrische Vorstellung durch das Auftreten der Selbstdurchdringungscurven gehindert wird. Die zweite gelöste Aufgabe ist die umgekehrte: Methoden anzugeben, welche eine directe Umwandlung einer beliebig vorgegebenen geschlossenen Fläche in eine Riemann'sche Fläche gestatten. H.

Axonometrie und Perspektive in systematischem Zusammenhange dargestellt von Dr. Christian Beyel, Privatdozent am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich und Assistent für darstellende Geometrie. Mit 9 Tafeln in Steindruck. Stuttgart 1887. J. B. Metzler. 57 S.

Unter der Bezeichnung „centrische Axonometrie" wird nach Vorgang von Guido Hauck die Axonometrie, Perspective und schiefe Parallelperspective zusammenbegriffen. Bei Behandlung dieses Lehrgebiets, bestimmt für Zeichner, ist die Anwendung von Rechnung mit einigen wenigen Ausnahmen vermieden worden. Die Hauptabschnitte sind: Einleitung, centrische Axonometrie, schiefe Parallelspective. Der Klarheit des Vortrags können wir kein Lob spenden. H.

Ueber den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Be-

deutung. Von Dr. Oskar Simony, a. o. Professor an der k. k. Hochschule für Bodencultur in Wien. Mit 2 Tafeln und 1 Holzschnitt. Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. XCVI. Juni 1887. 96 S.

Es wird eine Methode vorgeführt die möglichen Knotenverschlingungen eines undurchdringlichen geschlossenen Fadens, d h. solcher Gestalten, welche aus dem kreisförmigen Faden durch keine stetige Deformation hervorgehen können, unter fassliche Gesetze zu bringen. Zuerst handelt es sich um gesetzmässige Erzeugung solcher Knotenverschlingungen. Sie werden dadurch zuwege gebracht, dass der Faden zerschnitten, gewissen Enden gemeinsame Rotationen erteilt, und die Enden nach verschiedener Anordnung verknüpft werden. Ein dazu dienender Apparat wird beschrieben und abgebildet. Die Berechnung führt zu Sätzen über die Primzahlen und über Kettenbrüche. Zu einem eingehenden Bericht möchte wol der Gegenstand zu complicirt sein. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XIX.

Geschichte der Mathematik.

Annalen, mathematische. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyk, A. Mayer, 31. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. prcplt. 20 Mk.

Boltzmann, L., Gustav Robert Kirchhoff. Festrede. Leipzig, J. A. Barth. 1 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte d. Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Unter Mitwirkung v. J. Müller u. A. Wangerin. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 17 Bd. Jhrg. 1885. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Methode und Principien.

Dedekind, R., Was sind u. was wollen die Zahlen? Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk. 60 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. 11.—13. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 50 Pf.

Sammlungen.

Baule, A., Sammlung v. Aufgaben d. prakt. Geometrie nebst kurzer Anleitung z. Lösung derselben. Berlin, Springer. Kart. 1 Mk.

Brockmann, F. J., Sammlung v. Aufgaben aus allen Gebieten d. Elementarmathematik nebst Lösgn. od. Lösungsandeutungen. Paderborn, F. Schöningh. 1 Mk.

Budde, W., physikal. Aufgaben f. d. oberen Klassen höh. Lehranstalten. Braunschweig, Vieweg & S. 2 Mk. 50 Pf.

Dohne, F., prakt. Rechenbuch. 1. Tl. 3. Afl. Riga, Stieda's Verl. 1 Mk.

Heis, E., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus d. allgem. Arithmetik u. Algebra. 73. Afl. Köln, DuMont-Schauberg. 3 Mk.

Litterarischer Bericht
XXIV.

Mechanik.

Anaytische Mechanik. Von J. L. Lagrange. Deutsch herausgegeben von Dr. H. Servns. Berlin 1887. Julins Springer. 640 S.

Die erste Anflage der Mécaniqne analytiqne erschien 1788, von der 2. Anflage der 1. Band 1811, der 2te 1815. Der 1. Band nnd die erste Hälfte des 2ten ist von Lagrange selbst herausgegeben; die Vollendnng des 2. Bandes übernahmen Prony, Garnier nnd Lacroix. Eine dritte, von Bertrand veranstaltete nnd mit Anmerknngen versehene Ausgabe erschien 1853—1855. Der gegenwärtigen dentschen Uebersetznng liegt die 2. Ansgabe zngrunde. Ihr vorans geht die Lebensgeschichte des Verfassers, Joseph-Louis comte de Lagrange, geboren in Tnrin am 25. Jannar 1736, gestorben in Paris am 10. April 1813. Der Verfasser derselben ist nicht genannt; als Qnellen sind angeführt: Mém. de l'institnt 1812, Jonrnal de l'Empire 1813, Virey et Potel nnd Cossali. Hieranf folgt das Verzeichniss der Schriften. Lagrange war Stifter der Turiner Akademie, ward 1766 von Friedrich II. an die Akademie in Berlin berufen, nach dessen Tode er sich 1787 nach Paris begab nnd auch während der Revolntion daselbst verblieb. H.

Elemente der Statik. Von L. Poinsot. Antorisirte dentsche Ansgabe. Nach der von Bertrand bearbeiteten zwölften Anflage des französischen Originals herausgegeben von Dr. H. Servus. Mit 4 lithographirten Tafeln. Berlin 1887. Jnlins Springer. 173 S.

Das Werk, welches zuerst 1803 erschien, ist schon zweimal ins Deutsche übersetzt, nach der 4. Auflage von Lambert, nach der 5ten von Hartmann. Es enthält in 4 Capiteln die Zusammensetzung der Kräfte und der Kräftepare, die Bedingungen des Gleichgewichts der Systeme von Kräften, die Theorie des Schwerpunkts und die der einfachen Maschinen. Der Herausgeber hat eine kurze Lebensgeschichte des Verfassers vorausgeschickt. Hiernach ist letzterer am 3. Januar 1777 in Paris geboren und am 15. December 1859 ebendaselbst gestorben. Er war von 1806 bis 1824 General-Inspector der Universität, ausserdem war er Lehrer am Polytechnikum und ward Mitglied der Akademie. Zwei Entdeckungen, die seinen Ruhm begründet haben, bezeichnen wesentliche Fortschritte der Wissenschaft: die Theorie der Kräftepare und die der Nutation und Präcession.

H.

Neue Theorie der Reibung. Von N. Petroff, kaiserl. russ. General-Major des Genie-Corps, Professor an der Militär-Ingenieur-Akademie und am technologischen Institute zu St. Petersburg. Mit Genehmigung des Verfassers aus dem Russischen übersetzt von L. Wurzel, kais. russ. Collegienrath, Ingenieur des Ministeriums der Verkehrsmittel. Von der kais. russ. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg mit dem Lomonosowpreise gekrönte Schrift. Hamburg und Leipzig 1887. Leopold Voss. 187 S.

Die Arbeit zeichnet sich aus durch die ungemeine Beharrlichkeit, mit welcher der Verfasser die Ursachen der grossen Differenzen zwischen allen Theorien und Beobachtungen verfolgt hat. Er beruhigt sich bei keinem ungenau zutreffenden Ergebniss, sondern zieht stets die Verschiedenheit der Umstände, unter denen die abweichenden Resultate gewonnen worden sind, und alle möglichen Einflüsse in die Untersuchung. Allerdings bleiben bis zuletzt unberechenbare Elemente in den Formeln, so dass die Anwendbarkeit nur unter bestimmten Beschränkungen constatirt werden konnte; jedenfalls sind aber die Formeln brauchbarer als die, welche er vorfand. Sein eigentliches Ziel ist, die Reibung zwischen ausreichend geschmierten festen Flächen zu bestimmen. Er fasst, wie es schon vor ihm geschehen ist, den Vorgang in diesem Falle als Reibung von Flüssigkeiten auf. Demzufolge betrifft der grösste Teil seiner Untersuchungen die Reibung von Flüssigkeiten, die durch Röhren, und zwar von kreisförmigem Querschnitt, strömen. Voraus geht die Theorie der Reibung zwichen trockenen Flächen, jedoch nur der Vollständigkeit wegen auf bisherigem Standpunkt. Die hauptsächlichen Schlussfolgerungen, die er aus den Untersuchungen zieht, sind folgende. Sind die Maschinenteile gut an einander geschlossen,

Digitized by Google

reichlich geschmiert und der Druck nicht übermässig, berühren sich die Metallteile nicht, so ist der Reibungswiderstand das Resultat der inneren Reibung der Schmierschicht, jede Ursache also, welche die innere Reibung dieser Schicht ändert, wird auch den Reibungswiderstand des Maschinenteils ändern. Unter sonst gleichen Bedingungen ist die Reibung der Maschinenteile der Grösse der Berührungsfläche der sich reibenden Teile proportional. Der Reibungswiderstand ist der relativen Geschwindigkeit der sich reibenden Flächen proportional. Er steht in umgekehrtem Verhältnisse zur Dicke der Schmierschicht. Letztere ist bei reichlicher Schmierung der Quadratwurzel aus dem relativen Normaldrucke proportional. Wird die Form der Reibungsflächen durch die Belastung umgestaltet, so verändert sich mit der Dicke der Schmierschicht der Reibungscoefficient. Der Verfasser hat seine theoretischen Resultate mit den Versuchen von Hirn, Kirchweger, Böckelberg und Thurston verglichen und auch selbst umfangreiche Versuche angestellt. H.

Zur Ermittelung des Luftwiderstandes nach der kinetischen Theorie. Von Edmund Toepler, Dr. philos. Wien 1886. Carl Gerold's Sohn. 24 S.

Es wird der Widerstand der Luft gegen die Bewegung einer Fläche, unter der Annahme, dass die Luftmolecüle unabhängig von einander sich in allen Richtungen bewegen, berechnet und als Hauptresultat die Formel gefunden:

$$W(v) = 4P_0 \frac{v}{\Omega}$$

wo v die Geschwindigkeit der Fläche, Ω das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten (der Molecüle?) bezeichnet. Wegen allzugrosser Häufung dunkler, mehrdeutiger Ausdrücke und unvollständiger Sätze würden wir nicht im Stande sein mehr über die Schrift zu berichten ohne Gefahr den Gedanken des Verfassers zu verfehlen. H.

Technik.

Die Wirkungsgesetze der dynamo-elektrischen Maschinen. Von Dr. F. Auerbach, Privatdocent an der Universität Breslau. Mit 84 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig 1887. A. Hartleben. 250 S.

Entsprechend dem wirklichen geschichtlichen Entwickelungsgange, demgemäss die Theorie der technischen Verwendung folgend

sich in wenigen Jahren zu einem umfangreichen Wissenszweig entfaltet hat, wird auch hier die Theorie auf ihrem neuesten Standpunkte im Anschluss an die Technik vorgetragen. Die Lehrgegenstände sind der Reihe nach: Batterieströme, Bewegung im magnetischen Felde, magnetelektrische Maschinen, Gesetze der Magnete und Elektromagnete, dynamoelektrische Maschinen im allgemeinen, Beobachtungen an solchen, ihre Theorie, Hauptschlussmaschinen, Nebenschlussmaschinen, Compoundmaschinen, specielle Probleme. Die Abbildungen sind weiss auf schwarzem Grunde. Voraus geht ein Namen- und Sachregister und eine Zusammenstellung der Litteratur. Das Buch bildet den 38. Band von des Verlegers „elektrotechnischer Bibliothek.“ H.

Die Construction der magnetelektrischen und dynamoelektrischen Maschinen. Von Gustav Glaser-De-Cew. Fünfte, umgearbeitete und vermehrte Auflage von Dr. F. Auerbach, Privatdocent an der Universität Breslau. Mit 80 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig 1887. A. Hartleben. 253 S.

Der Inhalt des Buches ist: Principien und historische Entwickelung, Maschinen für Wechselströme, Maschinen für gleichgerichtete Ströme, und zwar Ringmaschinen, Trommelmaschinen, verschiedene Systeme, Unipolarmaschinen, ferner Constructionsdetails und Hülfsapparate, Anwendung der elektrischen Maschinen zur Erzeugung des elektrischen Lichtes, verschiedene andere Anwendungen, nämlich zur Galvanoplastik, zum Schmelzen und zur Reinmetallgewinnung, zum Telegraphiren, für Laboratorien und medicinische Zwecke und zur Kraftübertragung. Der Anhang enthält Formeln zur Construction von Elektromagneten. Aus den frühern Auflagen ist der Abschnitt über die physikalischen Gesetze weggeblieben, der jetzt durch die gesonderte Ausgabe des vorher besprochenen Buchs „Wirkungsgesetze etc.“ — vertreten wird. H.

Vademecum für Elektrotechniker. Praktisches Hilfs- und Notizbuch für Ingenieure, Elektrotechniker, Werkmeister, Mechaniker u. s. w. Herausgegeben von E. Rohrbeck, Ingenieur für Elektrotechnik, unter Mitwirkung des Herrn E. Grünwald, Ingenieur. Fünfter Jahrgang des Kalenders für Elektrotechniker. 1888. Mit vielen Holzschnitten. Halle a. S. Wilhelm Knapp. 252 S.

Soviel sich bei blosser Durchsicht des Buches ohne eignen Betrieb urteilen lässt, ist darin in umsichtigster, vielseitigster Weise für alle erdenklichen Anwendungen durch praktisch geordnete, aus-

reichende Angaben, beginnend mit der abstracten Wissenschaft und eingehend auf die speciellen Erfordernisse der Praxis, gesorgt. Anzeigen eventueller Desideraten zur Ergänzung für spätere Jahrgänge würden sonach nur Sache derer seien, die das Buch gebrauchen.

H.

Zeitschrift für Elektrotechnik. Organ des Elektrotechnischen Vereins in Wien. Redacteur: Josef Kareis. IV. Jahrgang 1886. Wien 1886. Selbstverlag.

Der 4. Jahrgang, der erste welcher im Selbstverlage des Vereins erscheint, enthält folgende Abhandlungen und Vorträge:

A. v. Waltenhofen: Beiträge zur Anwendung der Gesetze des Elektromagnetismus. — Torsionsgalvanometer. — Accumulatoren von Farbaky. — Magnetisirungscurve bei verschiedenen Eisensorten, Anwendung zur Bestimmung der Härte. — Fröhlich'sche Theorie der dynamoelektrischen Maschinen.

J. Sack: Die elektrischen Uhren.

W. Penkert: ‚Berechnung der Elektromagnete bei Compound-Maschinen. — Transformation der Wärme in elektrische Energie. Bestimmung des Wirkungsgrades eines Transformators. — Mittlere Intensität des magnetischen Feldes bei Dynamomaschinen.

Rysselberghe: Telephonie auf lange Distanz.

Hammerl: Verhalten ringförmiger Magnete.

R. v. Fischer-Treuenfeld: Militär-Telegraphie.

J. Zacharias: Elektricität als Motor für Land- und Wasserfahrzeuge.

M. Burstyn: Elektrische Zündung.

H. v. Jüptner: Universal-Elektricitätsmesser.

J. Stephan: Charakteristik einer Wechselstrommaschine.

M. Jüllich: Best. d. Intens. per. veränd. elektr. Ströme.

D. Tumlirz: Blitzableitersystem von Melsens.

C. Zickler: Magnetisirungscurve.

R. Lewandowski: Neuerungen an Inductionsapparaten.

E. Gérard: Selbstinduction in elektrischen Leitern.

H. Sack: Specifische Inductionsconstanten von Stahlstäben.

J. Kolbe: Magnetische Kraftlinien.

C. Grawinkel: Ersatz von Telegr. Batterien durch elektrische Maschinen. — Stromarbeit in oberird. Telegraphenleitungen.

Kleiner und Hofmeister: Helligkeit und Arbeitsverbrauch elektrischer Glühlampen.

J. Kessler: Normalinstrument für abs. Messungen.

F. Bechtold: Elektrische Feuermelder.

Digitized by Google

F. Drexler: Elektrische Messinstrnmente.
J. Moser: Elektr. u. therm. Eigensch. v. Salzlösungen.
Streintz nnd Aulinger: Galvanische Polarisation des Bleies.
Ausserdem viele kürzere Aufsätze. H.

Erd- und Himmelskunde.

Geonomie (mathematische Geographie) gestützt auf Beobachtung nnd elementare Berechnung. Für Lehrer, Stndirende und znm Selbstunterricht hearheitet von Dr. Th. Epstein, Lehrer an der Realschule „Philantropin“ in Frankfurt a. M. Mit 166 Holzschnitten im Text und 18 Figurentafeln, wovon 12 mit Sternhildern auf hlauem Grunde. Wien 1885. Carl Gerold's Sohn. 576 S.

Der Name „Geonomie“ soll der hezeichneten Doctrin die Stellung des besondern Teils der Astronomie gehen, der sich auf die Erde als Astron hezieht. Eine eigentümliche Auffassung möchte dadurch kaum ausgedrückt sein, da die mechanische Theorie für die Erde keine andre ist als für die andern Planeten, die tellurischen Vorgänge nicht ohne Zuziehung der ührigen Himmelskörper erklärt werden können, hei Begrenznng des Lehrstoffs aber die gleiche Freiheit hleiht wie in jeder mathematischen Geographie. Die Hanptabschuitte des Bnchs sind: Hülfsmittel nnd Vorhereitungen, Gestalt und Grösse der Erde, Bewegung der Sonne, Uebergang znm Coppercanischen System, der Mond, geonomische Physik, in welchem letzten auch Ebbe nnd Flut hehandelt ist. Besonders ausführlich ist über die Messungen Auskunft gegeben: es werden nicht bloss die Hülfsmittel und Berechnung erklärt, sondern mehr noch die factischen Messungen, ihre Schicksale und Erfolge mitgeteilt. Die Anwendnngen der Mathematik heschränken sich auf die elementare der Schule, welche durch Vortrag einiger Lehren von den Coordinaten nnd von der Ellipse erweitert wird. Dagegen sind alle Gegenstände der Himmelsdynamik, also auch die Planetenhahnen nur qualitativ in Betracht gezogen, die Kepler'schen Gesetze gar nicht erwähnt. H.

Astronomische Geographie. Ein Lehrhnch angewandter Mathematik. Von Prof. H. C. E. Martns, Direktor des Sophien-Realgymnasinms in Berlin. Mit 100 Fignren im Texte. Zweite Auflage, mit vielen Zusätzen. Leipzig 1888. C. A. Koch. 388 S.

Die 1. Auflage ist im 260. litt. Bericht besprochen. Die gegenwärtige 2. Auflage bringt mehrere Verbesserungen und viele Zusätze, unter andern eine Veranschaulichung der Krümmung der Erdoberfläche; auch sind viele geschichtliche Bemerkungen hinzugefügt, für welche die Geschichte der Astronomie von Rudolf Wolf (in Bern) hauptsächlich als Quelle benutzt worden ist. Da der Gesamtstoff für ein Halbjahr bei 4 wöchentlichen Lehrstunden als zu gross erachtet ward, so hat der Verfasser darauf gerechnet, dass das Capitel über das Erdsphäroid in einem andern Halbjahre im Anschluss an das stereometrische Gebiet behandelt werden könnte. H.

Hydrologische Studien. Von Heinrich Gravé, behördlich autorisirter und beeideter Zivil-Ingenieur, Architekt, Mitglied mehrerer gelehrten Gesellschaften und wissenschaftlichen Vereine, Korrespondent der k. k. geologischen Reichsanstalt, etc. I. Heft. Wien 1887. Alfred Hölder. 59 S.

Diesem 1. Hefte soll eine noch nicht begrenzte Reihe weiterer Hefte folgen. Die darin enthaltenen Arbeiten gehen aus dem im Vorwort dargelegten Gedanken hervor, dass künstliche Anlagen zur Gewinnung von Naturproducten und zur Bekämpfung verderblicher Elemente noch grossenteils ohne gehörige Kenntniss der Wege, auf denen die Natur dem Menschen ihre Gaben zuführt und die Schäden mässigt und ausgleicht, unternommen werden, dass daher der momentane Gewinn beträchtlichen Schaden für die Zukunft nach sich ziehen kann. Die einzelnen Artikel sollen nun der Untersuchung dahin einschlagender Fragen gewidmet sein. Das 1. Heft enthält 2 Artikel. Der erste gibt eine Uebersicht über die Höhenmessungen in einem Teile Oesterreichs, namentlich ausgehend auf die Bestimmung der Höhen der Pegel österreichischer Flüsse, und stellt die Resultate zusammen. Der zweite, „Studien über die Bildung und Ergibigkeit der Quellen", geht hauptsächlich auf den Durchgang des Wassers durch Steinarten ein und erörtert die Veränderungen, welche der natürliche unterirdische Wasserlauf durch künstliche Ableitung des Wassers erleiden muss. H.

Wetter-Telegraphie und Sturmwarnungen in Nordamerika. Von J. G. Hagen, S. J. Separat-Abdruck aus den „Stimmen aus Maria-Laach". Freiburg i. Br. 1886. Herder. 49 S.

Die Schrift berichtet über die Veranstaltungen, welche von Seiten der Vereinigten Staaten zum Schutze der Landesproduction, des Handels und der Seefahrt gegen zerstörende Wettervorgänge durch Anwendung der Telegraphie und der Signale getroffen worden sind.

Ihre 3 Abschnitte behandeln einzeln geschichtliche Entwickelung des Wetterdienstes, dessen Organisation und Tätigkeit. Die Schutzmassregeln begannen 1819, mehrten und erweiterten sich, bis 1870 auf Betrieb des Brigade-Generals Albert J. Myer eine Organisation ins Leben trat, welche ganz unter militärischer Verwaltung stand, aber auch von vielen andern Seiten Unterstützung fand. Von ihr giengen täglich 3 mal Wetter-Bulletins aus, die anfangs an 24 Städte telegraphirt wurden, bald nachher auch Wetterprognosen; das Eintreffen angesagter Stürme stieg von 70 proc. mit der Zeit auf 88 proc. Die Tätigkeit der Institution dehnte sich bald auf immer mehr Ziele aus: auf dem Wiener Meteorologen-Congress 1873 gewann Myer die Mitwirkung aller europäischen Staaten und Culturstaaten aller Erdteile zu dem Plane gleichzeitige Beobachtungen anzuordnen. Die neueste Geschichte meldet von Rückgang der Erfolge, an dem die Wendung der öffentlichen Meinung zunächst gegen die Nordpolfahrten, dadurch vermittelt gegen alle Unternehmungen zugunsten der Institution schuld war. Die 2 letzten Abschnitte enthalten Specialien. H.

Astronomischer Wandkalender für das Jahr 1888. Gezeichnet von P. Manojlovits, königl. serbischer Vice-Consul. Text von Dr. K. Zelbr. Wien 1888. Carl Gerold's Sohn.

Die Gesamttafel besteht aus 3 Himmelskarten, die sich über die Zone der Ekliptik erstrecken und die Bahnen der Sonne, der Planeten und die Oerter des Voll- und Neumondes, bei festen Fixsternen, im Laufe des Jahres 1888 darstellen. Tabellarisch stehen darunter die Himmelserscheinungen für jeden Tag. H.

Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie und der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft. Redigirt von Dr. J. Hann (Wien, Hohe Warte) und Dr. W. Köppen (Hamburg, Seewarte). Vierter Jahrgang 1887 (zugl. XXII. Bd. d. Zeitschr. der Oesterr. Ges. für Met.) Berlin, A. Asher u. Co.

Der 4. Band enthält folgende Abhandlungen:

Biermann: Zum Klima der Kanarischen Inseln.

Kleiber: Periodische Schwankungen der Atmosphäre zwischen beiden Halbkugeln der Erde.

Lang: Beobachtung der Schneebedeckung.

Grossmann: Zur synoptischen Karte d. nordatlant. Oc.

Obermayer: Beobachtungsstation auf dem Gipfel des Sonnblick.

Hann: Geschichte der met. Station auf dem Sonnhlick. — Beobachtnngen daselhst. — Beohachtungen der österr. Polarstation anf Jan Mayen.

Erk: Verticale Verteilung des Niederschlags am Nordabhange der bairischen Alpen.

Ekhelm nnd Hagström: Höhe der Wolken im Sommer zn Upsala.

Draenert: Küstenklima der Provinz Pernambnco.

Hellmann: Jährliche Periode der Niederschläge in den dentschen Mittelgehirgen.

Láska: Gewitter in Prag.

Hngo Meyer: Untersuchungen über das Sättigungsdeficit. — Hänfigkeit gegehener Temperaturgrnppen in Norddentschland.

Hoffmann: Phänologie nnd Wetterprognose.

Fritz: Resnltate der Polarlichtbeohachtnngen.

Woeikof: Znm Klima von Korea.

Reimann: Gewittererscheinnngen im schlesischen Gehirge.

Nenmayer: Magnetische Landesaufnahme von Frankreich.

Köppen: Einiges über Wolkenformen. — Gewitter vom 13. bis 17. Juli 1884. — Hann's Atlas der Meteorologie.

Vettin: Einwirknng der har. Minima und Maxima anf die Richtung des Wolkenzuges.

Upton: Met. Beobachtnngen bei Sonnenfinsternissen.

Brückner: Ueber die Zählnng der Regentage.

Ule: Beoh. der Wassertemperatur in der Saale bei Halle.

Thirring: Znm Klima von China.

Weihranch: Met. Beob. zn Fort Rae.

Seidl: Temperaturverteilnng im Gehiete der Karawanken.

Müller: Ueber Verlnste äusserer Energie hei der Bewegung der Luft.

Linss: Ueber einige die Wolken- nnd Lnftelektricität hetreffende Probleme.

Wachlowski: Die Niederschlagsverhältnisse in der Bukowina.

Brandis: Regen nnd Wald in Indien.

Bnys-Ballot: Ueher simnltane Beobachtnngen.

Volger: Qnellentheorie auf meteorologischer Basis.

Angustin: Jährliche Periode des Windes.

Werner Siemens: Znr Frage der Lufstströmung. H.

Vermischte Schriften.

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Nr. 5. ausgegeben 1885. Redigirt von Krüss, Ahlhorn und Bock. Nr. 7.

ausg. 1887. Red. v. Wagner, Koldewey und Bock. Nr. 8. ausg. 1888. Red. v. Koldewey, Hoppe und Bock.

Der Inhalt von Nr. 6. ist im 15. litt. Ber. S. 38. aufgeführt.

In Nr. 5., 7. und 8. sind folgende Vorträge (Referat) und Abhandlungen mitgeteilt.

Hoppe: Historische Mitteilungen zur Elektricitätslehre und Potentialtheorie. 5.

F. H. Reitz: Ueber den Marograph für den Hafen von Marseille. 5.

Köpcke: Ueber die Reihe $\sum_1^\infty \sin(n!x\pi)$. 5.

Bock: Hydrodynamik nach dem Hamilton'schen Princip. 5. — Ueber eine neue zahlentheoretische Function. 6. 7.

Schulze: Zur Geschichte der hypergeometrischen Reihe. 5.

Kefersteiu: Beitrag zur Theorie des Billardspieles. 5 — Eine Methode zur Bestimmung der primitiven Wurzeln der Congruenz $g^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, für einen reellen Primzahlmodul p. 8.

P. Jaerisch: Zur Theorie der Lamé'schen Functionen. 7.

Köpke: Ueber das Princip von der Condensation der Singularitäten bei Hankel und Dini. 8.

Koldewey: Ueber einige Entwickelungen aus der Theorie der Deviation der Compasse an Bord eiserner Schiffe. 8.

E. Liebenthal: Das Potential des Ellipsoids. 8. H.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto. Being a continuation of the „Canadian Journal" of science, literature and history. Third series Vol. IV. [Whole No. Vol. XXII. No. 146.] Toronto 1887. The Copp. Clark Company, limited.

Der 4. Band, bestehend aus 2 Heften, enthält die in 21 Sitzungen gehaltenen Vorträge. Keiner derselben berührt mathematische oder physikalische Gegenstände. H.

Bulletin de la Société Mathématique de France. Publié par les Secrétaires. (Red. G. Humbert.) Tome XV. Paris 1887. Au siége de la Société.

Der 15. Band enthält folgende Abhandlungen.

O. Callandreau: Ueber die Entwickelung der Functionen in Reihen nach der Maclaurin'schen Formel im Falle einer reellen Variabeln.

Demartres: Ueber die Totalkrümmung der Flächen. — Ueber einen Punkt der Flächentheorie.

Digitized by Google

Jamet: Ueber das anharmonische Verhältniss einer Curve 3. Ordnung.

A.-C. Laisant: Krümmungsradien in den isogonalen Transformationen. — Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie der Gleichungen. — Ueber die nicht-isogonalen ebenen Transformationen. — Trigonometrische Sätze.

L. Neu: Articulirtes System um zu einer gegebenen Curve bezüglich auf eine Axe die symmetrische zu zeichnen.

R. Perrin: Ueber das System von 4 simultanen binären Formen, deren 2 linear, 2 quadratisch.

A.-E. Pellet: Abhandlung über die algebraische Theorie der Gleichungen.

E. Goursat: Note über einige pseudo-elliptische Integrale.

A.-H. Anglin: Sätze über die Determinanten. — Ueber die Coefficienten des allgemeinen Gliedes in gewissen Entwickelungen.

M. d'Ocagne: Ueber eine Quelle von Identitäten. — Integration einer recurrenten Reihe, welche in einer Wahrscheinlichkeitsaufgabe auftritt. — Ueber einen in der Algebra und Analysis nützlichen Begriff.

E. Collignon: Eine graphische Methode der Integration.

G. Feuret: Bemerkung über gewisse numerische Determinanten.

E. Picard: Ueber die hyperfuchsischen Functionen, welche aus den hypergeometrischen Reihen mit 2 Variabeln hervorgehen. — Bemerkung über die linearen Gruppen endlicher Ordnung mit 3 Variabeln.

Carvallo: Darlegung einer Caspary'schen Methode der Untersuchung von Curven im Raume. – Note über die vom Duhamel und Lamé erhaltenen Ausdrücke für den Uebergang von Wärme in nicht-isotrope Körper.

Lerch: Neuer Beweis der Fundamentaleigenschaft des euler'schen Integrals 1. Gattung.

de Presle: Beweis des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen. — Entwickelung der Jacobi'schen Functionen Θ und H in Producte und Untersuchung der Functionswerte bei Division der Periode durch eine ganze Zahl.

Désiré André: Satz über die quadratischen Formen.

H. Poincaré: Ueber die fundamentalen Hypothesen der Geometrie. H.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne. Publié par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondent de l'Académie royale de Belgique, etc., et J. Neuberg, Professeur à l'Uni-

versité de Liège, Membre de la Société royale des sciences de Liège, avec la collaboration de plusieurs Professeurs belges et étrangers. Tome septième, année 1887. Gand 1887. Ad. Hoste. Paris, Gauthier-Villars.

Der 7. Band enthält folgende Aufsätze.

Mister: Eigenschaften der Agnesi'schen Curven.

E. Vigarié: Ueber die complementaren Punkte.

Tucher: Ueber den triplicatorischen Kreis.

J. Casey: Eigenschaften dreier ähnlichen Figuren.

Cesáro: Bemerkungen zur infinitesimalen Geometrie.

P. H. Schoute: Ueber die Normalen des Winkels α.

E. Catalan: Ueber die Dividirbarkeit der Zahlen.

E. Lucas: Ueber die neunte vollkommene Zahl.

Laisant: Verschiedene Formulirungen einer einzigen Eigenschaft.

A. Servis: Ueber die Umkehrbarkeit der linearen Transformation. — Geometrische Interpretation der quadratischen birationalen Transformation. — Geometrische Interpretation der speciellen quadratischen birationalen Transformation. — Ueber die vollkommenen Zahlen.

G. de Longchamps: Ueber die Rectification einiger bemerkenswerten Curven.

C. Bergmans: Sätze über die Parabel.

J. Neuberg: Roberts'sche Kugel. — Transmutationen eines Dreiecks.

M. d'Ocagne: Die cyklischen Coordinaten. Einige Eigenschaften des Dreiecks.

Van Dorsten: Anwendung der Eigenschaften dreier ähnlichen Figuren.

M'Cay: Ueber die Kiepert'sche Hyperbel.

P. Mansion: Weierstrass'sche stetige Function ohne Differential. (Auszug.)

Fr. Deruyts: Lineare Erzeugung einiger Curven zu vielfachen Elementen.

Emmerich: Constructionsprobleme bezüglich auf die Geometrie des Brocard'schen Kreises.

Schoentjes: Ueber eine Erzeugungsweise der hyperbolischen Spirale.

Hierzu kommen zahlreiche Lösungen in diesem Journal gestellter Aufgaben. H.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXIV. 1887. Serie quarta. Rendiconti pubblicati per cura dei Segretari. Volume III. Roma 1887. V. Salvucci.

Der 3. Band enhält folgende mathematische Arbeiten.

Ricci: Ueber die covariante Derivation zu einer quadratischen Differential-Form.

Visalli: Ueber die Correlationen (in 2 Räumen von 3 Dimensionen), welche 12 Elementar-Bedingungen genügen. — Ueber die von 2 Fundamentalformen 2. Gattung erzeugten Figuren, unter denen eine vielfache Correspondenz besteht.

Pieri: Ueber das Correspondenz-Princip in einem beliebigen linearen n dimensionalen Raume.

Brioschi: Ueber die hyperelliptischen Functionen σ.

Bianchi: Ueber die doppelt unendlichen Strahlensysteme. — Ueber Weingarten's Systeme in den Räumen constanter Krümmung.

Pincherle: Construction neuer geeigneter analytischer Ausdrücke zur Darstellung von Functionen durch eine unendliche Anzahl einzelner Punkte. — Ueber die Vergleichung der Singularitäten zweier analytischen Functionen.

Volterra: Ueber die linearen Differentialgleichungen. — Ueber die Functionen, welche von anderen Functionen abhangen. — Ueber eine Erweiterung der Riemann'schen Theorie der Functionen complexer Variabeln.

Abetti: Begriffe der christlichen Kophten und Abessinier vom Kalender.

Cantoni: Conjecturen über die Wirkung in die Ferne.

Segre: Ueber die algebraischen Mannichfaltigkeiten, die von einer einfach unendlichen Reihe von Räumen gebildet werden.

Besso: Einige partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Siacci: Ueber die Winkel des weitesten Wurfes (bei Luftwiderstand). H.

Transactions of the Wagner Free Institute of Science of Philadelphia. Published under the direction of the Faculty. Vol. I. Philadelphia 1887.

Diese neue Zeitschrift ist der Erforschung des Inlandes in Hinsicht auf Zoologie, Botanik und Geologie gewidmet. Das Institut ist 1855 von William Wagner (gestorben im Jan. 1885) gegründet und wird verwaltet von einem Curatorium und einer Facultät bestehend aus 4 Professoren, die seit 1885 regelmässig Vorlesungen für freies Publicum halten. H.

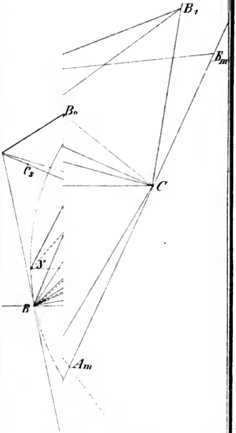
Annuaire pour l'an 1888, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Prix: 1 fr. 50 c. Paris 1888. Gauthier-Villars et Fils.

Depuis le 7 messidor an III, le Bureau des Longitudes n'a jamais laissé passer une année sans publier son Annuaire. Outre les données pratiques qui forment le fonds invariable de ce recueil, celui qui vient de paraître contient des articles beaucoup plus étendus, de véritables Traités, sur les Monnaies, la Statistique, la Minéralogie, la Météorologie, etc. Il renferme de plus une éloquente et magistrale étude de M. Janssen sur l'Age des étoiles; une Notice dans laquelle M. l'Amiral Mouchez, Directeur de l'Observatoire, a réuni tous les renseignements relatifs à l'exécution de la Carte photographique du Ciel, dont il a été le promoteur; des Notes de M. Cornu sur les Calendriers et sur la Construction des cadrans solaires; enfin, le captivant récit d'un voyage accompli par M. d'Abbadie en Orient, pour mesurer des coordonnées magnétiques, en dépit des ignorances et des mauvais vouloirs rencontrés dans cette lointaine expédition.

Gauthier-Villars et Fils.

Digitized by Google

LIBRARY



…'sche Winkel.

Digitized by Google

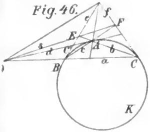


Fig. 46.

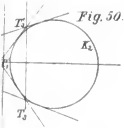


Fig. 50.

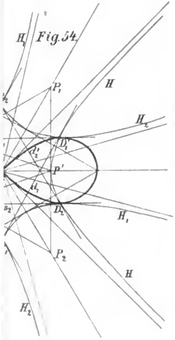
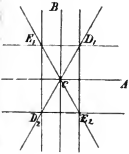


Fig. 54.

Fig. 61.



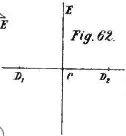
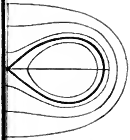


Fig. 62.

. 65.



Digitized by Google

STANFORD LIBRARY

Fig. 1.

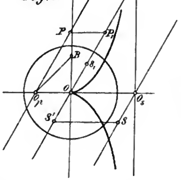
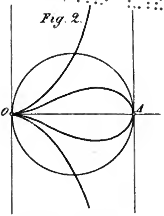


Fig. 2.



XIX. Zahradnik: Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissoide.

Fig. 1.

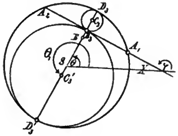


Fig. 3.

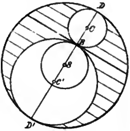
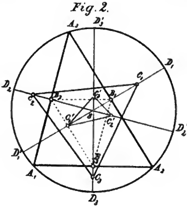
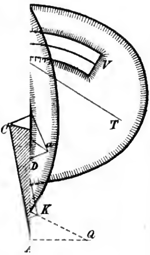


Fig. 2.



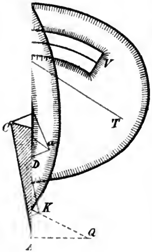
XX. Zahradnik: Ueber einige Relationen am Dreiecke.

Digitized by Google


V
T
C
a
D
K
Q
A

Digitized by Google

LIBRARY



Digitized by Google

Digitized by Google

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

28D NOV 28 1995

NOV 1 1995

Stanford University Libraries
3 6105 010 227 465

510.5
A673
V. 6

STORAGE AREA

Digitized by Google

Digitized by Google